



Programmieren
und Problemlösen

Dynamische Programmierung

Dennis Komm

Rekursives Sortieren und Suchen

$\mathcal{O}(n \log_2 n)$ -Sortierer

Iteratives Mergesort

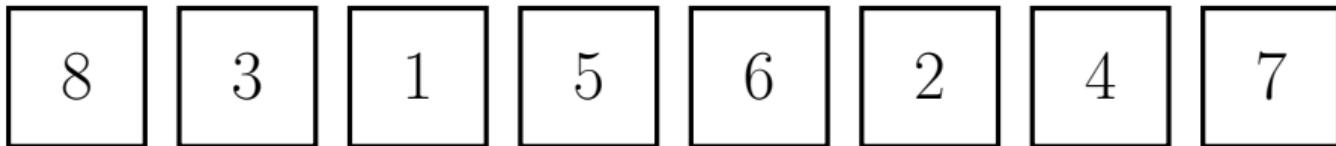
8	3	1	5	6	2	4	7
---	---	---	---	---	---	---	---

Iteratives Mergesort

8	3	1	5	6	2	4	7
---	---	---	---	---	---	---	---

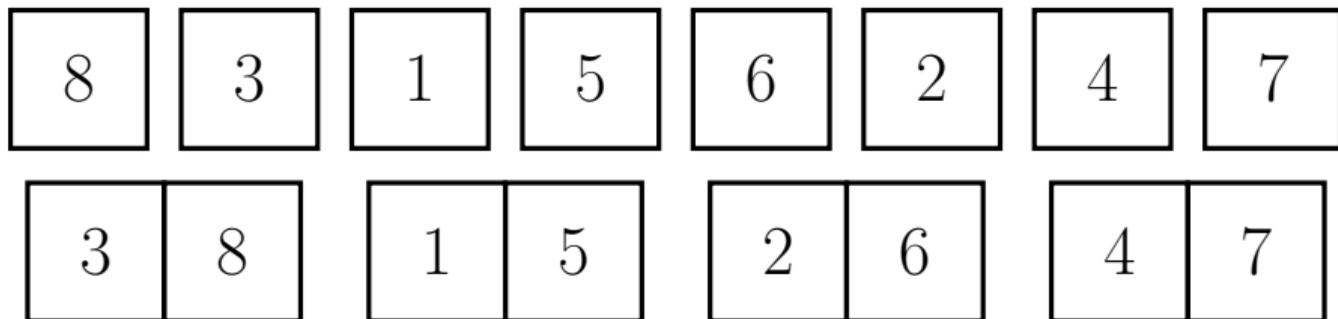
[8, 3, 1, 5, 6, 2, 4, 7]

Iteratives Mergesort



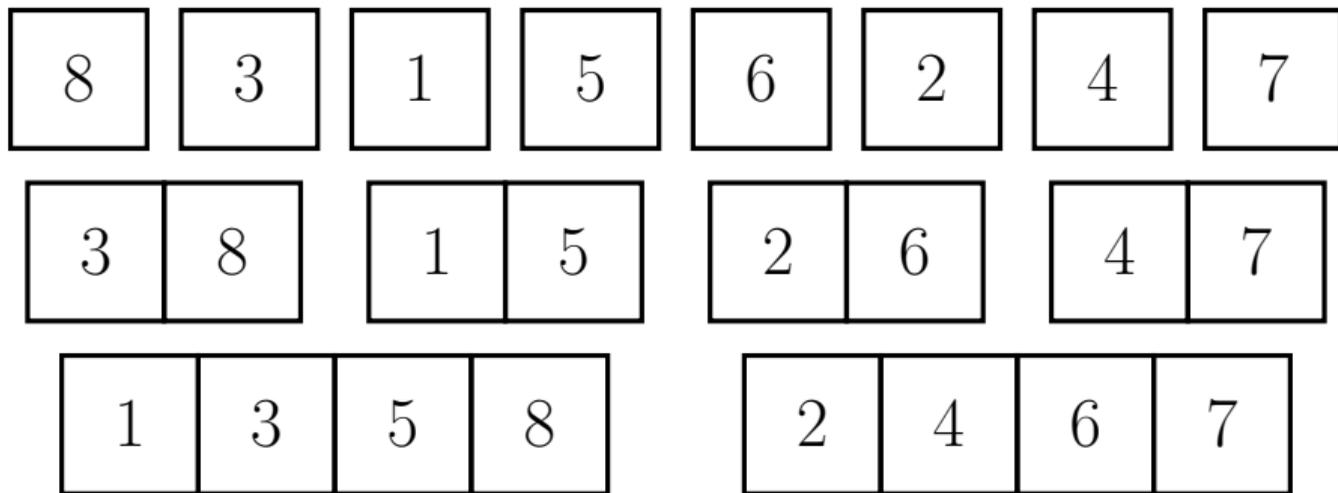
[[8], [3], [1], [5], [6], [2], [4], [7]]

Iteratives Mergesort



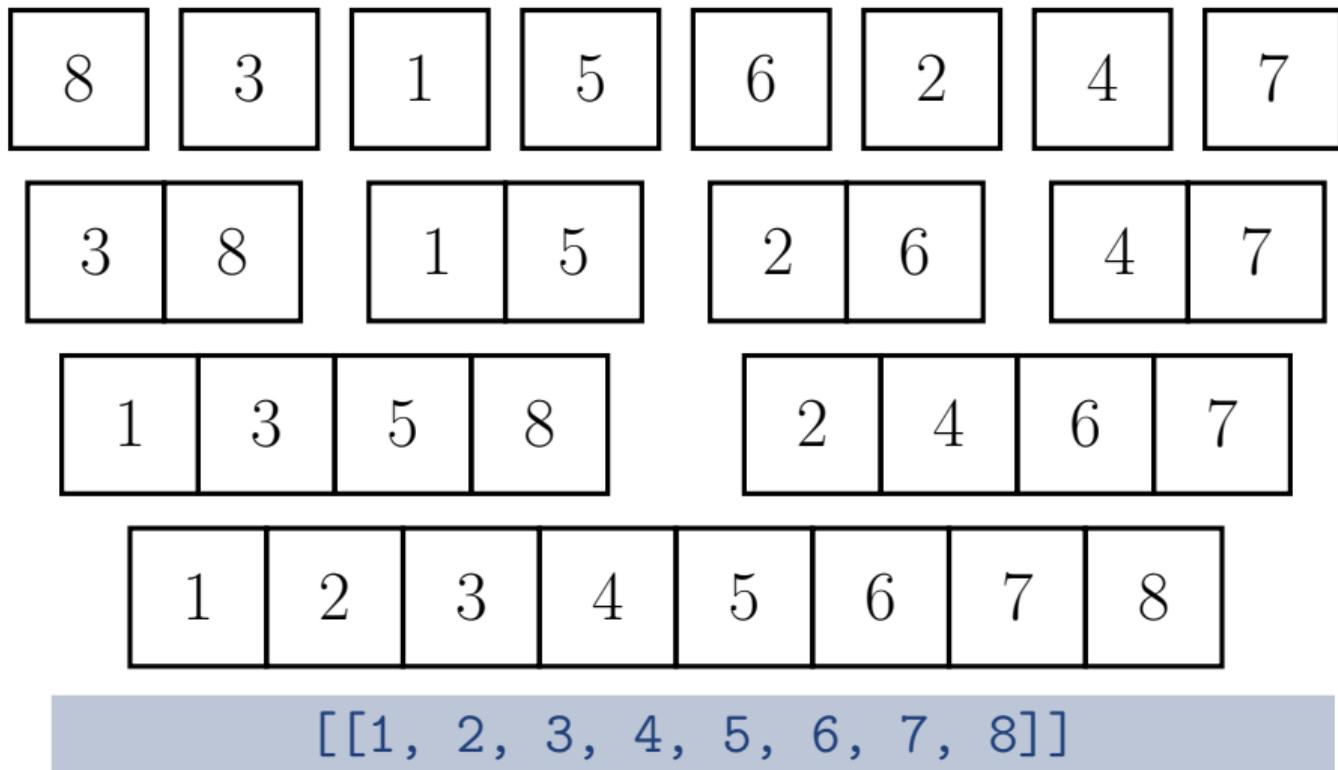
[[3, 8], [1, 5], [2, 6], [4, 7]]

Iteratives Mergesort



`[[1, 3, 5, 8], [2, 4, 6, 7]]`

Iteratives Mergesort



Iteratives Mergesort

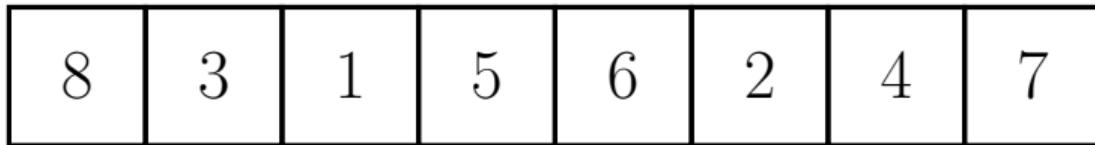
Herzstück von Mergesort ist die Funktion `merge()`, welche zwei sortierte Listen zusammenfügt

Iteratives Mergesort

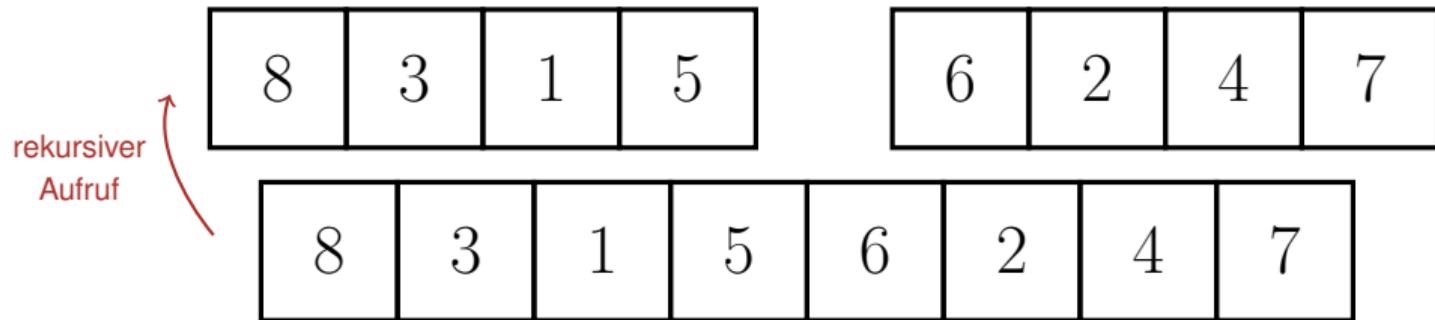
Herzstück von Mergesort ist die Funktion `merge()`, welche zwei sortierte Listen zusammenfügt

```
def merge(leftdata, rightdata):  
    result = []  
    while len(leftdata) > 0 and len(rightdata) > 0:  
        if leftdata[0] > rightdata[0]:  
            result.append(rightdata.pop(0))  
        else:  
            result.append(leftdata.pop(0))  
    return result + leftdata + rightdata
```

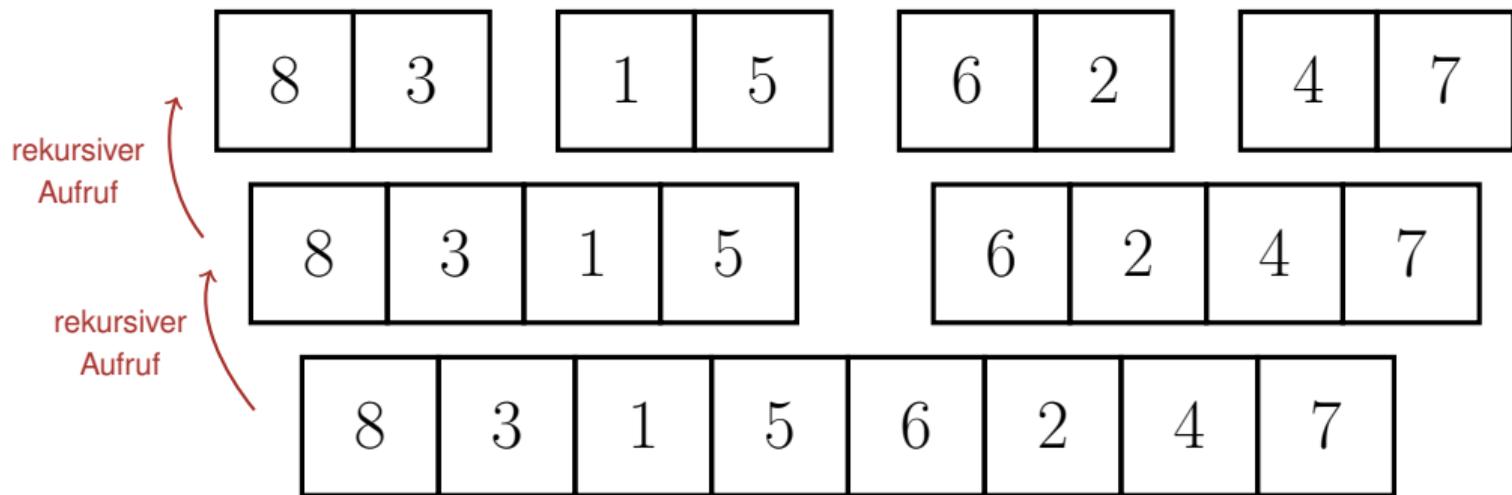
Rekursives Mergesort



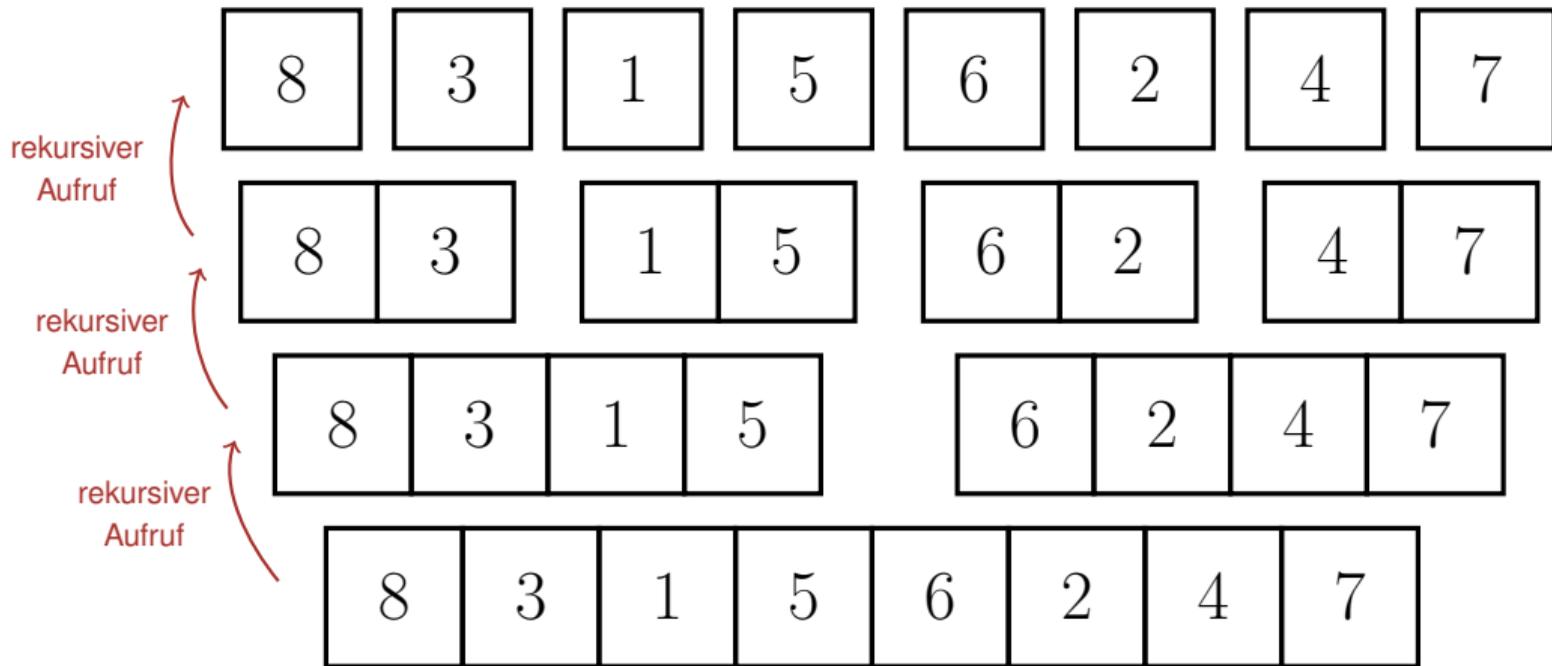
Rekursives Mergesort



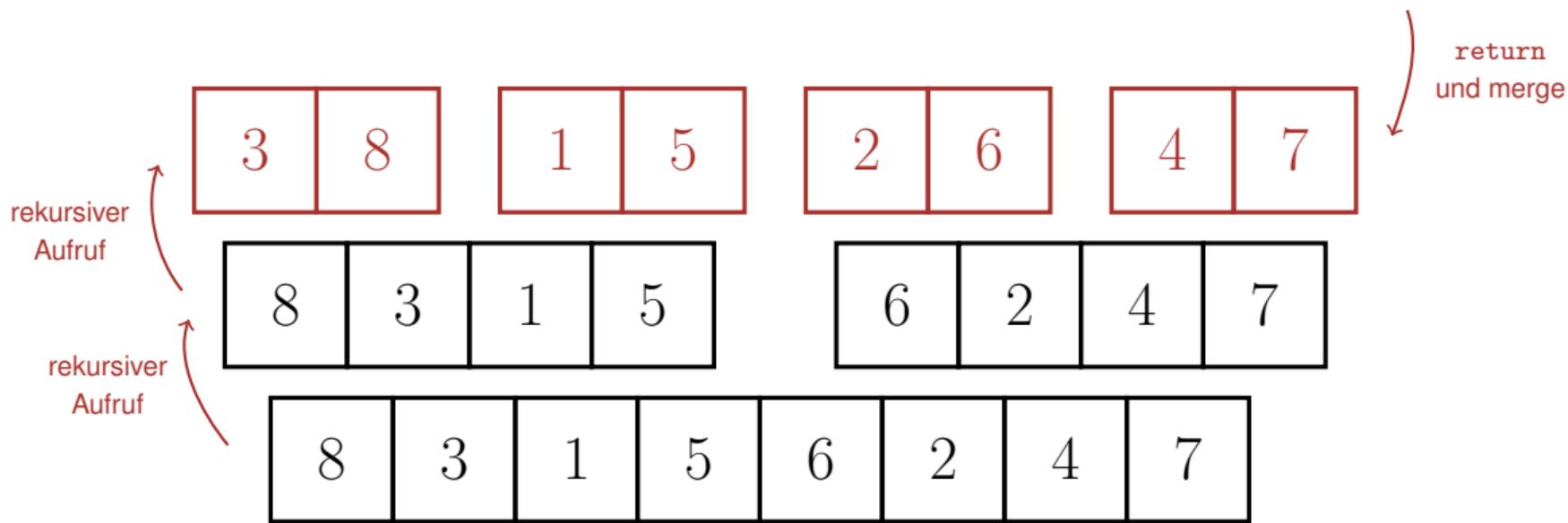
Rekursives Mergesort



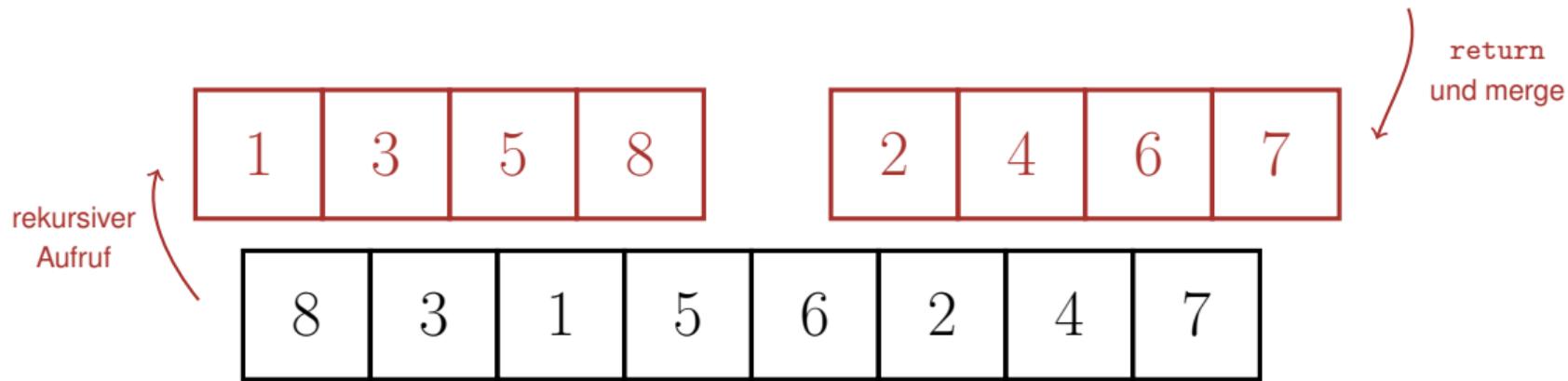
Rekursives Mergesort



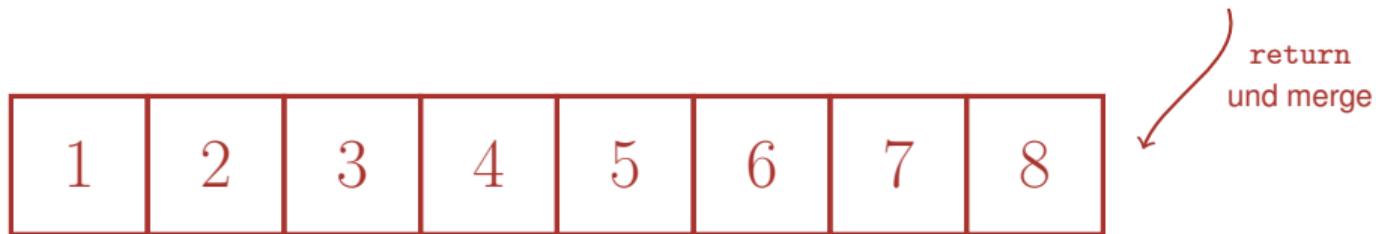
Rekursives Mergesort



Rekursives Mergesort



Rekursives Mergesort



Mergesort als rekursive Python-Funktion

- die eine Liste als Parameter übergeben erhält
- diese in der Mitte in zwei Listen unterteilt
- den Algorithmus auf diese rekursiv anwendet
- die zwei so sortierten Listen „merged“ und zurückgibt

Rekursives Mergesort

```
def mergesort(data):
    if len(data) <= 1:
        return data
    mid = len(data) // 2
    leftdata = mergesort(data[:mid])
    rightdata = mergesort(data[mid:])
    result = []
    while len(leftdata) > 0 and len(rightdata) > 0:
        if leftdata[0] > rightdata[0]:
            result.append(rightdata.pop(0))
        else:
            result.append(leftdata.pop(0))
    return result + leftdata + rightdata
```

Rekursives Sortieren und Suchen

$\mathcal{O}(n \log_2 n)$ -Sortierer – Quicksort

Rekursives Quicksort

- Einer der bekanntesten Sortieralgorithmen

Rekursives Quicksort

- Einer der bekanntesten Sortieralgorithmen
- Im Worst-Case allerdings eine Zeitkomplexität in $\mathcal{O}(n^2)$

Rekursives Quicksort

- Einer der bekanntesten Sortieralgorithmen
- Im Worst-Case allerdings eine Zeitkomplexität in $\mathcal{O}(n^2)$
- Kann aber an einer gewissen Stelle **randomisiert** werden
- Erwartete Laufzeit in $\mathcal{O}(n \log_2 n)$
- Sehr gute Laufzeit in der Praxis

Rekursives Quicksort

- Einer der bekanntesten Sortieralgorithmen
 - Im Worst-Case allerdings eine Zeitkomplexität in $\mathcal{O}(n^2)$
 - Kann aber an einer gewissen Stelle **randomisiert** werden
 - Erwartete Laufzeit in $\mathcal{O}(n \log_2 n)$
 - Sehr gute Laufzeit in der Praxis
-
- Wähle beliebiges **Pivotelement** (wir nehmen hier das jeweils erste)
 - Erstelle eine Liste mit kleineren und eine mit grösseren Elementen

Rekursives Quicksort

- Einer der bekanntesten Sortieralgorithmen
 - Im Worst-Case allerdings eine Zeitkomplexität in $\mathcal{O}(n^2)$
 - Kann aber an einer gewissen Stelle **randomisiert** werden
 - Erwartete Laufzeit in $\mathcal{O}(n \log_2 n)$
 - Sehr gute Laufzeit in der Praxis
-
- Wähle beliebiges **Pivotelement** (wir nehmen hier das jeweils erste)
 - Erstelle eine Liste mit kleineren und eine mit grösseren Elementen
 - Rufe Algorithmus rekursiv auf diesen Listen auf

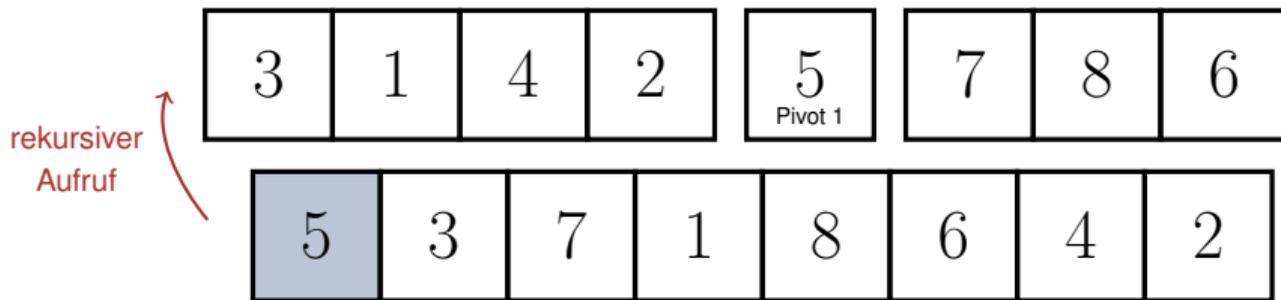
Rekursives Quicksort

- Einer der bekanntesten Sortieralgorithmen
 - Im Worst-Case allerdings eine Zeitkomplexität in $\mathcal{O}(n^2)$
 - Kann aber an einer gewissen Stelle **randomisiert** werden
 - Erwartete Laufzeit in $\mathcal{O}(n \log_2 n)$
 - Sehr gute Laufzeit in der Praxis
-
- Wähle beliebiges **Pivotelement** (wir nehmen hier das jeweils erste)
 - Erstelle eine Liste mit kleineren und eine mit grösseren Elementen
 - Rufe Algorithmus rekursiv auf diesen Listen auf
 - Füge sortierte Listen jeweils zusammen

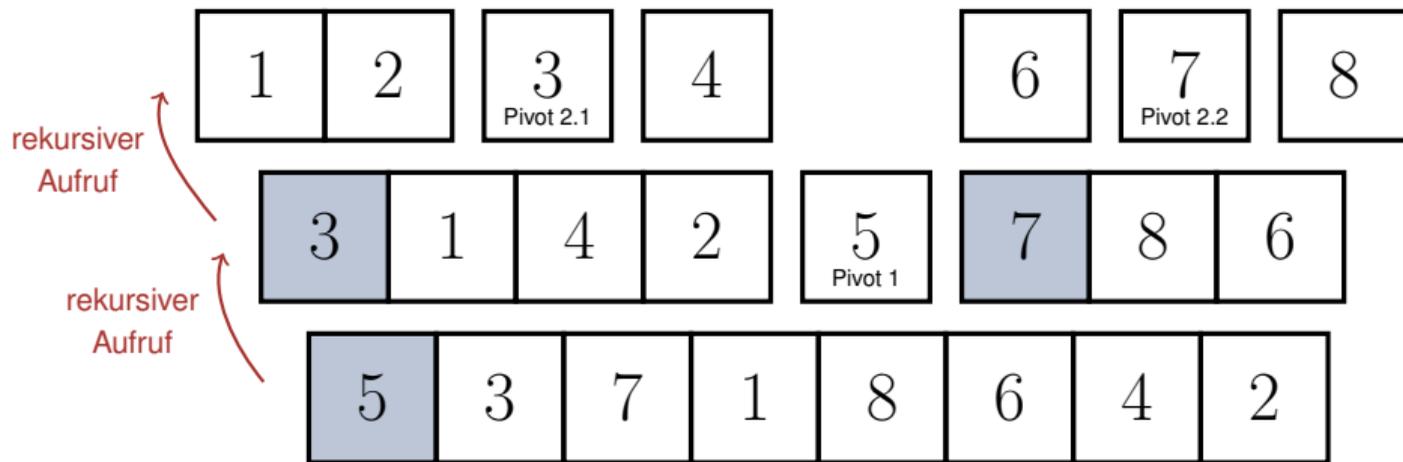
Rekursives Quicksort

5	3	7	1	8	6	4	2
---	---	---	---	---	---	---	---

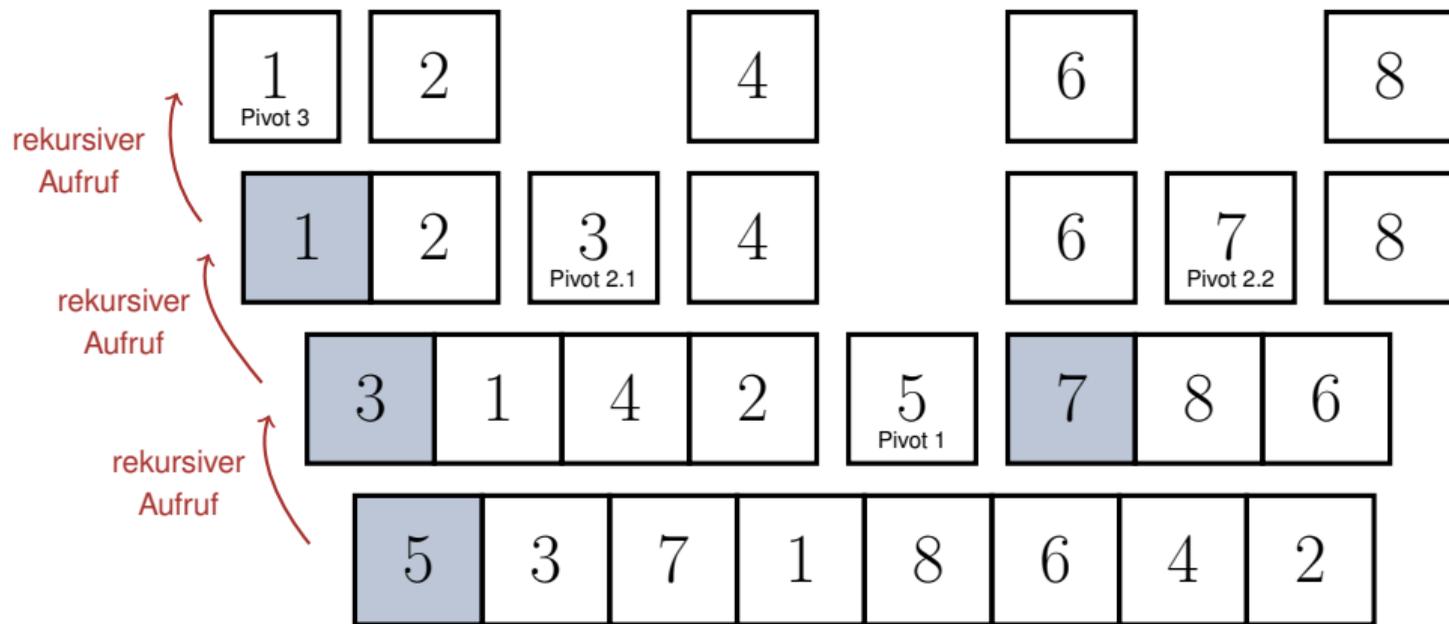
Rekursives Quicksort



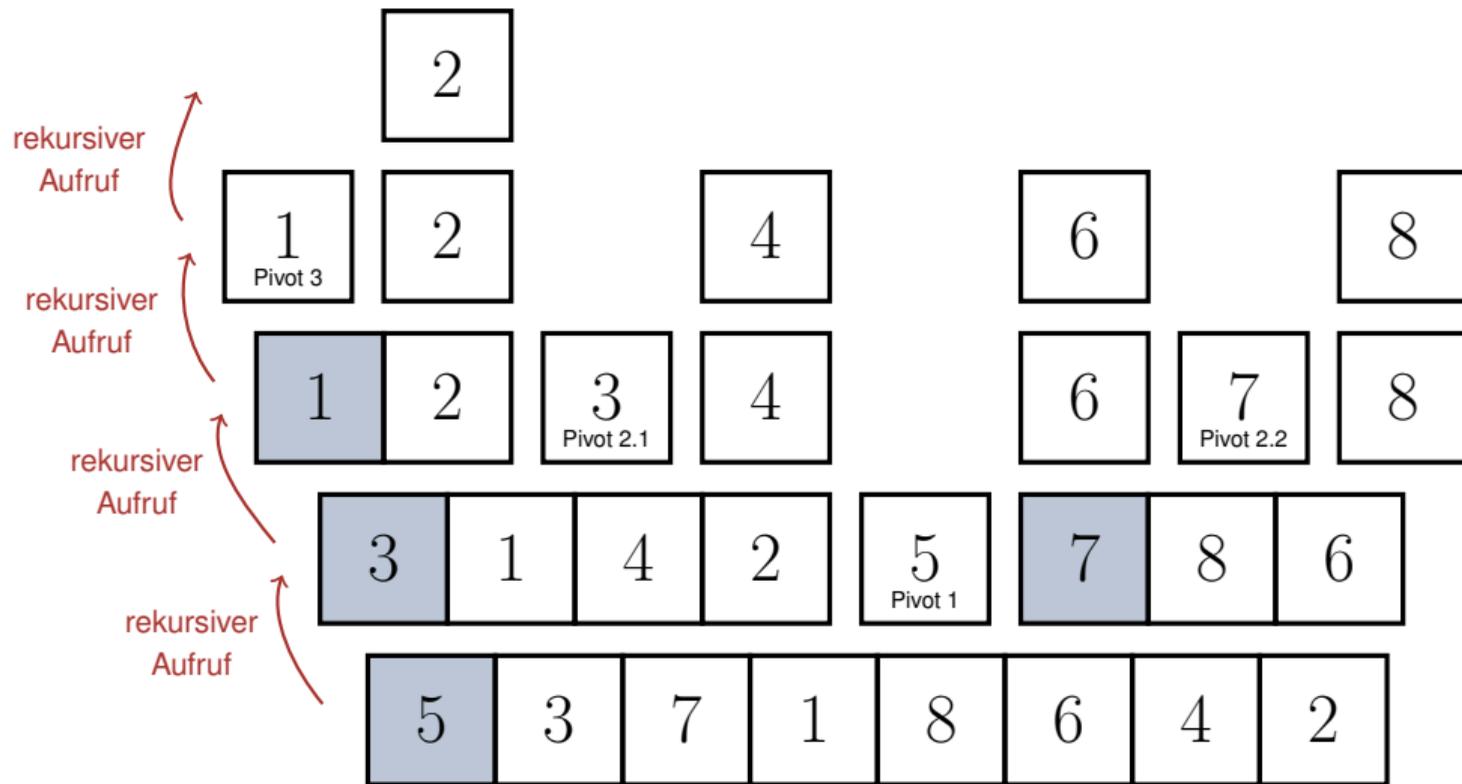
Rekursives Quicksort



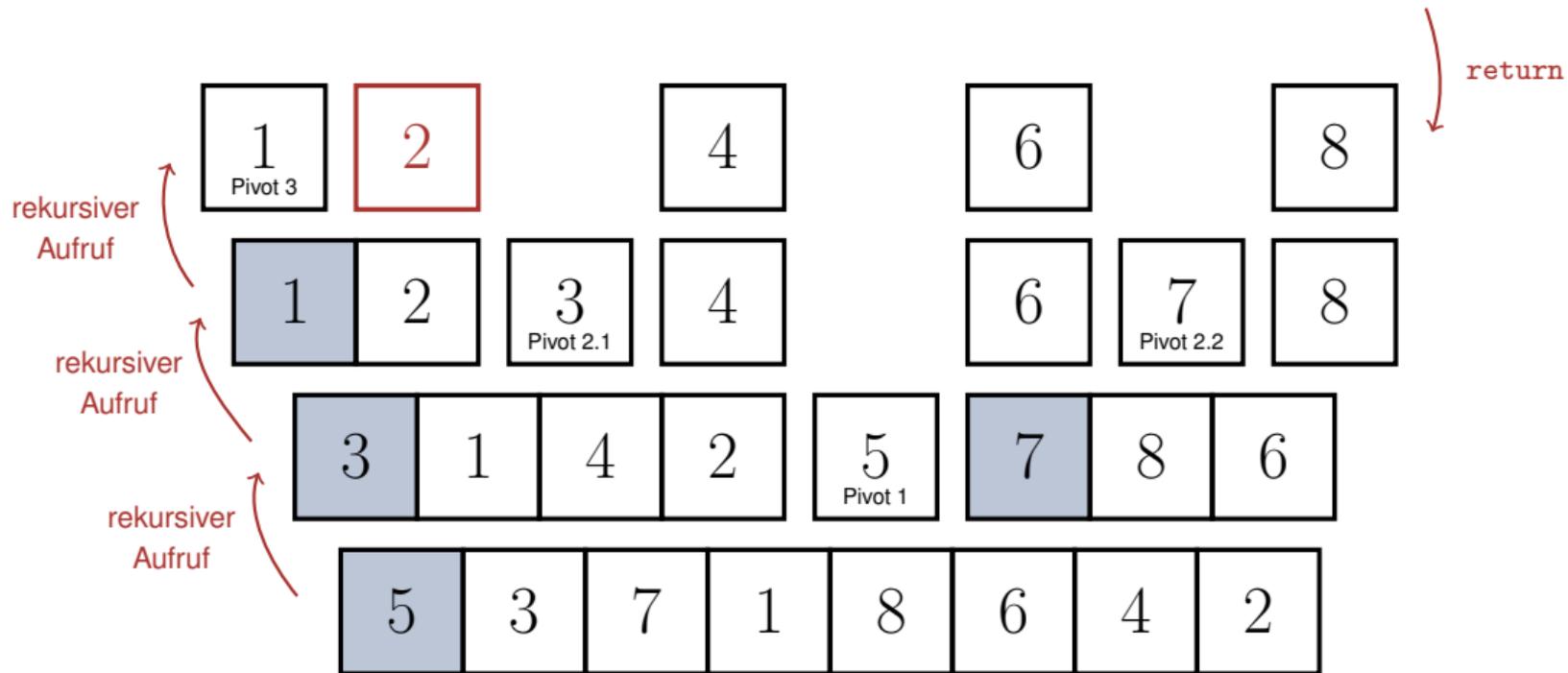
Rekursives Quicksort



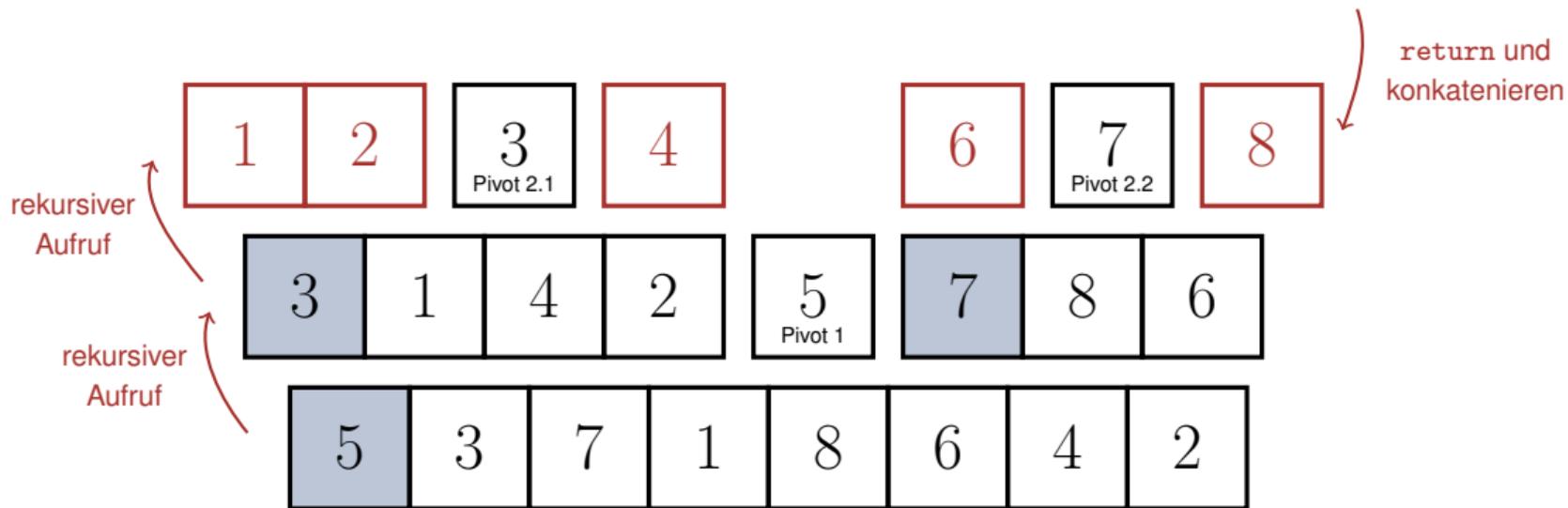
Rekursives Quicksort



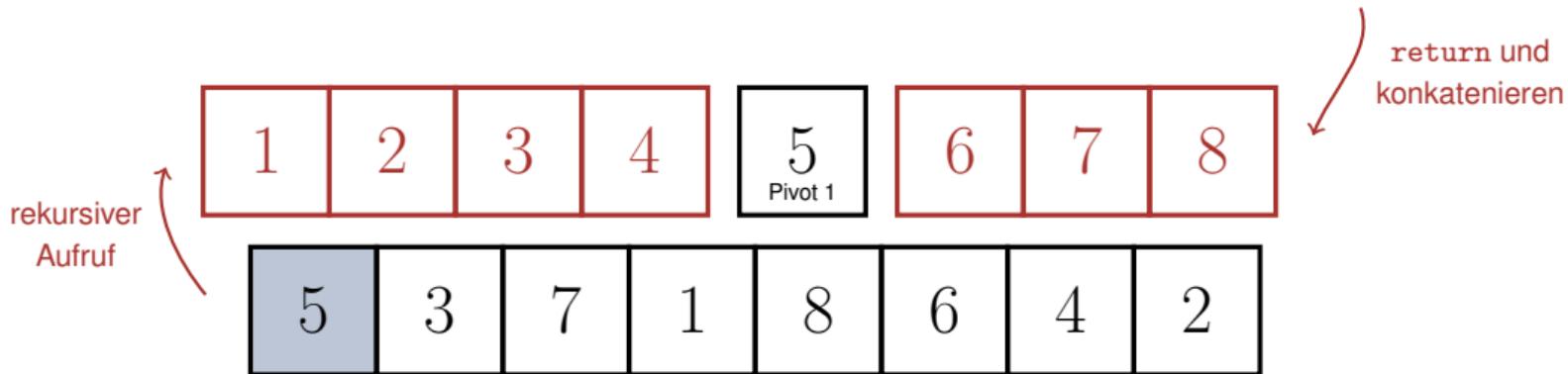
Rekursives Quicksort



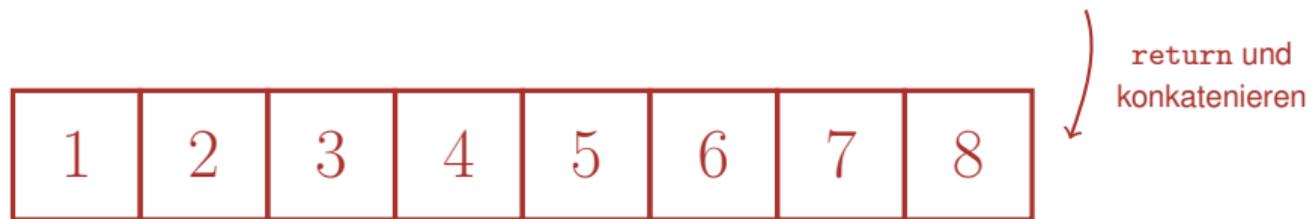
Rekursives Quicksort



Rekursives Quicksort



Rekursives Quicksort



Quicksort als rekursive Python-Funktion

- die eine Liste `data` als Parameter übergeben erhält
- das erste Element von `data` als Pivot-Element wählt
- eine Liste mit kleineren und eine Liste mit grösseren Elementen erstellt
- den Algorithmus auf diesen rekursiv anwendet
- die zwei so sortierten Listen und das Pivot-Element konkateniert und zurückgibt

Rekursives Quicksort

```
def quicksort(data):  
    if len(data) <= 1:  
        return data  
    else:  
        pivot = data[0]  
        leftdata = [i for i in data[1:] if i < pivot]  
        rightdata = [i for i in data[1:] if i >= pivot]  
        return quicksort(leftdata) + [pivot] + quicksort(rightdata)
```

Dictionarys

Python-Listen

- Zugriff auf Stelle i mit `[i]`
- Element x am Ende hinzufügen mit `append(x)`

Python-Listen

- Zugriff auf Stelle i mit `[i]`
- Element x am Ende hinzufügen mit `append(x)`
- Element am Anfang oder Ende entfernen mit `pop(0)` und `pop()`
- Element an Stelle i hinzufügen oder entfernen mit `insert(i,x)` oder `pop(i)`

Python-Listen

- Zugriff auf Stelle i mit `[i]`
- Element x am Ende hinzufügen mit `append(x)`
- Element am Anfang oder Ende entfernen mit `pop(0)` und `pop()`
- Element an Stelle i hinzufügen oder entfernen mit `insert(i,x)` oder `pop(i)`
- List Comprehensions

Python-Listen

- Zugriff auf Stelle `i` mit `[i]`
- Element `x` am Ende hinzufügen mit `append(x)`
- Element am Anfang oder Ende entfernen mit `pop(0)` und `pop()`
- Element an Stelle `i` hinzufügen oder entfernen mit `insert(i,x)` oder `pop(i)`
- List Comprehensions
- Test, ob Element in Liste ist mit `in`

Python-Listen

- Zugriff auf Stelle i mit `[i]`
- Element x am Ende hinzufügen mit `append(x)`
- Element am Anfang oder Ende entfernen mit `pop(0)` und `pop()`
- Element an Stelle i hinzufügen oder entfernen mit `insert(i,x)` oder `pop(i)`
- List Comprehensions
- Test, ob Element in Liste ist mit `in`
- Iterieren über alle Elemente mit `for`-Schleife
- Teilliste erstellen von Position i bis j mit `[i:j+1]`

Python-Listen

- Zugriff auf Stelle i mit `[i]`
- Element x am Ende hinzufügen mit `append(x)`
- Element am Anfang oder Ende entfernen mit `pop(0)` und `pop()`
- Element an Stelle i hinzufügen oder entfernen mit `insert(i,x)` oder `pop(i)`
- List Comprehensions
- Test, ob Element in Liste ist mit `in`
- Iterieren über alle Elemente mit `for`-Schleife
- Teilliste erstellen von Position i bis j mit `[i:j+1]`
- ...

Python-Listen

- Zugriff auf Stelle i mit `[i]`
- Element x am Ende hinzufügen mit `append(x)`
- Element am Anfang oder Ende entfernen mit `pop(0)` und `pop()`
- Element an Stelle i hinzufügen oder entfernen mit `insert(i,x)` oder `pop(i)`
- List Comprehensions
- Test, ob Element in Liste ist mit `in`
- Iterieren über alle Elemente mit `for`-Schleife
- Teilliste erstellen von Position i bis j mit `[i:j+1]`
- ...

Einschränkung durch Zugriff per Index, wenn Daten z.B. mit diesem assoziiert sind, aber nicht für alle möglichen Indizes Daten vorliegen

Python-Dictionaries

Key-Value-Paare

Zugriff nicht über Index, sondern selbst-definierten „Schlüssel“

Python-Dictionaries

Key-Value-Paare

Zugriff nicht über Index, sondern selbst-definierten „Schlüssel“

- Teilweise ähnliche Funktionalität wie Listen

Key-Value-Paare

Zugriff nicht über Index, sondern selbst-definierten „Schlüssel“

- Teilweise ähnliche Funktionalität wie Listen
- ... aber Daten sind nicht nach Indizes sortiert

Python-Dictionaries

Key-Value-Paare

Zugriff nicht über Index, sondern selbst-definierten „Schlüssel“

- Teilweise ähnliche Funktionalität wie Listen
- ... aber Daten sind nicht nach Indizes sortiert
- Initialisierung mit geschweiften Klammern

```
data = {}
```

Python-Dictionaries

Key-Value-Paare

Zugriff nicht über Index, sondern selbst-definierten „Schlüssel“

- Teilweise ähnliche Funktionalität wie Listen
- ... aber Daten sind nicht nach Indizes sortiert
- Initialisierung mit geschweiften Klammern

```
data = {}
```

- Schlüssel und Werte werden mit Doppelpunkt getrennt

```
data = {10 : "Wert 1", 16 : "Wert 2", 39 : "Wert 3" }
```

```
data = {"eins" : "Wert 1", "zwei" : "Wert 2", "pi" : 3.14 }
```

Python-Dictionaries

Key-Value-Paare

Zugriff nicht über Index, sondern selbst-definierten „Schlüssel“

- Teilweise ähnliche Funktionalität wie Listen
- ... aber Daten sind nicht nach Indizes sortiert
- Initialisierung mit geschweiften Klammern

```
data = {}
```

- Schlüssel und Werte werden mit Doppelpunkt getrennt

```
data = {10 : "Wert 1", 16 : "Wert 2", 39 : "Wert 3" }  
data = {"eins" : "Wert 1", "zwei" : "Wert 2", "pi" : 3.14 }
```

- Zugriff auf Wert mit Schlüssel key mit [key]

```
print(data[16])
```

Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen

- Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist definiert als

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots,$

- Eine Zahl der Folge ergibt sich also aus der Summe der beiden Vorgänger; wobei die ersten beiden Zahlen 1 sind

Fibonacci-Zahlen

- Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist definiert als

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots,$

- Eine Zahl der Folge ergibt sich also aus der Summe der beiden Vorgänger; wobei die ersten beiden Zahlen 1 sind
- Sind in vielen natürlichen Phänomenen anzutreffen

Fibonacci-Zahlen

- Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist definiert als

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, . . . ,

- Eine Zahl der Folge ergibt sich also aus der Summe der beiden Vorgänger; wobei die ersten beiden Zahlen 1 sind
- Sind in vielen natürlichen Phänomenen anzutreffen. . . oder im HB Zürich



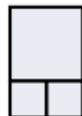
Fibonacci-Zahlen



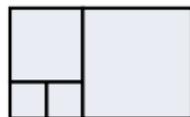
Fibonacci-Zahlen



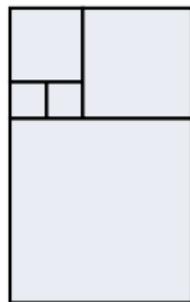
Fibonacci-Zahlen



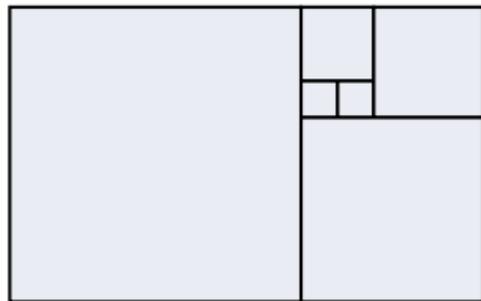
Fibonacci-Zahlen



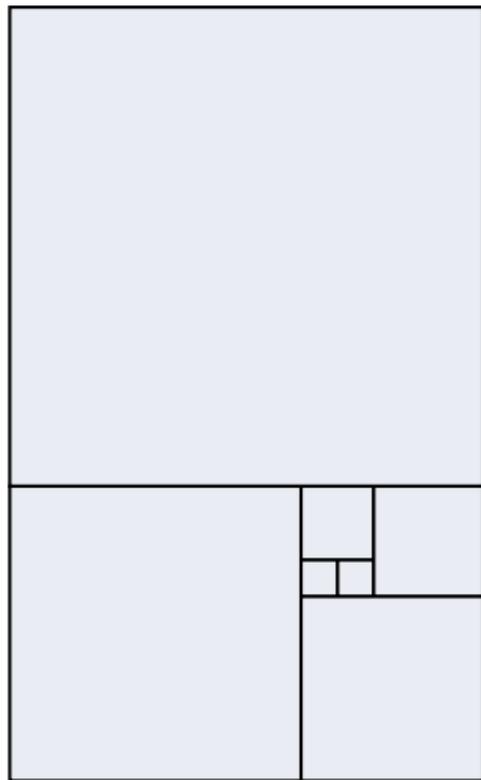
Fibonacci-Zahlen



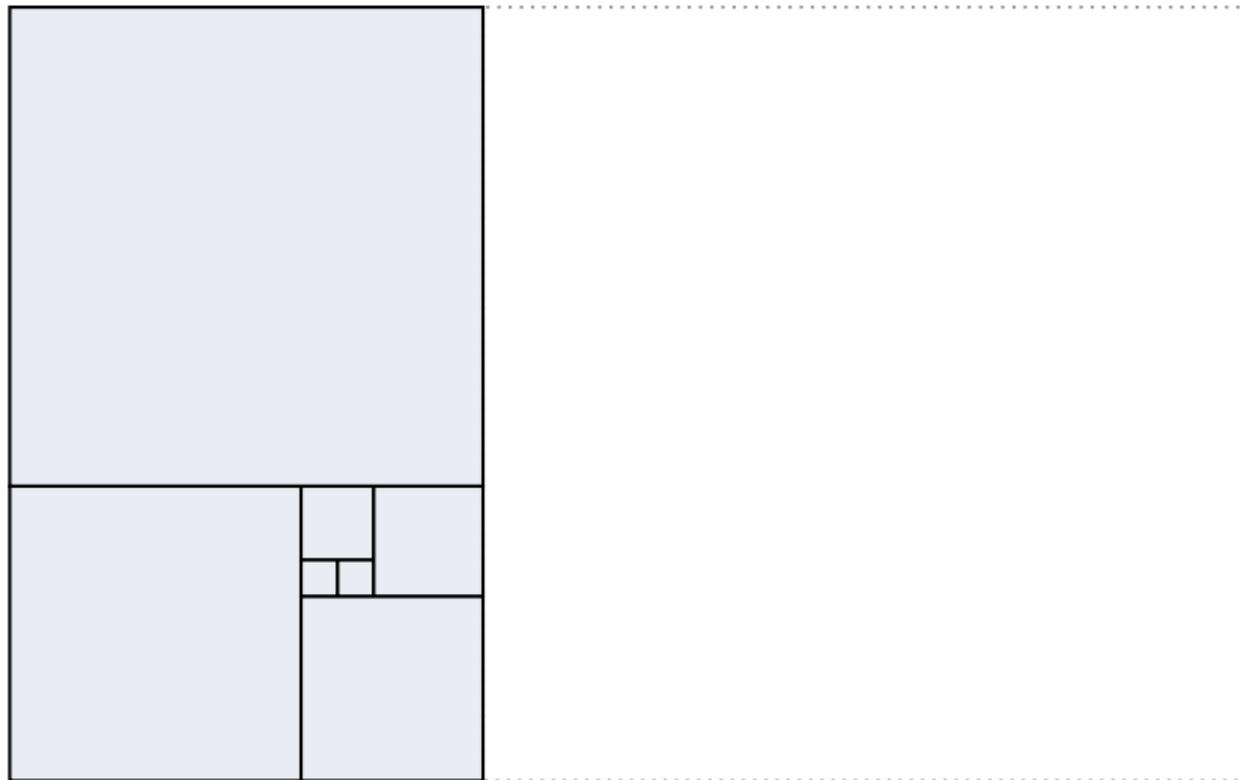
Fibonacci-Zahlen



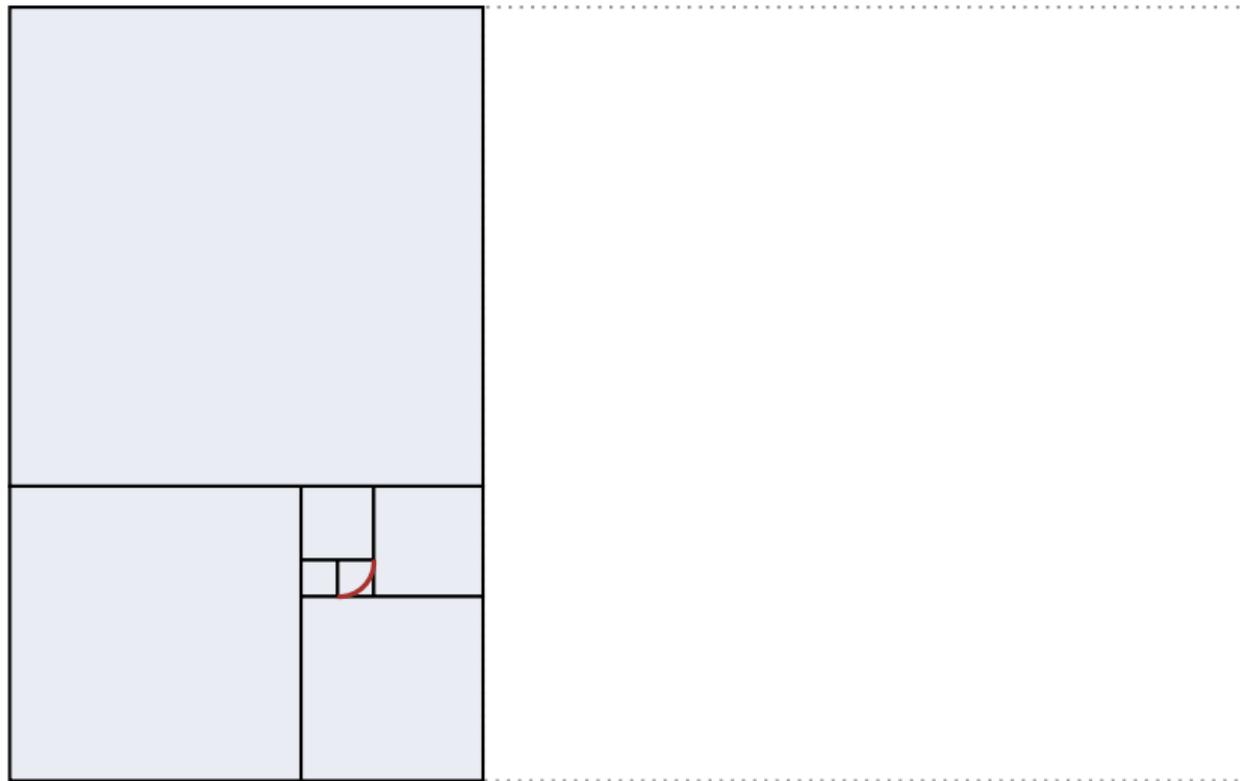
Fibonacci-Zahlen



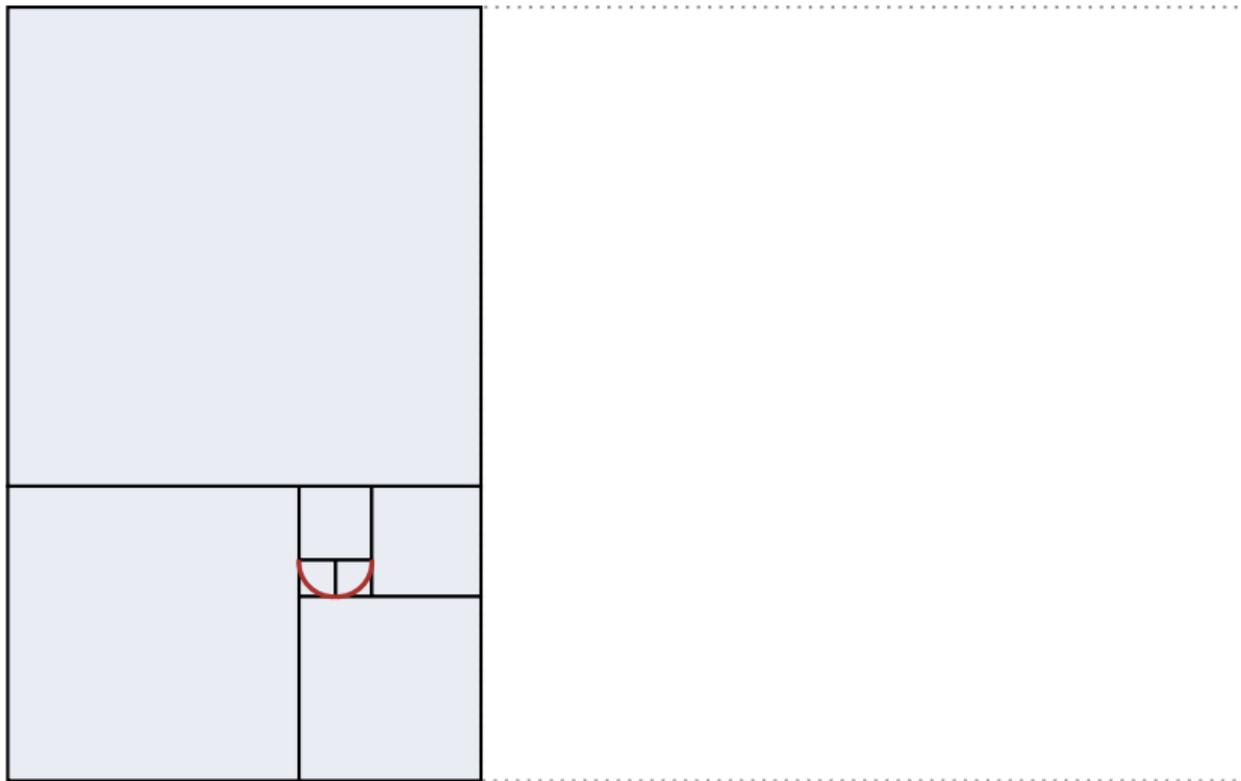
Fibonacci-Zahlen



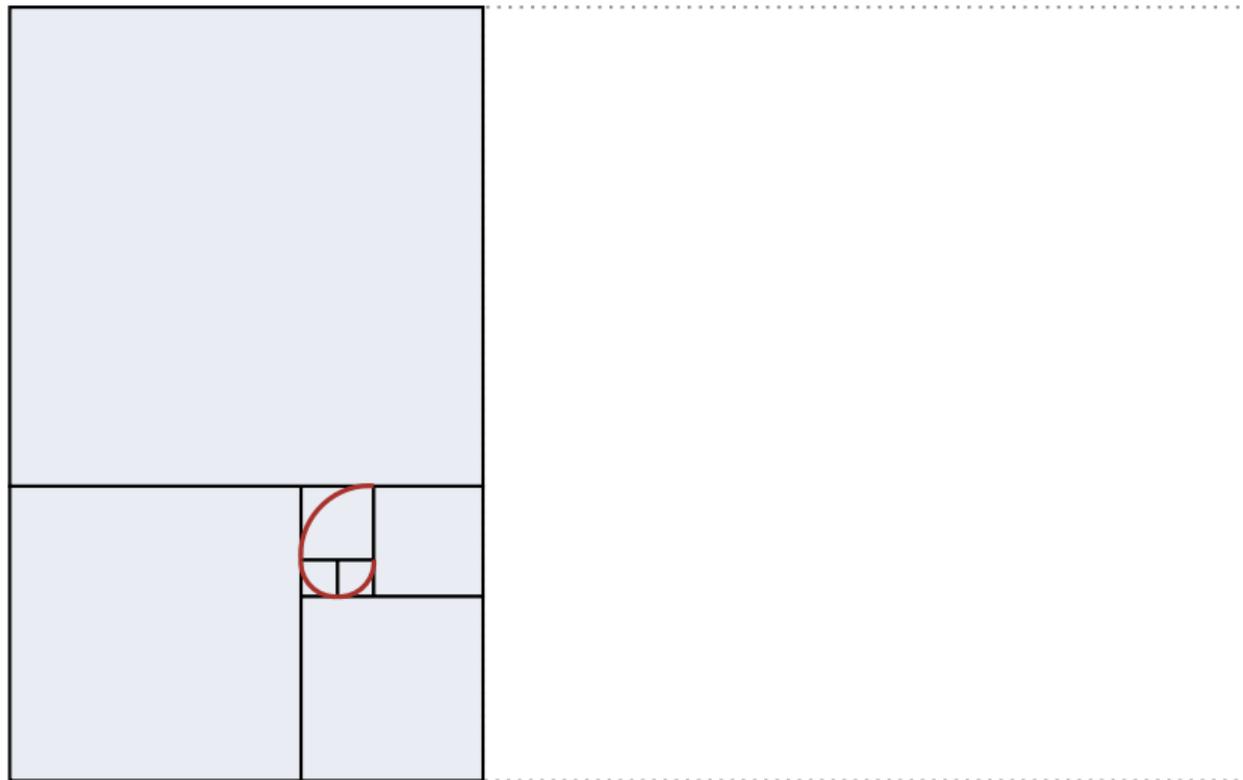
Fibonacci-Zahlen



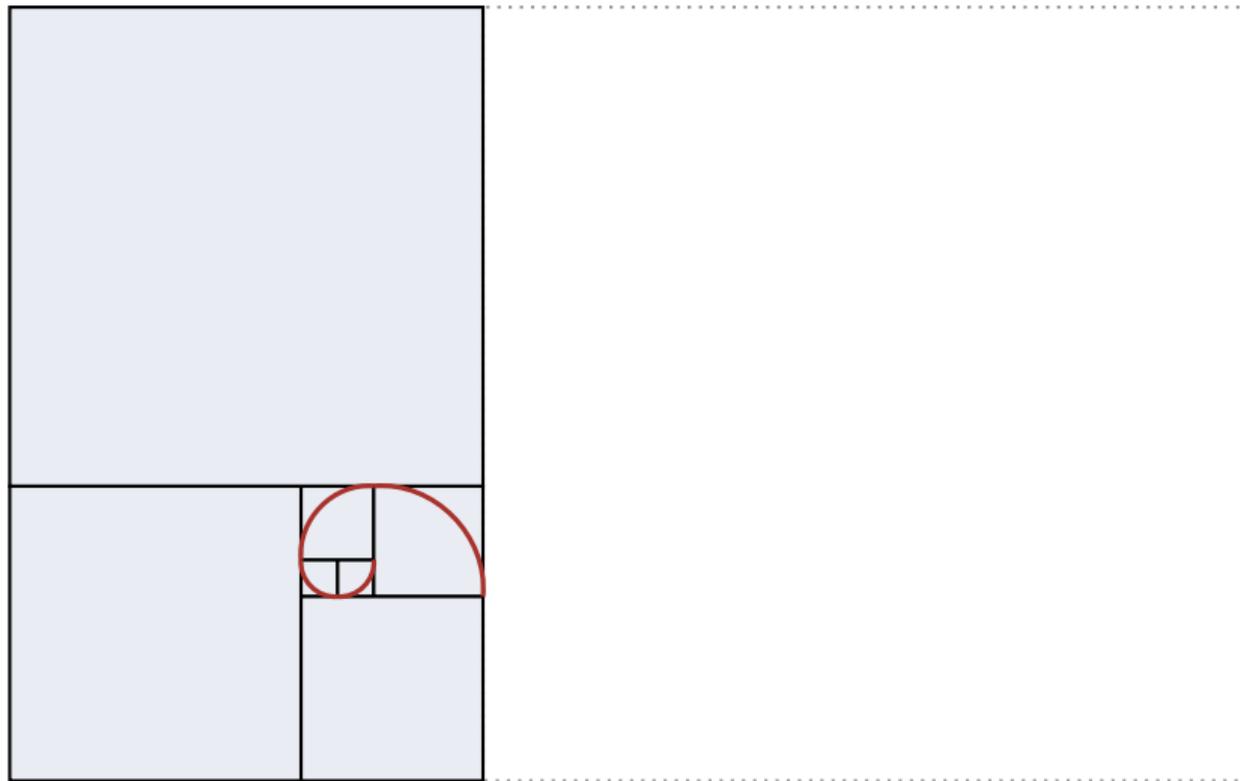
Fibonacci-Zahlen



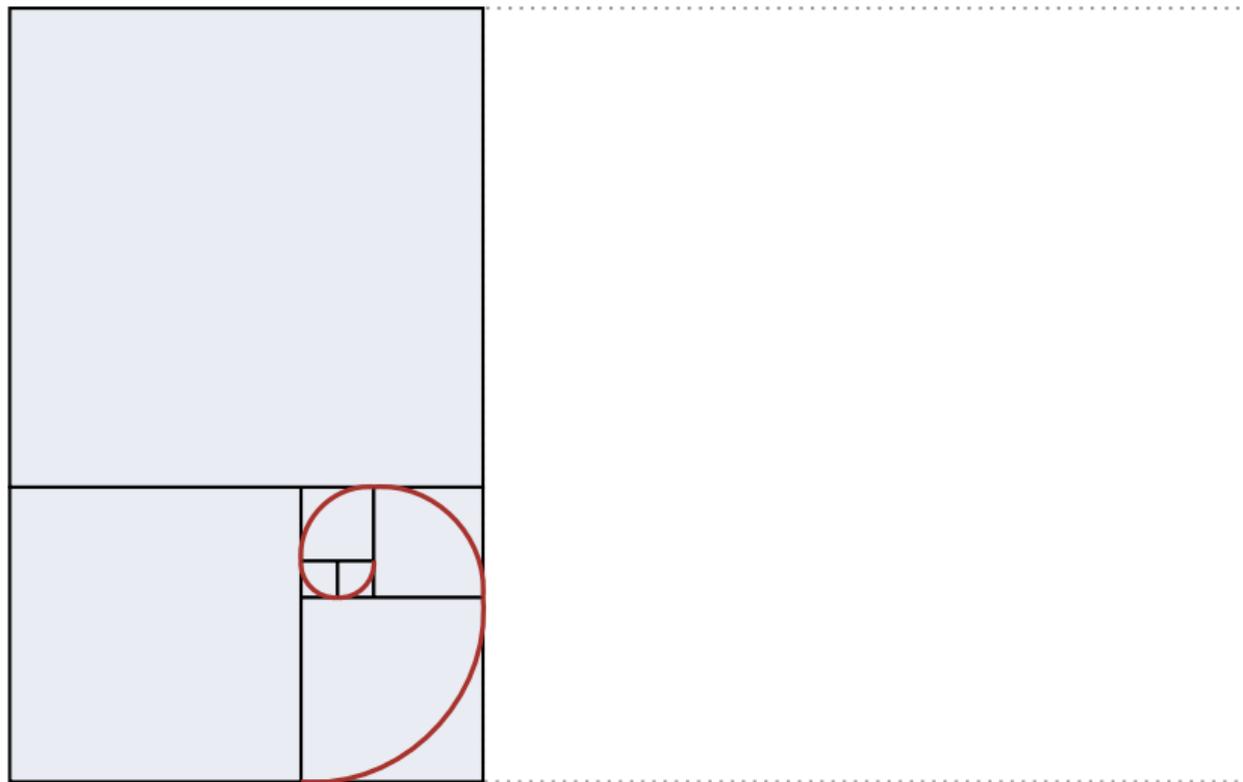
Fibonacci-Zahlen



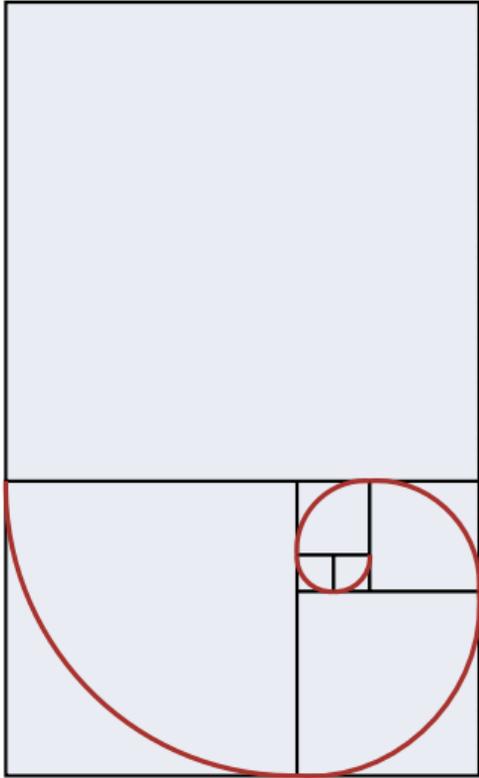
Fibonacci-Zahlen



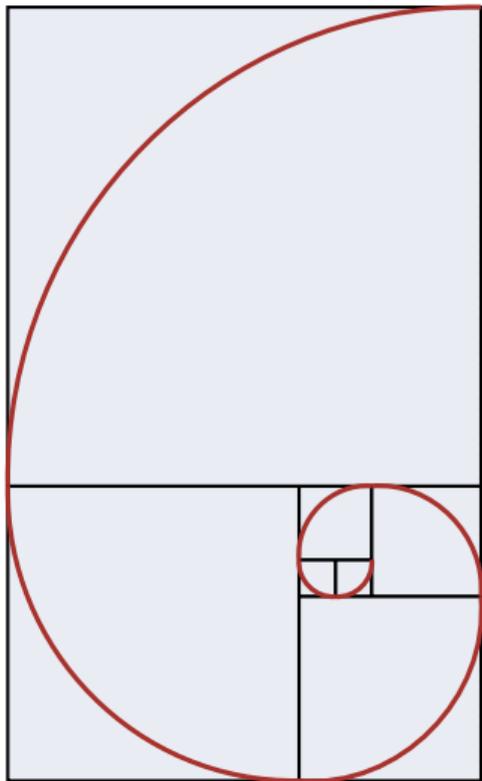
Fibonacci-Zahlen



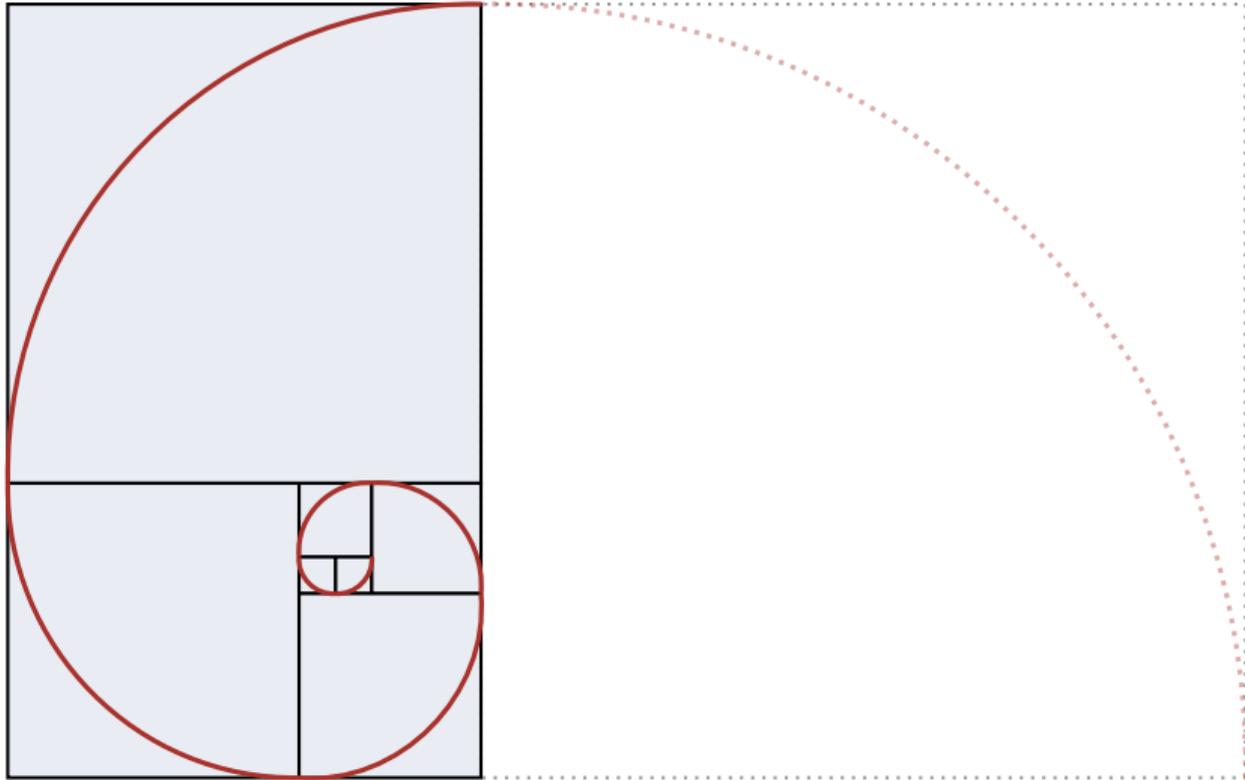
Fibonacci-Zahlen



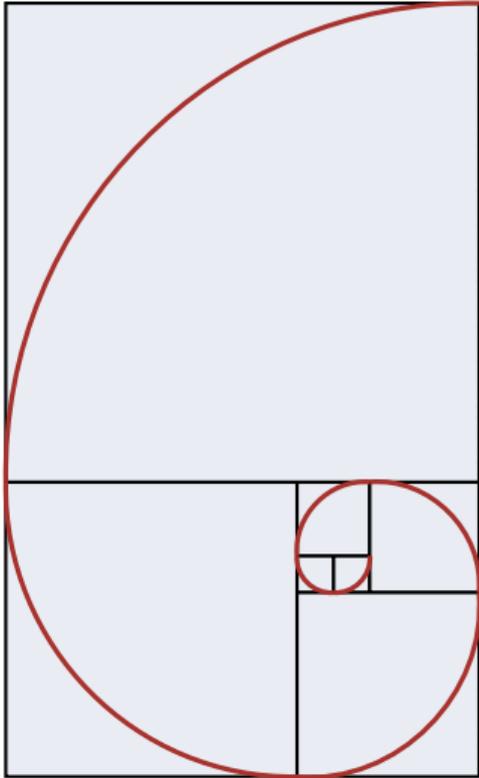
Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

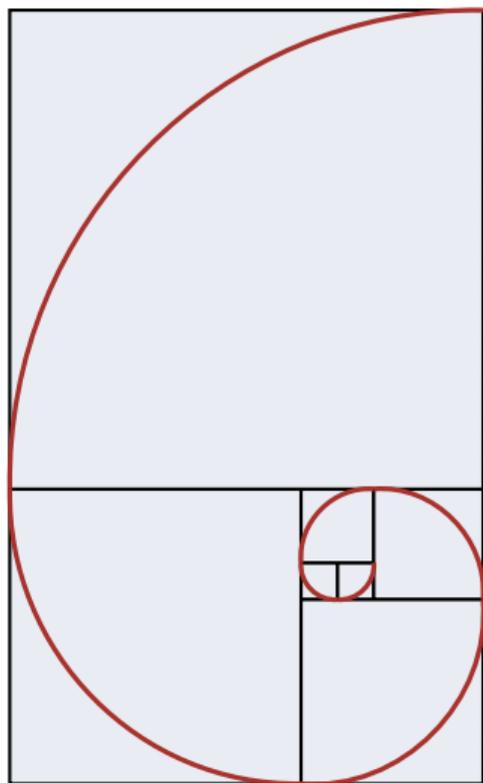


Fibonacci-Zahlen



- Die Berechnung kann wieder iterativ oder rekursiv erfolgen

Fibonacci-Zahlen



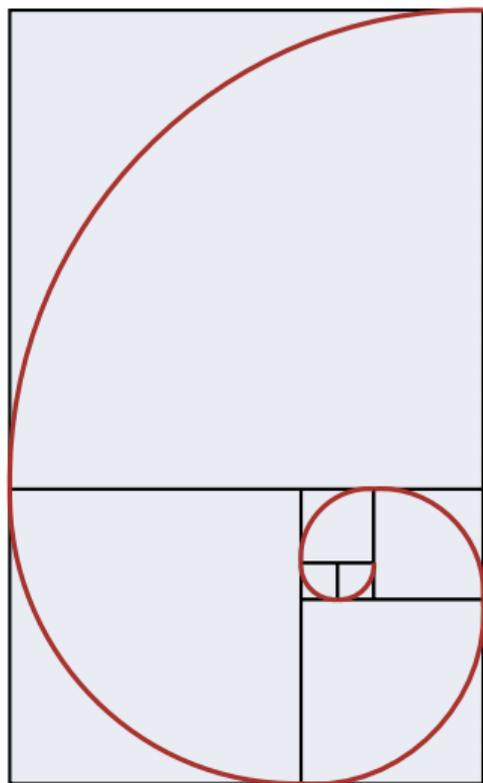
- Die Berechnung kann wieder iterativ oder rekursiv erfolgen
- Rekursiv definiert als

$$\text{fib}(1) = 1, \text{fib}(2) = 1$$

und

$$\text{fib}(n) = \text{fib}(n - 1) + \text{fib}(n - 2)$$

Fibonacci-Zahlen



- Die Berechnung kann wieder iterativ oder rekursiv erfolgen
- Rekursiv definiert als

$$\text{fib}(1) = 1, \text{fib}(2) = 1$$

und

$$\text{fib}(n) = \text{fib}(n - 1) + \text{fib}(n - 2)$$

- Kann direkt in Python umgesetzt werden

Aufgabe – Fibonacci-Zahlen rekursiv berechnen

Implementieren Sie eine rekursive Funktion, die

- einen Parameter n erhält
- und die n -te Fibonacci-Zahl zurückgibt

Geben Sie dann die ersten 20 Fibonacci-Zahlen aus



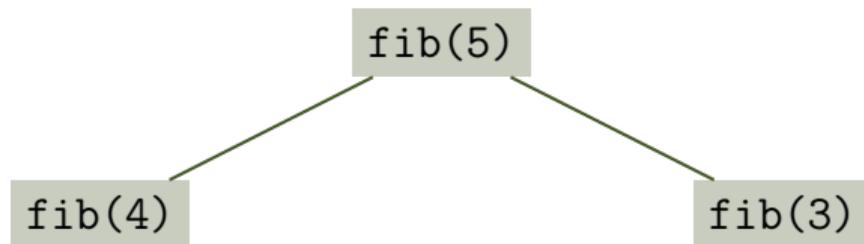
Fibonacci-Zahlen rekursiv berechnen

```
def fib(n):  
    if n == 1 or n == 2:  
        return 1  
    else:  
        return fib(n-1) + fib(n-2)  
  
for i in range(1, 21):  
    print(fib(i), end=" ")
```

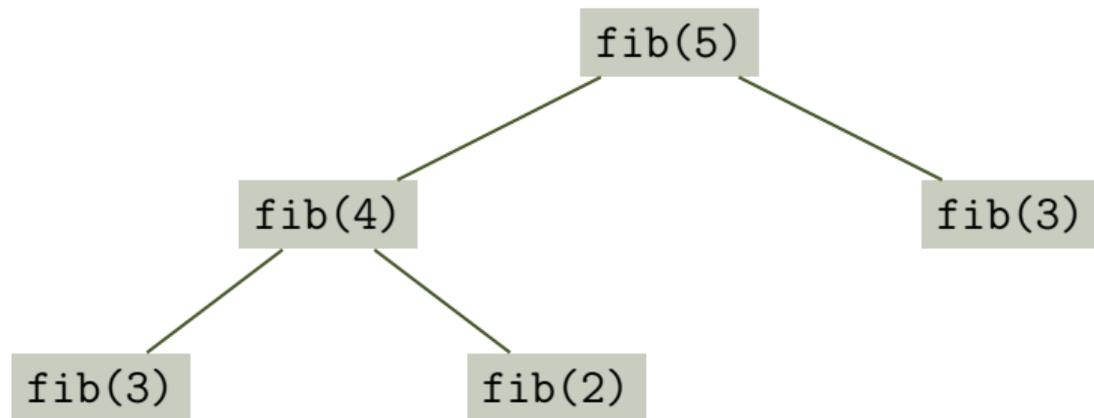
Fibonacci-Zahlen rekursiv berechnen

```
fib(5)
```

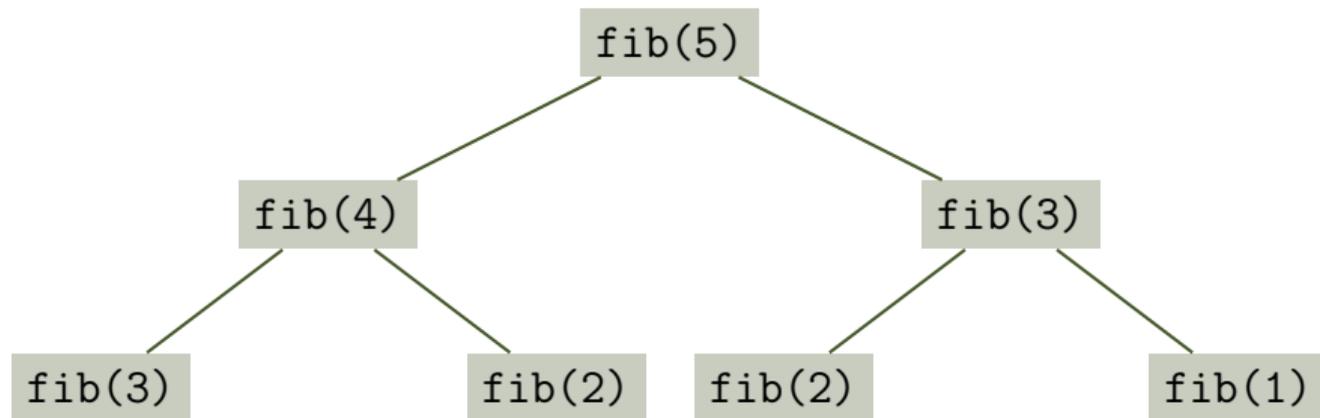
Fibonacci-Zahlen rekursiv berechnen



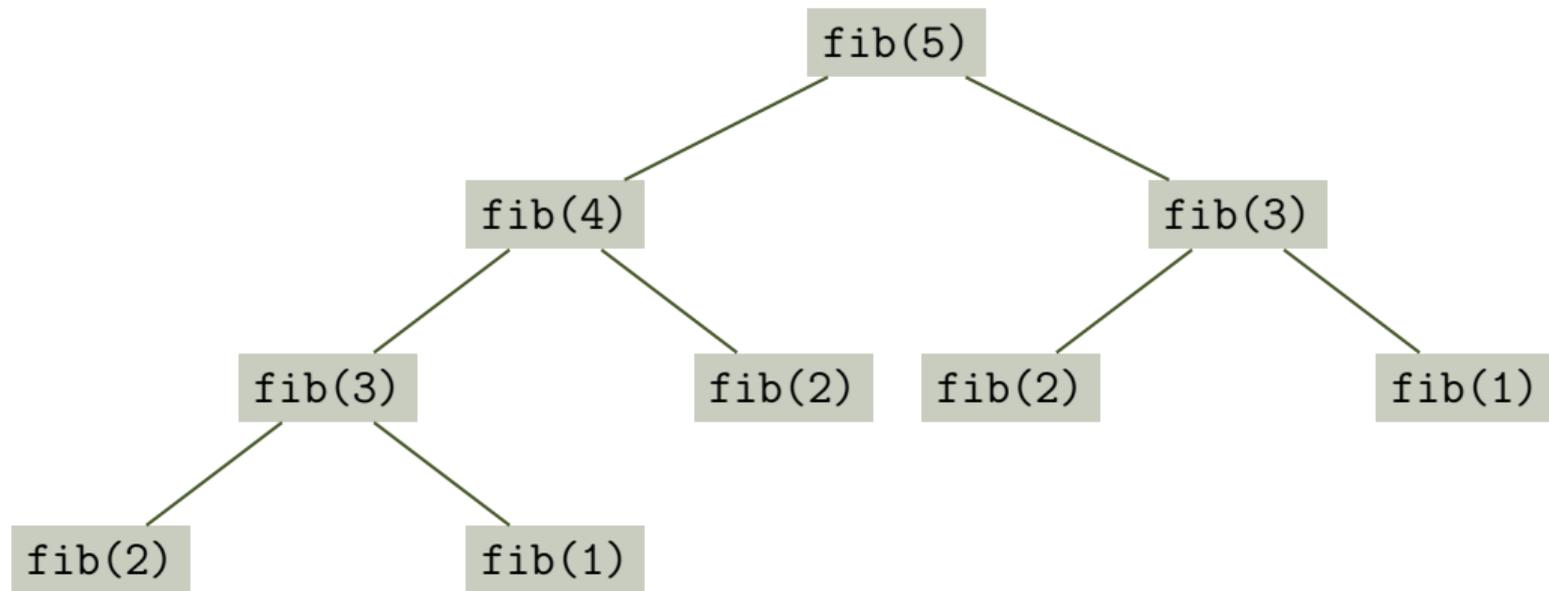
Fibonacci-Zahlen rekursiv berechnen



Fibonacci-Zahlen rekursiv berechnen

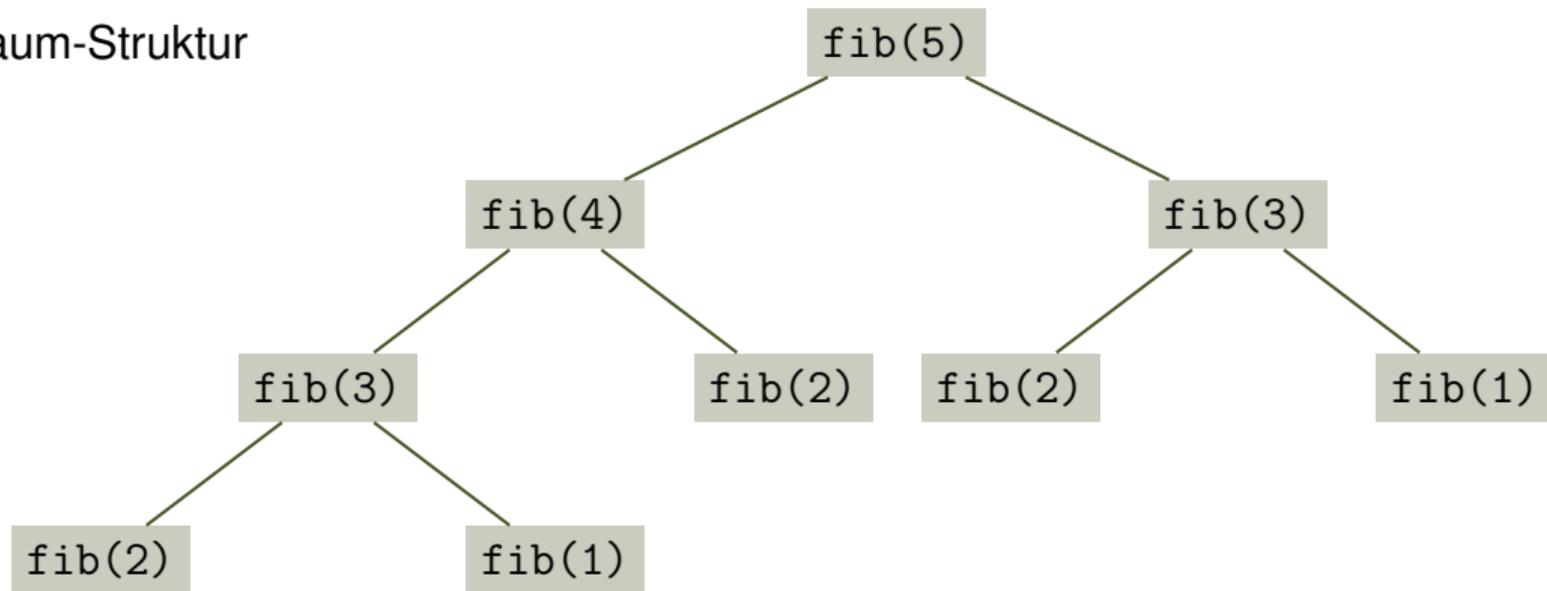


Fibonacci-Zahlen rekursiv berechnen



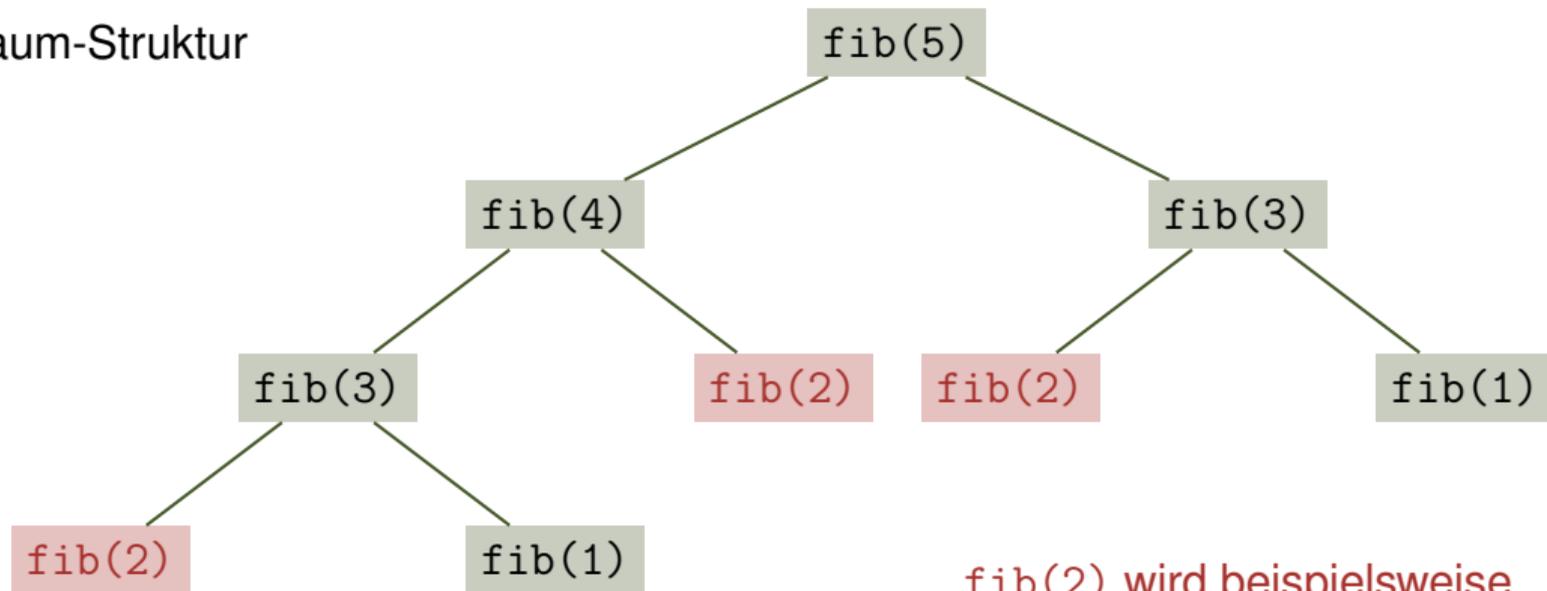
Fibonacci-Zahlen rekursiv berechnen

Baum-Struktur



Fibonacci-Zahlen rekursiv berechnen

Baum-Struktur



fib(2) wird beispielsweise
drei Mal aufgerufen

Memoization

Memoization

- Funktion `fib` wird wiederholt mit denselben Parameterwerten aufgerufen

Memoization

- Funktion `fib` wird wiederholt mit denselben Parameterwerten aufgerufen
- Rekursion ist hier sehr viel langsamer als Iteration

Memoization

- Funktion `fib` wird wiederholt mit denselben Parameterwerten aufgerufen
- Rekursion ist hier sehr viel langsamer als Iteration
- Dieses Problem gab es bei binärer Suche oder Fakultät nicht, da Aufrufe linear
- Bei Mergesort und Quicksort zwar auch Baumstruktur, aber disjunkte Aufrufe

Memoization

- Funktion `fib` wird wiederholt mit denselben Parameterwerten aufgerufen
 - Rekursion ist hier sehr viel langsamer als Iteration
 - Dieses Problem gab es bei binärer Suche oder Fakultät nicht, da Aufrufe linear
 - Bei Mergesort und Quicksort zwar auch Baumstruktur, aber disjunkte Aufrufe
- `fib(n)` ruft `fib(n-1)` und `fib(n-2)` auf
 - `fib(n-1)` ruft wieder `fib(n-2)` auf
 - `fib(n-2)` ruft beide Male wieder kompletten Teilbaum auf

Memoization

- Speichere einmal berechnete Werte, anstatt sie mehrfach zu berechnen

Memoization

- Speichere einmal berechnete Werte, anstatt sie mehrfach zu berechnen
- Jeder Funktionsaufruf schaut zunächst, ob Wert bereits berechnet wurde
 - Falls ja, wird der Wert nicht erneut berechnet
 - Falls nein, wird der Wert berechnet und gespeichert

Memoization

- Speichere einmal berechnete Werte, anstatt sie mehrfach zu berechnen
- Jeder Funktionsaufruf schaut zunächst, ob Wert bereits berechnet wurde
 - Falls ja, wird der Wert nicht erneut berechnet
 - Falls nein, wird der Wert berechnet und gespeichert
- Prinzip des Algorithmus bleibt sonst bestehen

Memoization

- Speichere einmal berechnete Werte, anstatt sie mehrfach zu berechnen
- Jeder Funktionsaufruf schaut zunächst, ob Wert bereits berechnet wurde
 - Falls ja, wird der Wert nicht erneut berechnet
 - Falls nein, wird der Wert berechnet und gespeichert
- Prinzip des Algorithmus bleibt sonst bestehen
- Speichere Werte in Dictionary
- Dieses kann eine globale Variable sein oder als Parameter übergeben werden

Aufgabe – Fibonacci-Zahlen mit Memoization

Implementieren Sie eine rekursive Funktion, die

- einen Parameter n erhält
- und die n -te Fibonacci-Zahl zurückgibt
- dabei ein globales Dictionary verwendet, um Memoization umzusetzen, und mit `in` nach dem entsprechenden Wert sucht

Geben Sie diesmal die ersten 200 Fibonacci-Zahlen aus



Fibonacci-Zahlen mit Memoization

```
memo = {1: 1, 2: 1}

def fib(n):
    if n in memo:
        return memo[n]
    else:
        memo[n] = fib(n-1) + fib(n-2)
        return memo[n]

for i in range(1, 201):
    print(fib(i))
```

Ähnlichkeit von DNA

Ähnlichkeit von DNA

Finde Methode zum Vergleich von DNA-Molekülen

Ähnlichkeit von DNA

Finde Methode zum Vergleich von DNA-Molekülen

- Suche in Genom- (oder Protein-) Datenbanken
- Erstellung von phylogenetischen Bäumen
- Teilproblem bei der DNA-Sequenzierung

Ähnlichkeit von DNA

Finde Methode zum Vergleich von DNA-Molekülen

- Suche in Genom- (oder Protein-) Datenbanken
 - Erstellung von phylogenetischen Bäumen
 - Teilproblem bei der DNA-Sequenzierung
-
- Finde geeignete Datenstruktur für die Moleküle
 - Definiere geeignetes Ähnlichkeitsmass
 - Entwirf einen möglichst effizienten Algorithmus zur Berechnung der Ähnlichkeit bezüglich dieses Masses

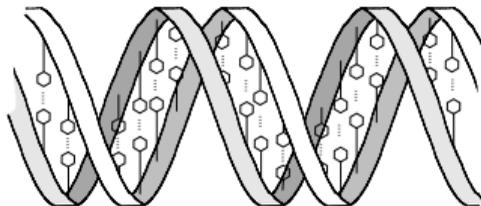
Darstellung als Strings

DNA sind lange, kettenförmige Moleküle, bestehend aus wenigen, sich oft wiederholten Grundbausteinen (Adenin, Thymin, Guanin, Cytosin)

Modellierung der Daten – Moleküle als Strings

Darstellung als Strings

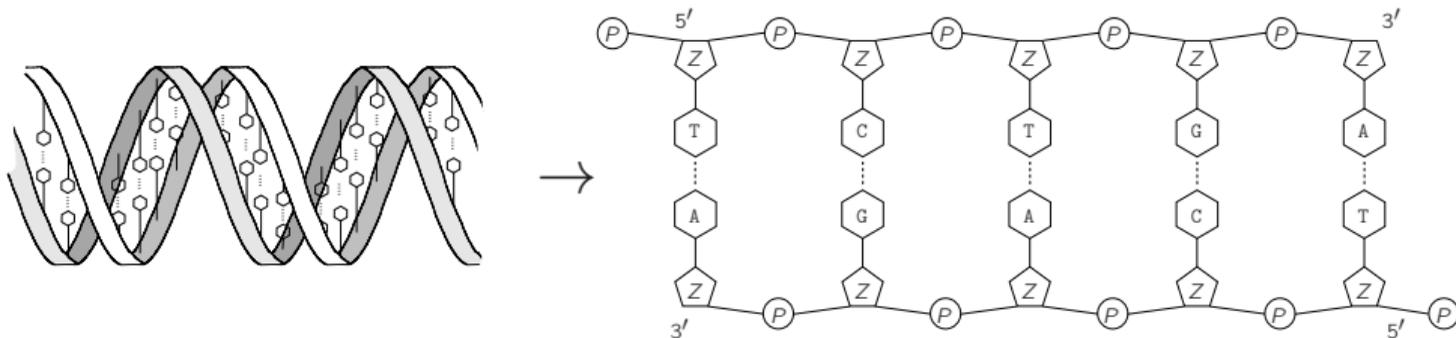
DNA sind lange, kettenförmige Moleküle, bestehend aus wenigen, sich oft wiederholten Grundbausteinen (Adenin, Thymin, Guanin, Cytosin)



Modellierung der Daten – Moleküle als Strings

Darstellung als Strings

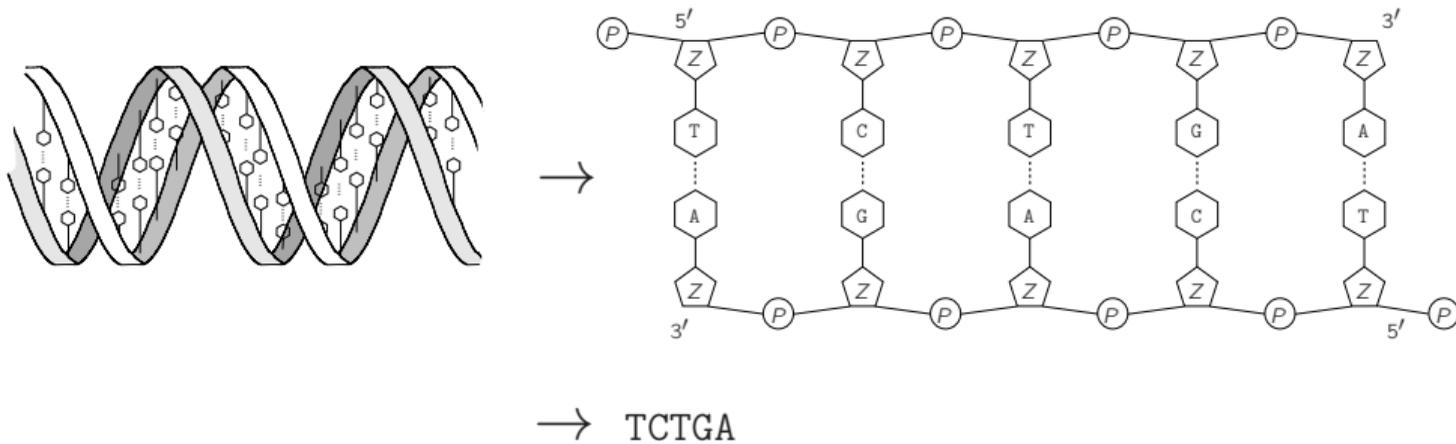
DNA sind lange, kettenförmige Moleküle, bestehend aus wenigen, sich oft wiederholten Grundbausteinen (Adenin, Thymin, Guanin, Cytosin)



Modellierung der Daten – Moleküle als Strings

Darstellung als Strings

DNA sind lange, kettenförmige Moleküle, bestehend aus wenigen, sich oft wiederholten Grundbausteinen (Adenin, Thymin, Guanin, Cytosin)



Alignments – Ähnlichkeitsmass

Ähnlichkeitsmass soll **häufige Veränderungen** in DNA-Sequenzen widerspiegeln

- Austausch einzelner Basen oder Aminosäuren
- Einfügen oder Löschen kurzer Teilsequenzen

Alignments – Ähnlichkeitsmass

Ähnlichkeitsmass soll **häufige Veränderungen** in DNA-Sequenzen widerspiegeln

- Austausch einzelner Basen oder Aminosäuren
- Einfügen oder Löschen kurzer Teilsequenzen

Alignments: Schreibe beide Strings buchstabenweise untereinander, füge dabei an beliebigen Stellen Lückensymbole ein

Alignments – Ähnlichkeitsmass

Ähnlichkeitsmass soll **häufige Veränderungen** in DNA-Sequenzen widerspiegeln

- Austausch einzelner Basen oder Aminosäuren
- Einfügen oder Löschen kurzer Teilsequenzen

Alignments: Schreibe beide Strings buchstabenweise untereinander, füge dabei an beliebigen Stellen Lückensymbole ein

Eingabe: Strings $s = \text{GACGATTATG}$ und $t = \text{GATCGAATAG}$

Alignments – Ähnlichkeitsmass

Ähnlichkeitsmass soll **häufige Veränderungen** in DNA-Sequenzen widerspiegeln

- Austausch einzelner Basen oder Aminosäuren
- Einfügen oder Löschen kurzer Teilsequenzen

Alignments: Schreibe beide Strings buchstabenweise untereinander, füge dabei an beliebigen Stellen Lückensymbole ein

Eingabe: Strings $s = \text{GACGATTATG}$ und $t = \text{GATCGAATAG}$

Mögliche Alignments

Alignments – Ähnlichkeitsmass

Ähnlichkeitsmass soll **häufige Veränderungen** in DNA-Sequenzen widerspiegeln

- Austausch einzelner Basen oder Aminosäuren
- Einfügen oder Löschen kurzer Teilsequenzen

Alignments: Schreibe beide Strings buchstabenweise untereinander, füge dabei an beliebigen Stellen Lückensymbole ein

Eingabe: Strings $s = \text{GACGATTATG}$ und $t = \text{GATCGAATAG}$

Mögliche Alignments

$s' = \text{GA-CGATTATG}$

$t' = \text{GATCGAATA-G}$

Alignments – Ähnlichkeitsmass

Ähnlichkeitsmass soll **häufige Veränderungen** in DNA-Sequenzen widerspiegeln

- Austausch einzelner Basen oder Aminosäuren
- Einfügen oder Löschen kurzer Teilsequenzen

Alignments: Schreibe beide Strings buchstabenweise untereinander, füge dabei an beliebigen Stellen Lückensymbole ein

Eingabe: Strings $s = \text{GACGATTATG}$ und $t = \text{GATCGAATAG}$

Mögliche Alignments

$s' = \text{GA-CGATTATG}$ $s'' = \text{GAC-GATTATG}$

$t' = \text{GATCGAATA-G}$ $t'' = \text{GATCGAATAG-}$

Alignments – Ähnlichkeitsmass

Ähnlichkeitsmass soll **häufige Veränderungen** in DNA-Sequenzen widerspiegeln

- Austausch einzelner Basen oder Aminosäuren
- Einfügen oder Löschen kurzer Teilsequenzen

Alignments: Schreibe beide Strings buchstabenweise untereinander, füge dabei an beliebigen Stellen Lückensymbole ein

Eingabe: Strings $s = \text{GACGATTATG}$ und $t = \text{GATCGAATAG}$

Mögliche Alignments

$s' = \text{GA-CGATTATG}$ $s'' = \text{GAC-GATTATG}$ $s''' = \text{GACGAT-TA-TG}$
 $t' = \text{GATCGAATA-G}$ $t'' = \text{GATCGAATAG-}$ $t''' = \text{-GATCGAATAG-}$

Alignments – Ähnlichkeitsmass

Ähnlichkeitsmass soll **häufige Veränderungen** in DNA-Sequenzen widerspiegeln

- Austausch einzelner Basen oder Aminosäuren
- Einfügen oder Löschen kurzer Teilsequenzen

Alignments: Schreibe beide Strings buchstabenweise untereinander, füge dabei an beliebigen Stellen Lückensymbole ein

Eingabe: Strings $s = \text{GACGATTATG}$ und $t = \text{GATCGAATAG}$

Mögliche Alignments

$$\begin{array}{lll} s' = \text{GA-CGATTATG} & s'' = \text{GAC-GATTATG} & s''' = \text{GACGAT-TA-TG} \\ t' = \text{GATCGAATA-G} & t'' = \text{GATCGAATAG-} & t''' = \text{-GATCGAATAG-} \end{array}$$

Spalten bestehend aus zwei Lücken sind sinnlos, kommen also nicht vor

Idee zur Bewertung

- Alignment spaltenweise bewerten, dann über alle Spalten aufsummieren

Idee zur Bewertung

- Alignment spaltenweise bewerten, dann über alle Spalten aufsummieren
- Spalte mit Lücke erhält Kosten („penalty“) g
- Spalte mit Buchstaben a und b erhält Kosten $p(a, b)$
- $p(a, b)$ ist Null für $a = b$ und gross für $a \neq b$

Idee zur Bewertung

- Alignment spaltenweise bewerten, dann über alle Spalten aufsummieren
- Spalte mit Lücke erhält Kosten („penalty“) g
- Spalte mit Buchstaben a und b erhält Kosten $p(a, b)$
- $p(a, b)$ ist Null für $a = b$ und gross für $a \neq b$
- **Ziel:** Minimiere die Kosten
- Beispiel für Bewertung: **Edit-Distanz**

Levenshtein, 1966

Zähle Mismatches und Lücken, d. h.

- $g = 1$
- $p(a, a) = 0$ und
- $p(a, b) = 1$ für $a \neq b$

Levenshtein, 1966

Zähle Mismatches und Lücken, d. h.

- $g = 1$
- $p(a, a) = 0$ und
- $p(a, b) = 1$ für $a \neq b$

Eingabe: Strings $s = \text{GACGATTATG}$ und $t = \text{GATCGAATAG}$

Mögliche Alignments

Levenshtein, 1966

Zähle Mismatches und Lücken, d. h.

- $g = 1$
- $p(a, a) = 0$ und
- $p(a, b) = 1$ für $a \neq b$

Eingabe: Strings $s = \text{GACGATTATG}$ und $t = \text{GATCGAATAG}$

Mögliche Alignments

$s' = \text{GA-CGATTATG}$

$t' = \text{GATCGAATA-G}$

Edit-Distanz

Levenshtein, 1966

Zähle Mismatches und Lücken, d. h.

- $g = 1$
- $p(a, a) = 0$ und
- $p(a, b) = 1$ für $a \neq b$

Eingabe: Strings $s = \text{GACGATTATG}$ und $t = \text{GATCGAATAG}$

Mögliche Alignments

$s' = \text{GA-CGATTATG}$ $s'' = \text{GAC-GATTATG}$

$t' = \text{GATCGAATA-G}$ $t'' = \text{GATCGAATAG-}$

Edit-Distanz

Levenshtein, 1966

Zähle Mismatches und Lücken, d. h.

- $g = 1$
- $p(a, a) = 0$ und
- $p(a, b) = 1$ für $a \neq b$

Eingabe: Strings $s = \text{GACGATTATG}$ und $t = \text{GATCGAATAG}$

Mögliche Alignments

$s' = \text{GA-CGATTATG}$ $s'' = \text{GAC-GATTATG}$ $s''' = \text{GACGAT-TA-TG}$
 $t' = \text{GATCGAATA-G}$ $t'' = \text{GATCGAATAG-}$ $t''' = \text{-GATCGAATAG-}$

Edit-Distanz

Levenshtein, 1966

Zähle Mismatches und Lücken, d. h.

- $g = 1$
- $p(a, a) = 0$ und
- $p(a, b) = 1$ für $a \neq b$

Eingabe: Strings $s = \text{GACGATTATG}$ und $t = \text{GATCGAATAG}$

Mögliche Alignments

$s' = \text{GA-CGATTATG}$ $s'' = \text{GAC-GATTATG}$ $s''' = \text{GACGAT- - -TA-TG}$
 $t' = \text{GATCGAATA-G}$ $t'' = \text{GATCGAATAG-}$ $t''' = \text{- -GATCGAATAG-}$

Edit-Distanz: $d_{\text{edit}}(s', t') = 3$ $d_{\text{edit}}(s'', t'') = 5$ $d_{\text{edit}}(s''', t''') = 10$

Vollständige Suche

- **Frage:** Wie kann man ein optimales Alignment finden?

Vollständige Suche

- **Frage:** Wie kann man ein optimales Alignment finden?
- **Idee:** Probiere alle möglichen Alignments durch

Vollständige Suche

- **Frage:** Wie kann man ein optimales Alignment finden?
- **Idee:** Probiere alle möglichen Alignments durch
- **Problem:** Dies sind zu viele

Seien s und t zwei Strings der Länge n .

Dann gibt es **mehr als 3^n** mögliche Alignments von s und t .

Vollständige Suche

- **Frage:** Wie kann man ein optimales Alignment finden?
- **Idee:** Probiere alle möglichen Alignments durch
- **Problem:** Dies sind zu viele

Seien s und t zwei Strings der Länge n .

Dann gibt es **mehr als 3^n** mögliche Alignments von s und t .

- Alignment ist eindeutig bestimmt durch die Position der eingefügten Lücken
- **Beispiel für $n = 3$**

Vollständige Suche

- **Frage:** Wie kann man ein optimales Alignment finden?
- **Idee:** Probiere alle möglichen Alignments durch
- **Problem:** Dies sind zu viele

Seien s und t zwei Strings der Länge n .

Dann gibt es **mehr als 3^n** mögliche Alignments von s und t .

- Alignment ist eindeutig bestimmt durch die Position der eingefügten Lücken
- **Beispiel für $n = 3$**

$$\begin{array}{c} s_1 \quad - \quad | \quad - \quad s_2 \quad | \quad s_3 \\ - \quad t_1 \quad | \quad t_2 \quad - \quad | \quad t_3 \end{array}$$

Exponentielle Laufzeit

n	10	50	100	300	10 000
$10n$	100	500	1 000	3 000	100 000
$3n^2$	300	7 500	30 000	270 000	300 000 000
n^3	1 000	125 000	1 000 000	27 000 000	13 Ziffern
3^n	59 049	24 Ziffern	48 Ziffern	143 Ziffern	4 772 Ziffern

Exponentielle Laufzeit

n	10	50	100	300	10 000
$10n$	100	500	1 000	3 000	100 000
$3n^2$	300	7 500	30 000	270 000	300 000 000
n^3	1 000	125 000	1 000 000	27 000 000	13 Ziffern
3^n	59 049	24 Ziffern	48 Ziffern	143 Ziffern	4 772 Ziffern

Exponentielle Laufzeit

n	10	50	100	300	10 000
$10n$	100	500	1 000	3 000	100 000
$3n^2$	300	7 500	30 000	270 000	300 000 000
n^3	1 000	125 000	1 000 000	27 000 000	13 Ziffern
3^n	59 049	24 Ziffern	48 Ziffern	143 Ziffern	4 772 Ziffern

- Vollständige Suche ist viel zu langsam

Exponentielle Laufzeit

n	10	50	100	300	10 000
$10n$	100	500	1 000	3 000	100 000
$3n^2$	300	7 500	30 000	270 000	300 000 000
n^3	1 000	125 000	1 000 000	27 000 000	13 Ziffern
3^n	59 049	24 Ziffern	48 Ziffern	143 Ziffern	4 772 Ziffern

- Vollständige Suche ist viel zu langsam
- **Dynamische Programmierung**

Dynamische Programmierung

Der Algorithmus von Needleman und Wunsch

Dynamische Programmierung

Lösung für gesamte Eingabe zusammensetzen aus Teillösungen für Teilprobleme, beginnend mit kleinsten Teilproblemen

Dynamische Programmierung

Lösung für gesamte Eingabe zusammensetzen aus Teillösungen für Teilprobleme, beginnend mit kleinsten Teilproblemen

- Teillösungen werden gespeichert und (wiederholt) wiederverwendet
- Verwende Tabelle

Dynamische Programmierung

Lösung für gesamte Eingabe zusammensetzen aus Teillösungen für Teilprobleme, beginnend mit kleinsten Teilproblemen

- Teillösungen werden gespeichert und (wiederholt) wiederverwendet
- Verwende Tabelle
- Memoization ist eng verwandt mit dynamischer Programmierung

Dynamische Programmierung

Lösung für gesamte Eingabe zusammensetzen aus Teillösungen für Teilprobleme, beginnend mit kleinsten Teilproblemen

- Teillösungen werden gespeichert und (wiederholt) wiederverwendet
- Verwende Tabelle
- Memoization ist eng verwandt mit dynamischer Programmierung
- Ähnlich zu Divide-and-Conquer, aber versucht, Rekursion zu vermeiden
- Bottom-Up statt Top-Down

Dynamische Programmierung

Lösung für gesamte Eingabe zusammensetzen aus Teillösungen für Teilprobleme, beginnend mit kleinsten Teilproblemen

- Teillösungen werden gespeichert und (wiederholt) wiederverwendet
- Verwende Tabelle
- Memoization ist eng verwandt mit dynamischer Programmierung
- Ähnlich zu Divide-and-Conquer, aber versucht, Rekursion zu vermeiden
- Bottom-Up statt Top-Down
- **Optimalitätsprinzip von Bellman:** Optimale Lösung kann aus optimalen Lösungen für Teilprobleme zusammengesetzt werden

Dynamische Programmierung

Ob DP verwendet werden kann, hängt davon ab, ob Teilprobleme definiert werden können, für die das Optimalitätsprinzip von Bellman gilt

Dynamische Programmierung

Ob DP verwendet werden kann, hängt davon ab, ob Teilprobleme definiert werden können, für die das Optimalitätsprinzip von Bellman gilt

Der wesentliche Punkt ist also, Teilprobleme geschickt zu definieren

Dynamische Programmierung

Ob DP verwendet werden kann, hängt davon ab, ob Teilprobleme definiert werden können, für die das Optimalitätsprinzip von Bellman gilt

Der wesentliche Punkt ist also, Teilprobleme geschickt zu definieren

Needleman und Wunsch, 1970

- Alle Paare von Anfangsstücken (Präfixen) der gegebenen Strings als Teilprobleme
- Berechne Alignments für längere Präfixe aus den optimalen Alignments für kürzere Präfixe

Beispiel für das Alignment von Präfixen

Berechne optimales Alignment von $s = \text{ATG}$ und $t = \text{TAG}$

Beispiel für das Alignment von Präfixen

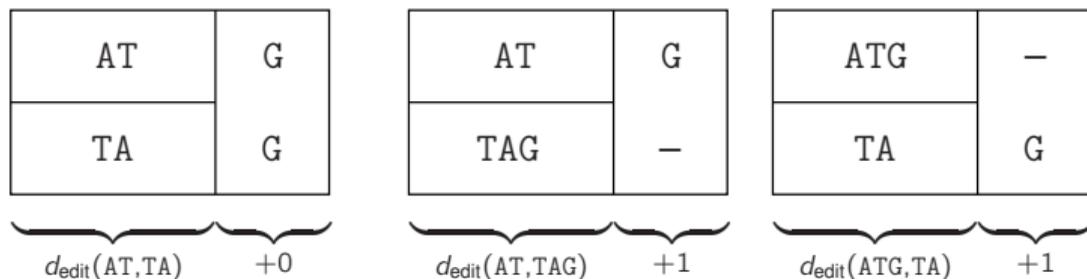
Berechne optimales Alignment von $s = \text{ATG}$ und $t = \text{TAG}$

Unterscheide **drei Fälle** bezüglich der letzten Spalte

Beispiel für das Alignment von Präfixen

Berechne optimales Alignment von $s = \text{ATG}$ und $t = \text{TAG}$

Unterscheide **drei Fälle** bezüglich der letzten Spalte

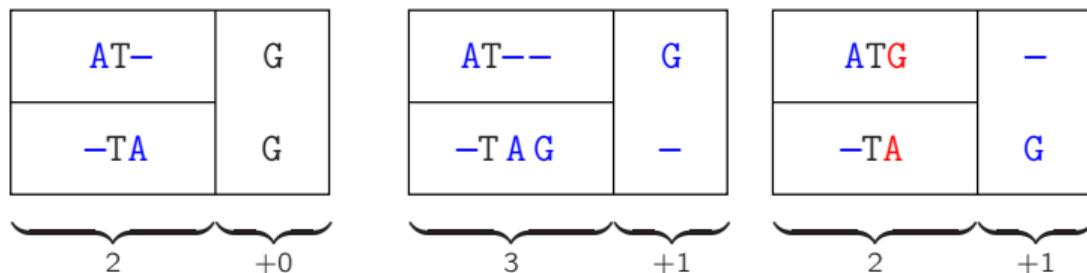


Berechnung von $d_{\text{edit}}(\text{ATG}, \text{TAG})$ wird zurückgeführt auf Berechnung der Edit-Distanz für drei Paare von Präfixen

Beispiel für das Alignment von Präfixen

Berechne optimales Alignment von $s = \text{ATG}$ und $t = \text{TAG}$

Unterscheide **drei Fälle** bezüglich der letzten Spalte

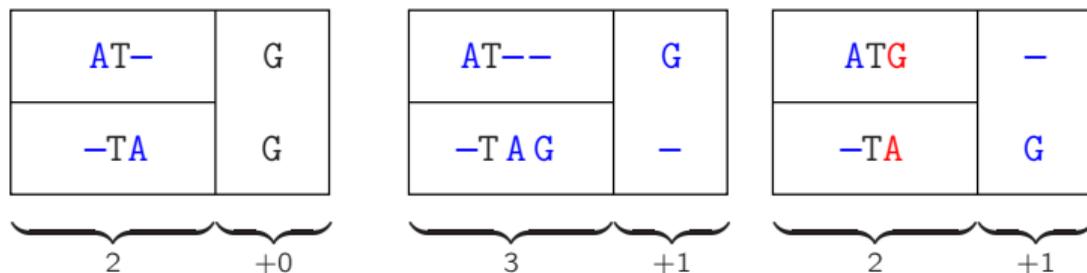


Berechnung von $d_{\text{edit}}(\text{ATG}, \text{TAG})$ wird zurückgeführt auf Berechnung der Edit-Distanz für drei Paare von Präfixen

Beispiel für das Alignment von Präfixen

Berechne optimales Alignment von $s = \text{ATG}$ und $t = \text{TAG}$

Unterscheide **drei Fälle** bezüglich der letzten Spalte



Optimales Alignment mit Edit-Distanz $d_{\text{edit}}(s', t') = 2$:

$$s' = \text{AT-G}$$

$$t' = \text{-TAG}$$

Initialisierung der Kosten-Tabelle

- Der **leere String** λ ist ein String der Länge 0
- Er ist Präfix von jedem anderen String

Initialisierung der Kosten-Tabelle

- Der **leere String** λ ist ein String der Länge 0
- Er ist Präfix von jedem anderen String

Initialisierung

Alignment eines nichtleeren Präfixes mit λ ist eindeutig

$$\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & \dots & s_i \\ - & - & \dots & - \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{cccc} - & - & \dots & - \\ t_1 & t_2 & \dots & t_i \end{array}$$

Initialisierung der Kosten-Tabelle

- Der **leere String** λ ist ein String der Länge 0
- Er ist Präfix von jedem anderen String

Initialisierung

Alignment eines nichtleeren Präfixes mit λ ist eindeutig

$$\begin{array}{c} s_1 \ s_2 \ \dots \ s_i \\ - \ - \ \dots \ - \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} - \ - \ \dots \ - \\ t_1 \ t_2 \ \dots \ t_i \end{array}$$

Kosten: $d_{\text{edit}}(s_1 \dots s_i, \lambda) = d_{\text{edit}}(\lambda, t_1 \dots t_i) = i$

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0					
A ₁					
C ₂					
T ₃					
T ₄					
G ₅					

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1				
C ₂	2				
T ₃	3				
T ₄	4				
G ₅	5				

Initialisierung

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1				
C ₂	2				
T ₃	3				
T ₄	4				
G ₅	5				

Lücke in t einfügen

$$\begin{array}{c|c}
 \lambda & A \\
 \underbrace{C} & \underbrace{-} \\
 d_{\text{edit}}(\lambda, t_1) & +1
 \end{array}$$

Berechne $d_{\text{edit}}(s_1, t_1)$:

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1				
C ₂	2				
T ₃	3				
T ₄	4				
G ₅	5				

Lücke in t einfügen

$$\underbrace{\begin{array}{c} \lambda \\ C \end{array}}_{d_{\text{edit}}(\lambda, t_1)} \quad \left| \quad \underbrace{\begin{array}{c} A \\ - \\ +1 \end{array}}$$

Lücke in s einfügen

$$\underbrace{\begin{array}{c} A \\ \lambda \end{array}}_{d_{\text{edit}}(s_1, \lambda)} \quad \left| \quad \underbrace{\begin{array}{c} - \\ C \\ +1 \end{array}}$$

Berechne $d_{\text{edit}}(s_1, t_1)$:

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1				
C ₂	2				
T ₃	3				
T ₄	4				
G ₅	5				

Red arrows in the table indicate transitions from (0,1) to (1,1) with a cost of +1, and from (1,1) to (1,2) with a cost of +1.

Berechne $d_{\text{edit}}(s_1, t_1)$:

Lücke in t einfügen

$$\underbrace{\begin{array}{c} \lambda \\ C \end{array}}_{d_{\text{edit}}(\lambda, t_1)} \quad \left| \quad \underbrace{\begin{array}{c} A \\ - \\ +1 \end{array}}\right.$$

Lücke in s einfügen

$$\underbrace{\begin{array}{c} A \\ \lambda \end{array}}_{d_{\text{edit}}(s_1, \lambda)} \quad \left| \quad \underbrace{\begin{array}{c} - \\ C \\ +1 \end{array}}\right.$$

Mismatch einfügen

$$\underbrace{\begin{array}{c} \lambda \\ \lambda \end{array}}_{d_{\text{edit}}(\lambda, \lambda)} \quad \left| \quad \underbrace{\begin{array}{c} A \\ C \\ +1 \end{array}}\right.$$

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1	1			
C ₂	2				
T ₃	3				
T ₄	4				
G ₅	5				

Red arrows and '+1' labels indicate the calculation of the cell (1,1) from its neighbors: (0,0), (0,1), and (1,0).

Berechne $d_{\text{edit}}(s_1, t_1)$:

Lücke in t einfügen

$$\underbrace{\begin{array}{c} \lambda \\ C \end{array}}_{d_{\text{edit}}(\lambda, t_1)} \quad \left| \quad \underbrace{\begin{array}{c} A \\ - \end{array}}_{+1}$$

Lücke in s einfügen

$$\underbrace{\begin{array}{c} A \\ \lambda \end{array}}_{d_{\text{edit}}(s_1, \lambda)} \quad \left| \quad \underbrace{\begin{array}{c} - \\ C \end{array}}_{+1}$$

Mismatch einfügen

$$\underbrace{\begin{array}{c} \lambda \\ \lambda \end{array}}_{d_{\text{edit}}(\lambda, \lambda)} \quad \left| \quad \underbrace{\begin{array}{c} A \\ C \end{array}}_{+1}$$

Minimum bilden

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1	1			
C ₂	2				
T ₃	3				
T ₄	4				
G ₅	5				

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1	1			
C ₂	2	1			
T ₃	3				
T ₄	4				
G ₅	5				

Berechne $d_{\text{edit}}(s_2, t_1)$

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1	1			
C ₂	2	1			
T ₃	3				
T ₄	4				
G ₅	5				

Berechne $d_{\text{edit}}(s_2, t_1)$

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1	1			
C ₂	2	1			
T ₃	3	2			
T ₄	4	3			
G ₅	5	4			

Berechne den Rest von Spalte 1

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1	1	2	3	4
C ₂	2	1	1	2	3
T ₃	3	2	2	1	2
T ₄	4	3	3	2	2
G ₅	5	4	4	3	2

Berechne den Rest der Tabelle

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1	1	2	3	4
C ₂	2	1	1	2	3
T ₃	3	2	2	1	2
T ₄	4	3	3	2	2
G ₅	5	4	4	3	2

$$d_{\text{edit}}(s, t) = 2$$

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

$s \backslash t$	0	1	...	$j-1$	j	...	n
0							
1							
2							
\vdots							
$i-1$							
i							
\vdots							
m							

- ↓ Lücke in t Fall 1
- Lücke in s Fall 2
- ↘ Match bzw. Mismatch Fall 3

Ausfüllen der Kosten-Tabelle

$s \backslash t$	0	1	...	$j-1$	j	...	n
0							
1							
2							
\vdots							
$i-1$							
i							
\vdots							
m							

- ↓ Lücke in t Fall 1
- Lücke in s Fall 2
- ↘ Match bzw. Mismatch Fall 3

$$d_{\text{edit}}(s_1 \dots s_i, t_1 \dots t_j) = \min \{ d_{\text{edit}}(s_1 \dots s_{i-1}, t_1 \dots t_j) + 1, \\ d_{\text{edit}}(s_1 \dots s_i, t_1 \dots t_{j-1}) + 1, \\ d_{\text{edit}}(s_1 \dots s_{i-1}, t_1 \dots t_{j-1}) + p(s_i, t_j) \}$$

Dynamische Programmierung

Umsetzung in `numpy`

Alignment-Algorithmus – Initialisierung

- Verwende Modul `numpy`, das schnell mit Matrizen (Tabellen) rechnen kann

```
import numpy as np
```

Alignment-Algorithmus – Initialisierung

- Verwende Modul `numpy`, das schnell mit Matrizen (Tabellen) rechnen kann

```
import numpy as np
```

- Eingabe gegeben durch zwei Strings `seq1` und `seq2`

```
seq1 = "ACTAC"  
seq2 = "AACTGATGA"  
m = len(seq1)  
n = len(seq2)
```

Alignment-Algorithmus – Initialisierung

- Verwende Modul `numpy`, das schnell mit Matrizen (Tabellen) rechnen kann

```
import numpy as np
```

- Eingabe gegeben durch zwei Strings `seq1` und `seq2`

```
seq1 = "ACTAC"  
seq2 = "AACTGATGA"  
m = len(seq1)  
n = len(seq2)
```

- Initialisiere Kosten-Tabelle

```
penal = np.zeros((m+1, n+1))  
for j in range(0, n+1):  
    penal[0][j] = j  
for i in range(0, m+1):  
    penal[i][0] = i
```

Alignment-Algorithmus – Initialisierung

- Verwende Modul `numpy`, das schnell mit Matrizen (Tabellen) rechnen kann

```
import numpy as np
```

- Eingabe gegeben durch zwei Strings `seq1` und `seq2`

```
seq1 = "ACTAC"  
seq2 = "AACTGATGA"  
m = len(seq1)  
n = len(seq2)
```

- Initialisiere Kosten-Tabelle

```
penal = np.zeros((m+1, n+1))  
for j in range(0, n+1):  
    penal[0][j] = j  
for i in range(0, m+1):  
    penal[i][0] = i
```

Erste Zeile (Alignment mit λ)

Alignment-Algorithmus – Initialisierung

- Verwende Modul `numpy`, das schnell mit Matrizen (Tabellen) rechnen kann

```
import numpy as np
```

- Eingabe gegeben durch zwei Strings `seq1` und `seq2`

```
seq1 = "ACTAC"  
seq2 = "AACTGATGA"  
m = len(seq1)  
n = len(seq2)
```

- Initialisiere Kosten-Tabelle

```
penal = np.zeros((m+1, n+1))  
for j in range(0, n+1):  
    penal[0][j] = j  
for i in range(0, m+1):  
    penal[i][0] = i
```

Erste Spalte (Alignment mit λ)

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Kosten-Tabelle

```
for i in range(1, m+1):
    for j in range(1, n+1):
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]:
            pij = 0
        else:
            pij = 1
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]
        penal_min = np.amin(x)
        penal[i][j] = penal_min
```

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Kosten-Tabelle

```
for i in range(1, m+1):  
    for j in range(1, n+1):  
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]:  
            pij = 0  
        else:  
            pij = 1  
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]  
        penal_min = np.amin(x)  
        penal[i][j] = penal_min
```

Für jede Zeile

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Kosten-Tabelle

```
for i in range(1, m+1):
    for j in range(1, n+1):
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]:
            pij = 0
        else:
            pij = 1
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]
        penal_min = np.amin(x)
        penal[i][j] = penal_min
```

Für jede Spalte

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Kosten-Tabelle

```
for i in range(1, m+1):
    for j in range(1, n+1):
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]:
            pij = 0
        else:
            pij = 1
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]
        penal_min = np.amin(x)
        penal[i][j] = penal_min
```

Gleiche Buchstaben in aktueller Zelle?

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Kosten-Tabelle

```
for i in range(1, m+1):
    for j in range(1, n+1):
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]:
            pij = 0
        else:
            pij = 1
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]
        penal_min = np.amin(x)
        penal[i][j] = penal_min
```

Dann keine Kosten

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Kosten-Tabelle

```
for i in range(1, m+1):
    for j in range(1, n+1):
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]:
            pij = 0
        else:
            pij = 1
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]
        penal_min = np.amin(x)
        penal[i][j] = penal_min
```

Falls nicht

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Kosten-Tabelle

```
for i in range(1, m+1):
    for j in range(1, n+1):
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]:
            pij = 0
        else:
            pij = 1
            Dann Kosten
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]
        penal_min = np.amin(x)
        penal[i][j] = penal_min
```

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Kosten-Tabelle

```
for i in range(1, m+1):
    for j in range(1, n+1):
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]:
            pij = 0
        else:
            pij = 1
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]
        penal_min = np.amin(x)
        penal[i][j] = penal_min
```

Betrachte drei Möglichkeiten

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Kosten-Tabelle

```
for i in range(1, m+1):
    for j in range(1, n+1):
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]:
            pij = 0
        else:
            pij = 1
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]
        penal_min = np.amin(x)
        penal[i][j] = penal_min
```

Betrachte drei Möglichkeiten
Füge Lücke im zweiten String ein

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Kosten-Tabelle

```
for i in range(1, m+1):
    for j in range(1, n+1):
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]:
            pij = 0
        else:
            pij = 1
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]
        penal_min = np.amin(x)
        penal[i][j] = penal_min
```

Betrachte drei Möglichkeiten
Füge Lücke im ersten String ein

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Kosten-Tabelle

```
for i in range(1, m+1):
    for j in range(1, n+1):
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]:
            pij = 0
        else:
            pij = 1
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]
        penal_min = np.amin(x)
        penal[i][j] = penal_min
```

Betrachte drei Möglichkeiten
Füge Match bzw. Mismatch ein

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Kosten-Tabelle

```
for i in range(1, m+1):
    for j in range(1, n+1):
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]:
            pij = 0
        else:
            pij = 1
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]
        penal_min = np.amin(x)
        penal[i][j] = penal_min
```

Berechne Minimum dieser Möglichkeiten

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Kosten-Tabelle

```
for i in range(1, m+1):
    for j in range(1, n+1):
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]:
            pij = 0
        else:
            pij = 1
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]
        penal_min = np.amin(x)
        penal[i][j] = penal_min
```

Speichere minimalen Wert in Kosten-Tabelle

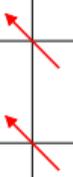
Bestimmung des optimalen Alignments

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1	1			
C ₂	2				
T ₃	3				
T ₄	4				
G ₅	5				



Bestimmung des optimalen Alignments

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1	1			
C ₂	2	1			
T ₃	3				
T ₄	4				
G ₅	5				



Bestimmung des optimalen Alignments

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1	1	2	3	4
C ₂	2	1	1	2	3
T ₃	3	2	2	1	2
T ₄	4	3	3	2	2
G ₅	5	4	4	3	2

Bestimmung des optimalen Alignments

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1	1	2	3	4
C ₂	2	1	1	2	3
T ₃	3	2	2	1	2
T ₄	4	3	3	2	2
G ₅	5	4	4	3	2

Bestimmung des optimalen Alignments

s \ t	0	C ₁	C ₂	T ₃	G ₄
0	0	1	2	3	4
A ₁	1	1	2	3	4
C ₂	2	1	1	2	3
T ₃	3	2	2	1	2
T ₄	4	3	3	2	2
G ₅	5	4	4	3	2

$s' = \text{ACTTG}$

$t' = \text{CCT-G}$

Alignment-Algorithmus – Initialisierung der Tracing-Tabelle

Tracing (Pfeile in der Kosten-Tabelle)

Speichere auch den Index des Minimums

Alignment-Algorithmus – Initialisierung der Tracing-Tabelle

Tracing (Pfeile in der Kosten-Tabelle)

Speichere auch den Index des Minimums

Erstelle Tabelle, um Weg durch Kosten-Tabelle zu speichern. . .

```
penal = np.zeros((m+1, n+1))  
trace = np.zeros((m+1, n+1))
```

Alignment-Algorithmus – Initialisierung der Tracing-Tabelle

Tracing (Pfeile in der Kosten-Tabelle)

Speichere auch den Index des Minimums

Erstelle Tabelle, um Weg durch Kosten-Tabelle zu speichern. . .

```
penal = np.zeros((m+1, n+1))  
trace = np.zeros((m+1, n+1))
```

Gleiche Grösse wie Kosten-Tabelle

Alignment-Algorithmus – Initialisierung der Tracing-Tabelle

Tracing (Pfeile in der Kosten-Tabelle)

Speichere auch den Index des Minimums

Erstelle Tabelle, um Weg durch Kosten-Tabelle zu speichern. . .

```
penal = np.zeros((m+1, n+1))  
trace = np.zeros((m+1, n+1))
```

```
for j in range(1, n+1):  
    trace[0][j] = 1  
for i in range(1, m+1):  
    trace[i][0] = 0
```

Alignment-Algorithmus – Initialisierung der Tracing-Tabelle

Tracing (Pfeile in der Kosten-Tabelle)

Speichere auch den Index des Minimums

Erstelle Tabelle, um Weg durch Kosten-Tabelle zu speichern. . .

```
penal = np.zeros((m+1, n+1))
trace = np.zeros((m+1, n+1))
```

```
for j in range(1, n+1):
    trace[0][j] = 1
for i in range(1, m+1):
    trace[i][0] = 0
```

In erster Zeile nur Schritte von links

Alignment-Algorithmus – Initialisierung der Tracing-Tabelle

Tracing (Pfeile in der Kosten-Tabelle)

Speichere auch den Index des Minimums

Erstelle Tabelle, um Weg durch Kosten-Tabelle zu speichern. . .

```
penal = np.zeros((m+1, n+1))
trace = np.zeros((m+1, n+1))
```

```
for j in range(1, n+1):
    trace[0][j] = 1
for i in range(1, m+1):
    trace[i][0] = 0
```

In erster Spalte nur Schritte von oben

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Tracing-Tabelle

Speichere Index des Minimums mit der `numpy`-Funktion `argmin`...

```
penal_min = np.amin(x)
index_min = np.argmax(x)
penal[i][j] = penal_min
trace[i][j] = index_min
```

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Tracing-Tabelle

Speichere Index des Minimums mit der `numpy`-Funktion `argmin...`

```
penal_min = np.amin(x)
index_min = np.argmax(x)
penal[i][j] = penal_min
trace[i][j] = index_min
```

Berechne geringste Kosten

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Tracing-Tabelle

Speichere Index des Minimums mit der `numpy`-Funktion `argmin...`

```
penal_min = np.amin(x)
index_min = np.argmax(x)
penal[i][j] = penal_min
trace[i][j] = index_min
```

Berechne Index des Minimums

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Tracing-Tabelle

Speichere Index des Minimums mit der `numpy`-Funktion `argmin...`

```
penal_min = np.amin(x)
index_min = np.argmax(x)
penal[i][j] = penal_min
trace[i][j] = index_min
```

Speichere Wert

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Tracing-Tabelle

Speichere Index des Minimums mit der `numpy`-Funktion `argmin`...

```
penal_min = np.amin(x)
index_min = np.argmax(x)
penal[i][j] = penal_min
trace[i][j] = index_min
```

Speichere Index

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Tracing-Tabelle

Speichere Index des Minimums mit der `numpy`-Funktion `argmin`...

```
penal_min = np.amin(x)
index_min = np.argmax(x)
penal[i][j] = penal_min
trace[i][j] = index_min
```

- Laufe nun rückwärts durch Tabelle `trace`
- Wert gibt Index des Minimums an

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Tracing-Tabelle

Speichere Index des Minimums mit der `numpy`-Funktion `argmin...`

```
penal_min = np.amin(x)
index_min = np.argmax(x)
penal[i][j] = penal_min
trace[i][j] = index_min
```

- Laufe nun rückwärts durch Tabelle `trace`
- Wert gibt Index des Minimums an
- Füge Lücke ein oder gib Match bzw. Mismatch aus

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Tracing-Tabelle

Speichere Index des Minimums mit der `numpy`-Funktion `argmin...`

```
penal_min = np.amin(x)
index_min = np.argmax(x)
penal[i][j] = penal_min
trace[i][j] = index_min
```

- Laufe nun rückwärts durch Tabelle `trace`
- Wert gibt Index des Minimums an
- Füge Lücke ein oder gib Match bzw. Mismatch aus
- Fahre fort in vorheriger Spalte und Zeile von `trace`

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Tracing-Tabelle

Speichere Index des Minimums mit der `numpy`-Funktion `argmin...`

```
penal_min = np.amin(x)
index_min = np.argmax(x)
penal[i][j] = penal_min
trace[i][j] = index_min
```

- Laufe nun rückwärts durch Tabelle `trace`
- Wert gibt Index des Minimums an
- Füge Lücke ein oder gib Match bzw. Mismatch aus
- Fahre fort in vorheriger Spalte und Zeile von `trace`
- Bei Match bzw. Mismatch ist nächster Eintrag links darüber
- $i = i-1$ und $j = j-1$

Alignment-Algorithmus – Ausfüllen der Tracing-Tabelle

Speichere Index des Minimums mit der `numpy`-Funktion `argmin...`

```
penal_min = np.amin(x)
index_min = np.argmax(x)
penal[i][j] = penal_min
trace[i][j] = index_min
```

- Laufe nun rückwärts durch Tabelle `trace`
- Wert gibt Index des Minimums an
- Füge Lücke ein oder gib Match bzw. Mismatch aus
- Fahre fort in vorheriger Spalte und Zeile von `trace`
- Bei Match bzw. Mismatch ist nächster Eintrag links darüber
- $i = i-1$ und $j = j-1$
- Sonst nur i oder j verkleinern

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

- Resultat des Algorithmus ist 2-dimensionale Liste `result` mit
 - einer Liste für den ersten String
 - und einer Liste für den zweiten String

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

- Resultat des Algorithmus ist 2-dimensionale Liste `result` mit
 - einer Liste für den ersten String
 - und einer Liste für den zweiten String
- Beginne unten rechts in der Tabelle
- Fülle `result` mit dem umgedrehten Alignment
- Das Ergebnis wird danach lesbarer formatiert

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

- Resultat des Algorithmus ist 2-dimensionale Liste `result` mit
 - einer Liste für den ersten String
 - und einer Liste für den zweiten String
- Beginne unten rechts in der Tabelle
- Fülle `result` mit dem umgedrehten Alignment
- Das Ergebnis wird danach lesbarer formatiert

```
result = [[], []]  
i = m  
j = n
```

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

```
while i > 0 or j > 0:
    if trace[i][j] == 0:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append("-")
        i -= 1
    elif trace[i][j] == 1:
        result[0].append("-")
        result[1].append(seq2[j-1])
        j -= 1
    else:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append(seq2[j-1])
        i -= 1
        j -= 1

for k in range(len(result[0])-1, -1, -1):
    print(result[0][k], " <-> ", result[1][k])
```

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

```
while i > 0 or j > 0:
    if trace[i][j] == 0:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append("-")
        i -= 1
    elif trace[i][j] == 1:
        result[0].append("-")
        result[1].append(seq2[j-1])
        j -= 1
    else:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append(seq2[j-1])
        i -= 1
        j -= 1

for k in range(len(result[0])-1, -1, -1):
    print(result[0][k], " <-> ", result[1][k])
```

Solange wir noch nicht oben links angekommen sind

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

```
while i > 0 or j > 0:
    if trace[i][j] == 0:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append("-")
        i -= 1
    elif trace[i][j] == 1:
        result[0].append("-")
        result[1].append(seq2[j-1])
        j -= 1
    else:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append(seq2[j-1])
        i -= 1
        j -= 1

for k in range(len(result[0])-1, -1, -1):
    print(result[0][k], " <-> ", result[1][k])
```

Wenn Schritt von oben

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

```
while i > 0 or j > 0:
    if trace[i][j] == 0:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append("-")
        i -= 1
    elif trace[i][j] == 1:
        result[0].append("-")
        result[1].append(seq2[j-1])
        j -= 1
    else:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append(seq2[j-1])
        i -= 1
        j -= 1

for k in range(len(result[0])-1, -1, -1):
    print(result[0][k], " <-> ", result[1][k])
```

Dann füge Lücke im zweiten String ein

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

```
while i > 0 or j > 0:
    if trace[i][j] == 0:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append("-")
        i -= 1
    elif trace[i][j] == 1:
        result[0].append("-")
        result[1].append(seq2[j-1])
        j -= 1
    else:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append(seq2[j-1])
        i -= 1
        j -= 1

for k in range(len(result[0])-1, -1, -1):
    print(result[0][k], " <-> ", result[1][k])
```

Und fahre in Zeile darüber fort

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

```
while i > 0 or j > 0:
    if trace[i][j] == 0:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append("-")
        i -= 1
    elif trace[i][j] == 1:
        result[0].append("-")
        result[1].append(seq2[j-1])
        j -= 1
    else:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append(seq2[j-1])
        i -= 1
        j -= 1

for k in range(len(result[0])-1, -1, -1):
    print(result[0][k], " <-> ", result[1][k])
```

Wenn Schritt von links

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

```
while i > 0 or j > 0:
    if trace[i][j] == 0:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append("-")
        i -= 1
    elif trace[i][j] == 1:
        result[0].append("-")
        result[1].append(seq2[j-1])
        j -= 1
    else:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append(seq2[j-1])
        i -= 1
        j -= 1

for k in range(len(result[0])-1, -1, -1):
    print(result[0][k], " <-> ", result[1][k])
```

Dann füge Lücke im ersten String ein

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

```
while i > 0 or j > 0:
    if trace[i][j] == 0:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append("-")
        i -= 1
    elif trace[i][j] == 1:
        result[0].append("-")
        result[1].append(seq2[j-1])
        j -= 1
    else:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append(seq2[j-1])
        i -= 1
        j -= 1

for k in range(len(result[0])-1, -1, -1):
    print(result[0][k], " <-> ", result[1][k])
```

Und fahre in Spalte links davon fort

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

```
while i > 0 or j > 0:
    if trace[i][j] == 0:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append("-")
        i -= 1
    elif trace[i][j] == 1:
        result[0].append("-")
        result[1].append(seq2[j-1])
        j -= 1
    else:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append(seq2[j-1])
        i -= 1
        j -= 1

for k in range(len(result[0])-1, -1, -1):
    print(result[0][k], " <-> ", result[1][k])
```

Wenn Schritt von oben links

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

```
while i > 0 or j > 0:
    if trace[i][j] == 0:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append("-")
        i -= 1
    elif trace[i][j] == 1:
        result[0].append("-")
        result[1].append(seq2[j-1])
        j -= 1
    else:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append(seq2[j-1])
        i -= 1
        j -= 1

for k in range(len(result[0])-1, -1, -1):
    print(result[0][k], " <-> ", result[1][k])
```

Füge Match bzw. Mismatch ein
(Schreibe beide Buchstaben)

Alignment-Algorithmus – Resultat ausgeben

```
while i > 0 or j > 0:
    if trace[i][j] == 0:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append("-")
        i -= 1
    elif trace[i][j] == 1:
        result[0].append("-")
        result[1].append(seq2[j-1])
        j -= 1
    else:
        result[0].append(seq1[i-1])
        result[1].append(seq2[j-1])
        i -= 1
        j -= 1

for k in range(len(result[0])-1, -1, -1):
    print(result[0][k], " <-> ", result[1][k])
```

Und fahre in Zelle links darüber fort

Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität

- Es gibt zwei Teile
 1. Ausfüllen der Tabellen
 2. Ausgabe des Resultats

Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität

- Es gibt zwei Teile
 1. Ausfüllen der Tabellen
 2. Ausgabe des Resultats
- Das Ausfüllen ist aufwändiger, da jede Zelle betrachtet wird

Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität

- Es gibt zwei Teile
 1. Ausfüllen der Tabellen
 2. Ausgabe des Resultats
- Das Ausfüllen ist aufwändiger, da jede Zelle betrachtet wird

```
for i in range(1, m+1):  
    for j in range(1, n+1):  
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]  
            ...  
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]  
        penalty_min = amin(x)  
        ...
```

Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität

- Es gibt zwei Teile
 1. Ausfüllen der Tabellen
 2. Ausgabe des Resultats
- Das Ausfüllen ist aufwändiger, da jede Zelle betrachtet wird

```
for i in range(1, m+1):  
    for j in range(1, n+1):  
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]  
            ...  
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]  
        penalty_min = amin(x)  
        ...
```

Für jede Zeile

Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität

- Es gibt zwei Teile
 1. Ausfüllen der Tabellen
 2. Ausgabe des Resultats
- Das Ausfüllen ist aufwändiger, da jede Zelle betrachtet wird

```
for i in range(1, m+1):  
    for j in range(1, n+1):  
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]  
            ...  
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]  
        penalty_min = amin(x)  
        ...
```

Für jede Spalte

Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität

- Es gibt zwei Teile
 1. Ausfüllen der Tabellen
 2. Ausgabe des Resultats
- Das Ausfüllen ist aufwändiger, da jede Zelle betrachtet wird

```
for i in range(1, m+1):  
    for j in range(1, n+1):  
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]  
            ...  
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]  
        penalty_min = amin(x)  
        ...
```

Ein Vergleich

Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität

- Es gibt zwei Teile
 1. Ausfüllen der Tabellen
 2. Ausgabe des Resultats
- Das Ausfüllen ist aufwändiger, da jede Zelle betrachtet wird

```
for i in range(1, m+1):  
    for j in range(1, n+1):  
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]  
            ...  
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]  
        penalty_min = amin(x)  
        ...
```

Zwei Vergleiche

Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität

- Es gibt zwei Teile
 1. Ausfüllen der Tabellen
 2. Ausgabe des Resultats
- Das Ausfüllen ist aufwändiger, da jede Zelle betrachtet wird

```
for i in range(1, m+1):  
    for j in range(1, n+1):  
        if seq1[i-1] == seq2[j-1]  
            ...  
        x = [penal[i-1][j] + 1, penal[i][j-1] + 1, penal[i-1][j-1] + pij]  
        penalty_min = amin(x)  
        ...
```

$3 \cdot m \cdot n$ Vergleiche

Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität

Laufzeit: Ungefähr $3n^2$ für zwei Strings derselben Länge n

Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität

Laufzeit: Ungefähr $3n^2$ für zwei Strings derselben Länge n

n	10	50	100	300	10 000
$10n$	100	500	1 000	3 000	100 000
$3n^2$	300	7 500	30 000	270 000	300 000 000
n^3	1 000	125 000	1 000 000	27 000 000	13 Ziffern
3^n	59 049	24 Ziffern	48 Ziffern	143 Ziffern	4 772 Ziffern

Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität

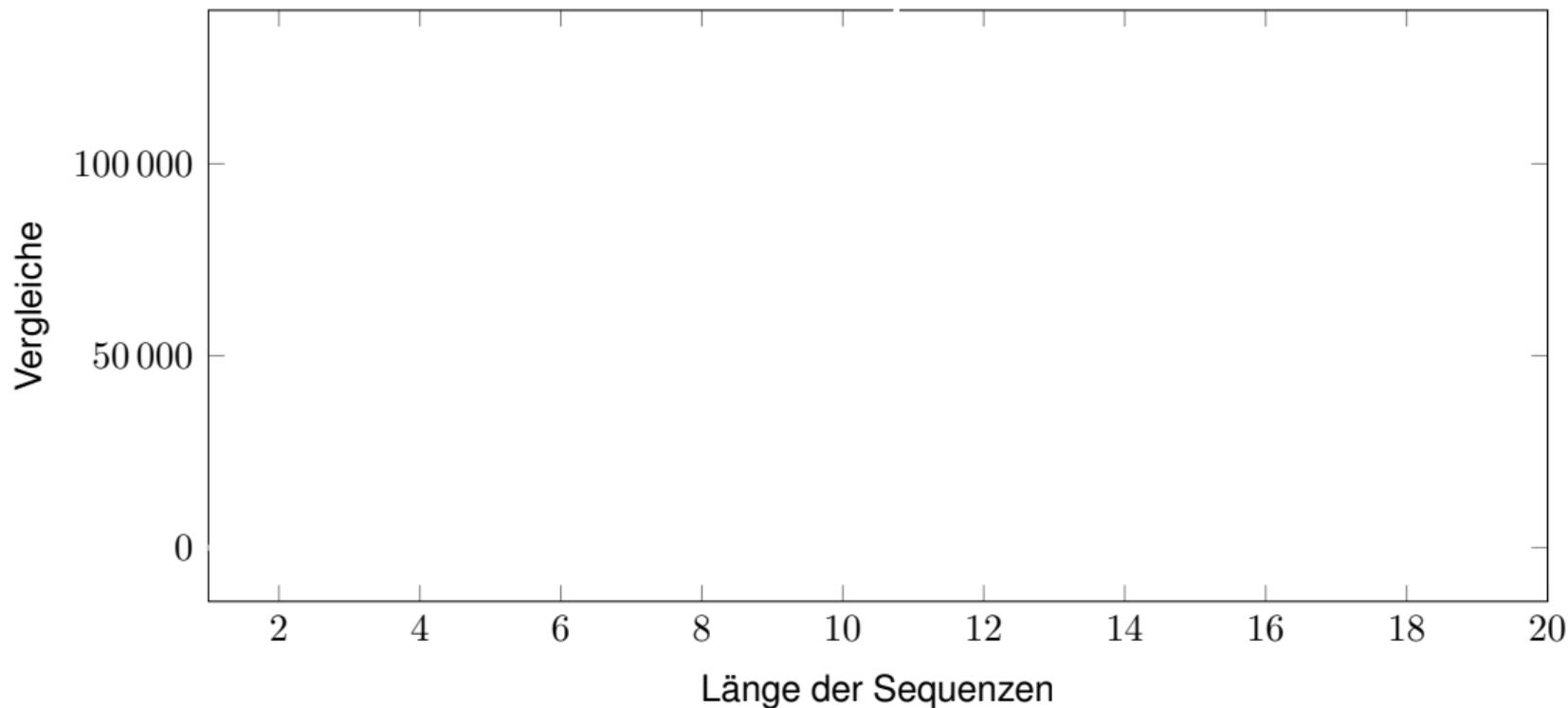
Laufzeit: Ungefähr $3n^2$ für zwei Strings derselben Länge n

n	10	50	100	300	10 000
$10n$	100	500	1 000	3 000	100 000
$3n^2$	300	7 500	30 000	270 000	300 000 000
n^3	1 000	125 000	1 000 000	27 000 000	13 Ziffern
3^n	59 049	24 Ziffern	48 Ziffern	143 Ziffern	4 772 Ziffern

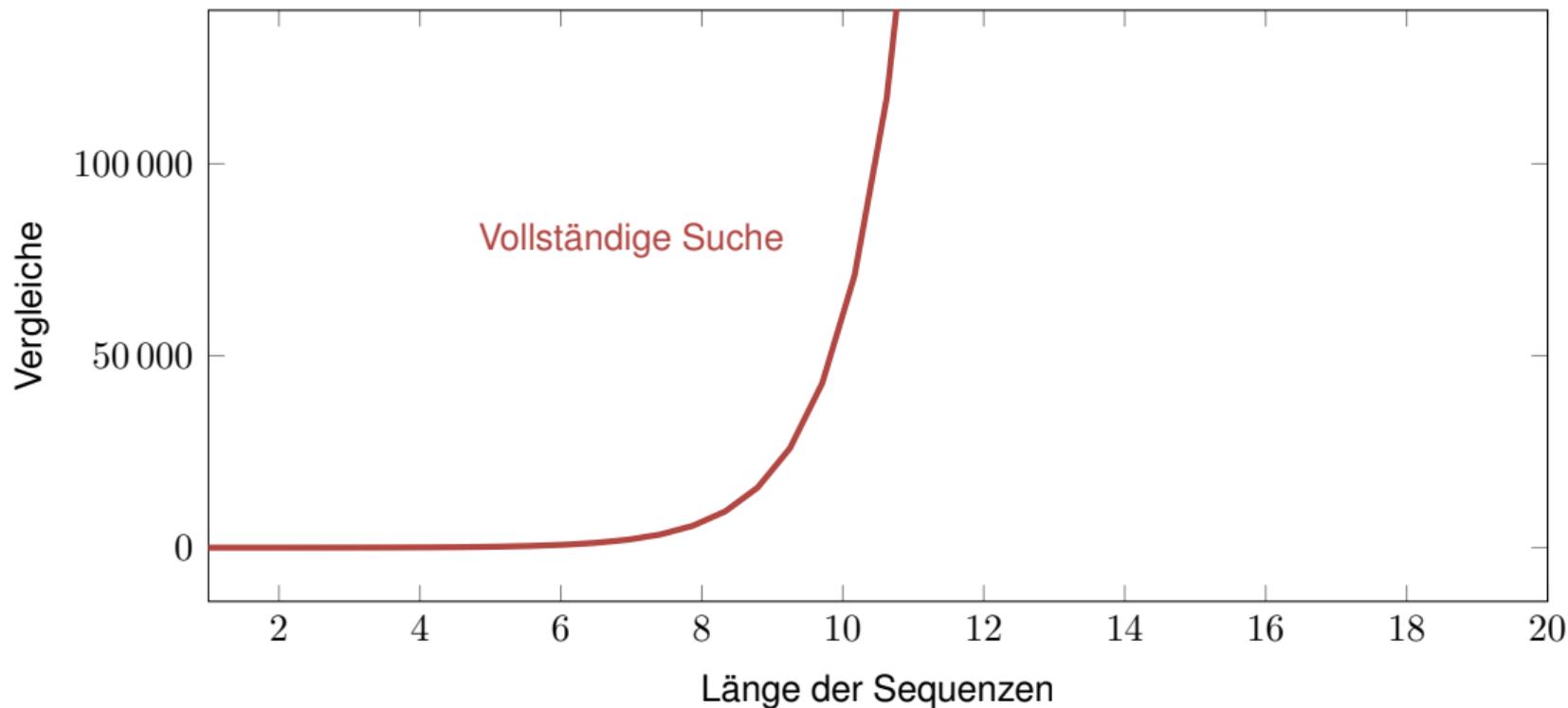
Vergleich zweier Gene (Größenordnung $n \approx 10\,000$) braucht

- **100 MB** Platz und
- **weniger als 1 Minute** Zeit

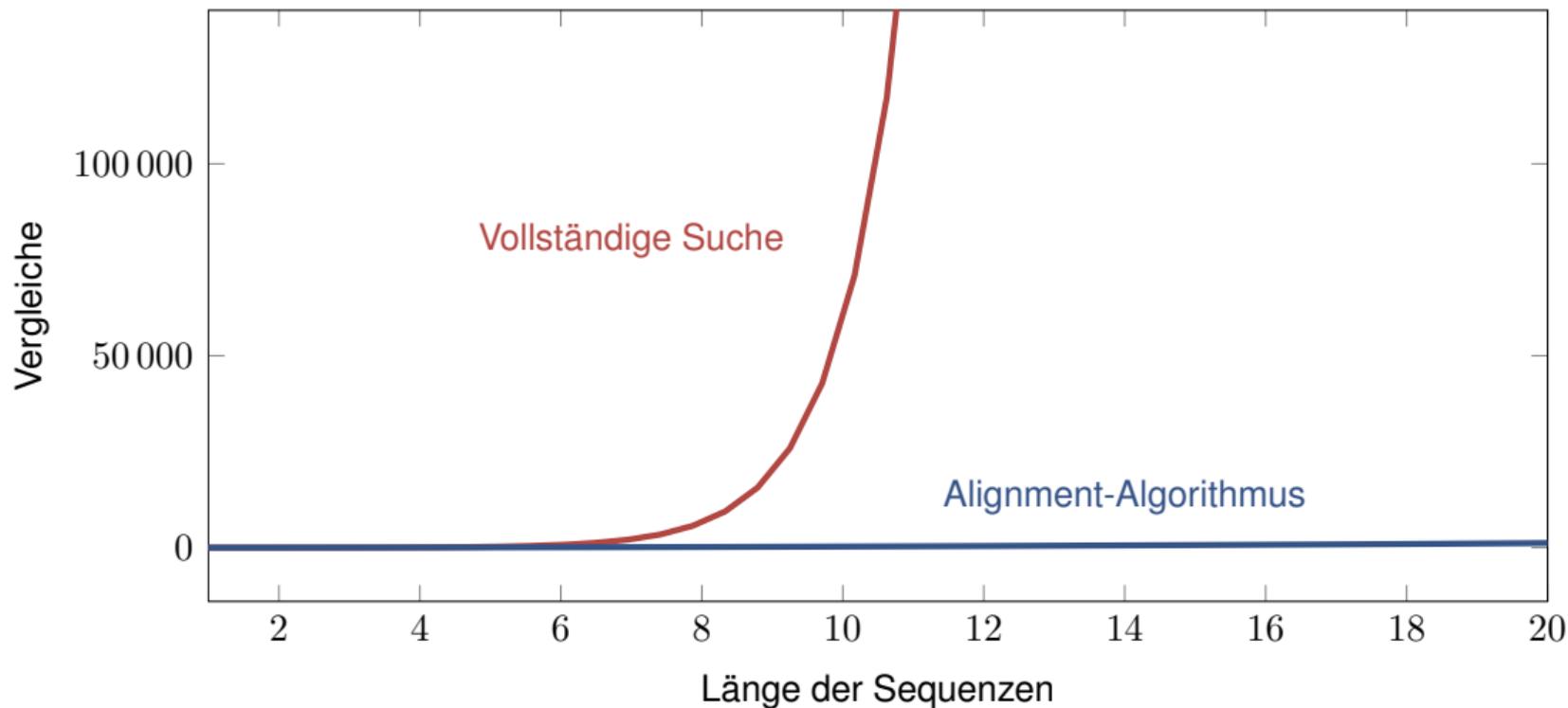
Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität



Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität



Alignment-Algorithmus – Zeitkomplexität



Danke für die
Aufmerksamkeit