2. Ganze Zahlen

Auswertung arithmetischer Ausdrücke, Assoziativität und Präzedenz, arithmetische Operatoren, Wertebereich der Typen `int`, `unsigned int`

Beispiel: power8.cpp

```
int a; // Input
int r; // Result

std::cout << "Compute a^8 for a = ?";
std::cin >> a;

r = a * a; // r = a^2
r = r * r; // r = a^4

std::cout << "a^8 = " << r*r << '\n';
```


Terminologie: L-Werte und R-Werte

L-Wert ("**L**inks vom Zuweisungsoperator")

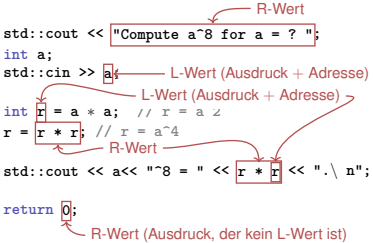
- Ausdruck der einen *Speicherplatz* identifiziert
- Zum Beispiele eine Variable `a`
  (später im Kurs lernen wir weitere L-Werte kennen)
- *Wert* ist der Inhalt an der Speicheradresse entsprechend dem Typ des Ausdrucks (für `a` z.B. Wert 2).
- L-Wert kann seinen Wert *ändern* (z.B. per Zuweisung).

Terminologie: L-Werte und R-Werte

R-Wert ("**R**echts vom Zuweisungsoperator")

- Ausdruck der kein L-Wert ist
- Beispiel: Integer-Literal `0`
- Jeder L-Wert kann als R-Wert benutzt werden (aber nicht umgekehrt) . . .
- . . . indem der *Wert* des L-Werts genommen wird
  (z.B. könnte der L-Wert `a` den Wert 2 haben, der dann als R-Wert verwendet wird)
- Ein R-Wert kann seinen Wert *nicht ändern*

L-Werte und R-Werte



Celsius to Fahrenheit

```
// Program: fahrenheit.cpp
// Convert temperatures from Celsius to Fahrenheit.
#include <iostream>

int main() {
  // Input
  std::cout << "Temperature in degrees Celsius =? ";
  int celsius;
  std::cin >> celsius;

  // Computation and output
  std::cout << celsius << " degrees Celsius are "
            << 9 * celsius / 5 + 32  << " degrees Fahrenheit.\n";
  return 0;
}
```


`9 * celsius / 5 + 32`

- Arithmetischer Ausdruck,
- enthält drei Literale, eine Variable, drei Operatorsymbole

Wie ist der Ausdruck geklammert?

Präzedenz

Punkt vor Strichrechnung

`9 * celsius / 5 + 32`

bedeutet

`(9 * celsius / 5) + 32`

Regel 1: Präzedenz

Multiplikative Operatoren (∗, /, %) haben höhere Präzedenz („binden stärker“) als additive Operatoren (+, −)

Assoziativität

Von links nach rechts

```
9 * celsius / 5 + 32
```

bedeutet

```
((9 * celsius) / 5) + 32
```

Regel 2: Assoziativität

Arithmetische Operatoren (`*`, `/`, `%`, `+`, `-`) sind linksassoziativ: bei gleicher Präzedenz erfolgt Auswertung von links nach rechts

Stelligkeit

Regel 3: Stelligkeit

Unäre Operatoren `+`, `-` vor binären `+`, `-`.

```
-3 - 4
```

bedeutet

```
(-3) - 4
```


Klammerung

Jeder Ausdruck kann mit Hilfe der

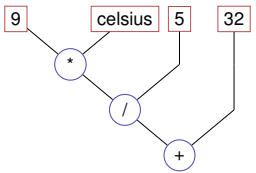
- Assoziativitäten
- Präzedenzen
- Stelligkeiten (Anzahl Operanden)

der beteiligten Operatoren eindeutig geklammert werden (Details im Skript).

Ausdrucksbäume

Klammerung ergibt Ausdrucksbaum

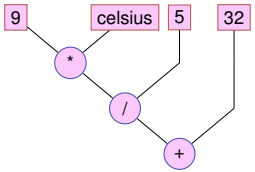
```
(((9 * celsius) / 5) + 32)
```



Auswertungsreihenfolge

„Von oben nach unten“ im Ausdrucksbaum

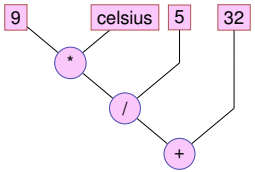
```
9 * celsius / 5 + 32
```



Auswertungsreihenfolge

Reihenfolge nicht eindeutig bestimmt:

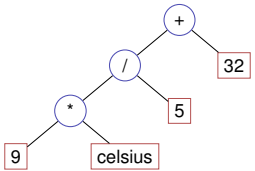
```
9 * celsius / 5 + 32
```



Ausdrucksbäume – Notation

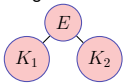
Üblichere Notation: Wurzel oben

```
9 * celsius / 5 + 32
```



Auswertungsreihenfolge – formaler

- Gültige Reihenfolge: Jeder Knoten wird erst *nach* seinen Kindern ausgewertet.



In C++ist die anzuwendende gültige Reihenfolge nicht spezifiziert.

- „Guter Ausdruck“: jede gültige Reihenfolge führt zum gleichen Ergebnis.
- Beispiel eines „schlechten Ausdrucks“: `a*(a=2)`

Auswertungsreihenfolge

Richtlinie

Vermeide das Verändern von Variablen, welche im selben Ausdruck noch einmal verwendet werden!

Arithmetische Operatoren

	Symbol	Stelligkeit	Präzedenz	Assoziativität
Unäres +	+	1	16	rechts
Negation	−	1	16	rechts
Multiplikation	*	2	14	links
Division	/	2	14	links
Modulo	%	2	14	links
Addition	+	2	13	links
Subtraktion	−	2	13	links

Alle Operatoren: [R-Wert $\times$] R-Wert $\rightarrow$ R-Wert

Einschub: Zuweisungsausdruck – nun genauer

- Bereits bekannt: `a = b` bedeutet
  Zuweisung von `b` (R-Wert) an `a` (L-Wert).
  Rückgabe: L-Wert
- Was bedeutet `a = b = c` ?
- Antwort: Zuweisung rechtsassoziativ, also

```
a = b = c        ⟺        a = (b = c)
```

Beispiel Mehrfachzuweisung:
`a = b = 0` $\Longrightarrow$ `b=0; a=0`

Division

- Operator `/` realisiert ganzzahlige Division

  `5 / 2` hat Wert 2
- In `fahrenheit.cpp`

```
9 * celsius / 5 + 32
```

```
15 degrees Celsius are 59 degrees Fahrenheit
```

- Mathematisch äquivalent. . . aber nicht in C++!

```
9 / 5 * celsius + 32
```

```
15 degrees Celsius are 47 degrees Fahrenheit
```

Präzisionsverlust

Richtlinie

- Auf möglichen Präzisionsverlust achten
- Potentiell verlustbehaftete Operationen möglichst spät durchführen um „Fehlereskalation“ zu vermeiden

Division und Modulo

- Modulo-Operator berechnet Rest der ganzzahligen Division

  `5 / 2` hat Wert 2, `5 % 2` hat Wert 1.

- Es gilt immer:

  `(a / b) * b + a % b` hat den Wert von `a`.

- Daraus lässt sich herleiten, welche Ergebnisse Division und Modulo mit negativen Zahlen ergeben (müssen)

Inkrement und Dekrement

- Erhöhen / Erniedrigen einer Zahl um 1 ist eine häufige Operation
- geht für einen L-Wert so:

```
expr = expr + 1.
```

Nachteile

- relativ lang
- `expr` wird zweimal ausgewertet
  - Später: L-wertige Ausdrücke deren Auswertung „teuer“ ist
  - `expr` könnte einen Effekt haben (aber sollte nicht, siehe Richtlinie)

In-/Dekrement Operatoren

Post-Inkrement

```
expr++
```

Wert von `expr` wird um 1 erhöht, der *alte* Wert von `expr` wird (als R-Wert) zurückgegeben

Prä-Inkrement

```
++expr
```

Wert von `expr` wird um 1 erhöht, der *neue* Wert von `expr` wird (als L-Wert) zurückgegeben

Post-Dekrement

```
expr--
```

Wert von `expr` wird um 1 verringert, der *alte* Wert von `expr` wird (als R-Wert) zurückgegeben

Prä-Dekrement

```
--expr
```

Wert von `expr` wird um 1 verringert, der *neue* Wert von `expr` wird (als L-Wert) zurückgegeben

In-/Dekrement Operatoren

	Gebrauch	Stelligkeit	Präz	Assoz.	L/R-Werte
Post-Inkrement	`expr++`	1	17	links	L-Wert → R-Wert
Prä-Inkrement	`++expr`	1	16	rechts	L-Wert → L-Wert
Post-Dekrement	`expr--`	1	17	links	L-Wert → R-Wert
Prä-Dekrement	`--expr`	1	16	rechts	L-Wert → L-Wert

In-/Dekrement Operatoren

Beispiel

```
int a = 7;
std::cout << ++a << "\n"; // 8
std::cout << a++ << "\n"; // 8
std::cout << a << "\n"; // 9
```


In-/Dekrement Operatoren

Ist die Anweisung

`++expr;` ← wir bevorzugen dies

äquivalent zu

`expr++;`?

Ja, aber

- Prä-Inkrement ist effizienter (alter Wert muss nicht gespeichert werden)
- Post-In/Dekrement sind die einzigen linksassoziativen unären Operatoren (nicht sehr intuitiv)

Arithmetische Zuweisungen

`a += b`

⇔

`a = a + b`

Analog für `-`, `*`, `/` und `%`

Arithmetische Zuweisungen

	Gebrauch	Bedeutung
`+=`	`expr1 += expr2`	`expr1 = expr1 + expr2`
`-=`	`expr1 -= expr2`	`expr1 = expr1 - expr2`
`*=`	`expr1 *= expr2`	`expr1 = expr1 * expr2`
`/=`	`expr1 /= expr2`	`expr1 = expr1 / expr2`
`%=`	`expr1 %= expr2`	`expr1 = expr1 % expr2`

Arithmetische Zuweisungen werten expr1 nur einmal aus.
Zuweisungen haben Präzedenz 4 und sind rechtsassoziativ

Binäre Zahlendarstellungen

Binäre Darstellung (Bits aus $\{0, 1\}$)

$$b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0$$

entspricht der Zahl $b_n \cdot 2^n + \dots + b_1 \cdot 2 + b_0$

Beispiel: `1`01011`1` entspricht 43.

Niedrigstes Bit, Least Significant Bit (LSB)

Höchstes Bit, Most Significant Bit (MSB)

Rechentricks

- Abschätzung der Grössenordnung von Zweierpotenzen[2]:

$2^{10} = 1024 = 1\text{Ki} \approx 10^3$.
$2^{20} = 1\text{Mi} \approx 10^6$,
$2^{30} = 1\text{Gi} \approx 10^9$,
$2^{32} = 4 \cdot (1024)^3 = 4\text{Gi}$.
$2^{64} = 16\text{Ei} \approx 16 \cdot 10^{18}$.

[2] Dezimal vs. Binäre Einheiten: MB - Megabyte vs. MiB - Megabibyte (etc.)
kilo (K, Ki) – mega (M, Mi) – giga (G, Gi) – tera(T, Ti) – peta(P, Pi) – exa (E, Ei)

Hexadezimale Zahlen

Zahlen zur Basis 16. Darstellung

$$h_n h_{n-1} \dots h_1 h_0$$

entspricht der Zahl

$$h_n \cdot 16^n + \dots + h_1 \cdot 16 + h_0.$$

Schreibweise in C++: vorangestelltes `0x`

Beispiel: `0xff` entspricht 255.

Hex Nibbles

hex	bin	dec
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
a	1010	10
b	1011	11
c	1100	12
d	1101	13
e	1110	14
f	1111	15

Wozu Hexadezimalzahlen?

- Ein Hex-Nibble entspricht *genau* 4 Bits. Die Zahlen 1, 2, 4 und 8 repräsentieren Bits 0, 1, 2 und 3.
- „Kompakte Darstellung von Binärzahlen“.

Wozu Hexadezimalzahlen?

„Für Programmierer und Techniker“ (Auszug aus der Bedienungsanleitung des Schachcomputers *Mephisto II*, 1981)

Beispiele:

8200 a) Anzeige 8200
MEPHISTO ist mit genau 2 Bauern-Einheiten im Vorteil.

7F00 b) Anzeige 7F00
MEPHISTO ist mit genau 1 Bauern-Einheit im Nachteil.

Die Anzeige erfolgt in **hexadezimaler Schreibweise.** Im Gegensatz zum gewohnten Dezimalsystem gehen die Ziffern an jeder Stelle von 0 bis F (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F).
Für mathematisch Vorgebildete: nachstehend die Umrechnungsformel in das dezimale Punktsystem:

ABCD = (Ax16³) + (Bx16²) + (Cx16¹) + (Dx16⁰)

Für A gilt: 7 = -1; 8 = 0; 9 = +1 usw.
Eine Bauerneinheit (B) wird ausgedrückt in 16² = 256 Punkten.
Dieses auf den ersten Blick vielleicht etwas komplizierte System dient der Service-Freundlichkeit von MEPHISTO, sowie insbesondere der Entwicklungsarbeit an zukünftigen, noch stärkeren Programmen, ist also mehr für unsere Programmierer und Techniker vorgesehen.

Beispiele:

805E c) Anzeige 805E
(E=14) Umrechnung nach folgendem Verfahren:
(14x16³) + (5x16²) + (0x16¹) + (0x16⁰) = 14×80÷0÷0 =
= +84 Punkte.

7F80 d) Anzeige 7F80
(7=+1) F=15 Umrechnung wie folgt.
(0x16³) + (8x16²) + (15x16¹) – (1x16⁰) = 0÷128÷3840–4096 =

Beispiel: Hex-Farben

#00FF00

r g b

Wertebereich des Typs `int`

```
// Output the smallest and the largest value of type int.
#include <iostream>
#include <limits>

int main() {
  std::cout << "Minimum int value is "
            << std::numeric_limits<int>::min() << ".\n"
            << "Maximum int value is "
            << std::numeric_limits<int>::max() << ".\n";
  return 0;
}
```

```
Minimum int value is -2147483648.
Maximum int value is 2147483647.
```

Woher kommen diese Zahlen?

Wertebereich des Typs `int`

- Repräsentation mit B Bits. Wertebereich umfasst die 2^B ganzen Zahlen:

$$\{-2^{B-1}, -2^{B-1}+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 2^{B-1}-2, 2^{B-1}-1\}$$

- Auf den meisten Plattformen $B = 32$
- Für den Typ `int` garantiert C++ $B \geq 16$
- Hintergrund: Abschnitt 2.2.8 (Binary Representation) im Skript

Überlauf und Unterlauf

- Arithmetische Operationen (`+`,`-`,`*`) können aus dem Wertebereich herausführen.
- Ergebnisse können inkorrekt sein.

`power8.cpp`: $15^8 = -1732076671$

- Es gibt *keine Fehlermeldung!*

Der Typ `unsigned int`

- Wertebereich

$$\{0, 1, \ldots, 2^B - 1\}$$

- Alle arithmetischen Operationen gibt es auch für `unsigned int`.
- Literale: `1u, 17u` ...

Gemischte Ausdrücke

- Operatoren können Operanden verschiedener Typen haben (z.B. `int` und `unsigned int`).

```
17 + 17u
```

- Solche gemischten Ausdrücke sind vom „allgemeineren“ Typ `unsigned int`.
- `int`-Operanden werden *konvertiert* nach `unsigned int`.

Konversion

`int` Wert	Vorzeichen	`unsigned int` Wert
x	≥ 0	x
x	< 0	$x + 2^B$

Dank cleverer Repräsentation (Zweierkomplement – behandeln wir nicht) muss intern gar nicht addiert werden

Konversion “andersherum”

Die Deklaration

```
int a = 3u;
```

konvertiert `3u` nach `int`.

Der Wert bleibt erhalten, weil er im Wertebereich von `int` liegt; andernfalls ist das Ergebnis implementierungsabhängig.

Zahlen mit Vorzeichen

Hinweis: Die verbleibenden Folien zur vorzeichenbehafteten Zahlendarstellung, dem Rechnen mit Binärzahlen sowie der Zweierkomplementdarstellung sind *nicht* klausurrelevant

Vorzeichenbehaftete Zahlendarstellung

- Soweit klar (hoffentlich): Binäre Zahlendarstellung ohne Vorzeichen, z.B.

$$[b_{31}b_{30}\dots b_0]_u \quad \widehat{=} \quad b_{31}\cdot 2^{31} + b_{30}\cdot 2^{30} + \dots + b_0$$

- Nun offensichtlich notwendig: Verwende ein Bit für das Vorzeichen.
- Suche möglichst konsistente Lösung

Die Darstellung mit Vorzeichen sollte möglichst viel mit der vorzeichenlosen Lösung „gemein haben“. Positive Zahlen sollten sich in beiden Systemen algorithmisch möglichst gleich verhalten.

Rechnen mit Binärzahlen (4 Stellen)

Einfache Addition

2	0010
$+3$	$+0011$
5	0101

Einfache Subtraktion

5	0101
-3	-0011
2	0010

Rechnen mit Binärzahlen (4 Stellen)

Addition mit Überlauf

7	0111
$+9$	$+1001$
16	$(1)0000$

Negative Zahlen?

5	0101
$+(-5)$	$????$
0	$(1)0000$

Rechnen mit Binärzahlen (4 Stellen)

Einfacher: -1

1	0001
$+(-1)$	1111
0	$(1)0000$

Nutzen das aus:

3	0011
$+?$	$+????$
-1	1111

Rechnen mit Binärzahlen (4 Stellen)

Invertieren!

3	0011
$+(-4)$	$+1100$
-1	$1111 \widehat{=} 2^B - 1$

a	a
$+(-a-1)$	$\bar{a}$
-1	$1111 \widehat{=} 2^B - 1$

Rechnen mit Binärzahlen (4 Stellen)

- Negation: Inversion und Addition von 1

$$-a \;\widehat{=}\; \bar{a} + 1$$

- Wrap-around Semantik (Rechnen modulo 2^B)

$$-a \;\widehat{=}\; 2^B - a$$

Warum das funktioniert

Modulo-Arithmetik: Rechnen im Kreis[3]

[3] Die Arithmetik funktioniert auch mit Dezimalzahlen (und auch für die Multiplikation)

Negative Zahlen (3 Stellen)

	a	$-a$	
0	000	000	0
1	001	**111**	-1
2	010	**110**	-2
3	011	**101**	-3
4	100	**100**	-4
5	101		
6	110		
7	111		

Das höchste Bit entscheidet über das Vorzeichen *und* es trägt zum Zahlwert bei.

Zweierkomplement

- Negation durch bitweise Negation und Addition von 1.

$$-2 = -[0010] = [1101] + [0001] = [1110]$$

  - Arithmetik der Addition und Subtraktion *identisch* zur vorzeichenlosen Arithmetik.

$$3 - 2 = 3 + (-2) = [0011] + [1110] = [0001]$$

  - Intuitive „Wrap-Around“ Konversion negativer Zahlen.

$$-n \to 2^B - n$$

  - Wertebereich: $-2^{B-1} \ldots 2^{B-1} - 1$