4. Wahrheitswerte

Boolesche Funktionen; der Typ `bool`; logische und relationale Operatoren; Kurzschlussauswertung

Wo wollen wir hin?

```
int a;
std::cin >> a;
if (a % 2 == 0)
    std::cout << "even";
else
    std::cout << "odd";
```

Verhalten hängt ab vom Wert eines Booleschen Ausdrucks

Boolesche Werte in der Mathematik

Boolesche Ausdrücke können zwei mögliche Werte annehmen:

0 oder *1*

- *0* entspricht *„falsch"*
- *1* entspricht *„wahr"*

Der Typ `bool` in C++

- Repräsentiert *Wahrheitswerte*
- Literale `false` und `true`
- Wertebereich {*false*, *true*}

```
bool b = true; // Variable mit Wert true (wahr)
```

Relationale Operatoren

`a < b` (kleiner als)
`a >= b` (grösser gleich)
`a == b` (gleich)
`a != b` (ungleich)

Zahlentyp $\times$ Zahlentyp $\to$ `bool`

R-Wert $\times$ R-Wert $\to$ R-Wert

Relationale Operatoren: Tabelle

	Symbol	Stelligkeit	Präzedenz	Assoziativität
Kleiner	<	2	11	links
Grösser	>	2	11	links
Kleiner gleich	<=	2	11	links
Grösser gleich	>=	2	11	links
Gleich	==	2	10	links
Ungleich	!=	2	10	links

Zahlentyp $\times$ Zahlentyp $\to$ `bool`

R-Wert $\times$ R-Wert $\to$ R-Wert

Boolesche Funktionen in der Mathematik

- Boolesche Funktion

$$f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

- 0 entspricht „falsch”.
- 1 entspricht „wahr”.

$\mathrm{AND}(x, y)$ $x \wedge y$

- “Logisches Und”

$$f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

- 0 entspricht „falsch”.
- entspricht „wahr”.

x	y	$\mathrm{AND}(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Logischer Operator &&

`a && b` (logisches Und)

`bool` × `bool` → `bool`

R-Wert × R-Wert → R-Wert

```
int n = −1;
int p = 3;
bool b = (n < 0) && (0 < p); // b = true (wahr)
```


$\mathrm{OR}(x, y)$ $x \vee y$

- "Logisches Oder"

$$f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

- 0 entspricht „falsch".
- entspricht „wahr".

x	y	$\mathrm{OR}(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Logischer Operator ||

`a || b` (logisches Oder)

`bool` × `bool` → `bool`

R-Wert × R-Wert → R-Wert

```
int n = 1;
int p = 0;
bool b = (n < 0) || (0 < p); // b = false (falsch)
```


$\mathrm{NOT}(x)$ $\neg x$

- "Logisches Nicht"

$$f : \{0,1\} \to \{0,1\}$$

- 0 entspricht „falsch".
- entspricht „wahr".

x	$\mathrm{NOT}(x)$
0	1
1	0

Logischer Operator !

`!b` (logisches Nicht)

`bool` → `bool`

R-Wert → R-Wert

```
int n = 1;
bool b = !(n < 0); // b = true (wahr)
```


Präzedenzen

```
!b && a
   ⇕
(!b) && a

a && b || c && d
      ⇕
(a && b) || (c && d)

a || b   &&   c || d
      ⇕
a || (b && c) || d
```


Logische Operatoren: Tabelle

	Symbol	Stelligkeit	Präzedenz	Assoziativität
Logisches Und (AND)	&&	2	6	links
Logisches Oder (OR)	||	2	5	links
Logisches Nicht (NOT)	!	1	16	rechts

Präzedenzen

Der unäre logische Operator `!`

bindet stärker als

binäre arithmetische Operatoren. Diese

binden stärker als

relationale Operatoren,

und diese binden stärker als

binäre logische Operatoren.

```
7 + x < y && y != 3 * z || ! b
7 + x < y && y != 3 * z || (!b)
```

Vollständigkeit

- AND, OR und NOT sind die in C++ verfügbaren Booleschen Funktionen.
- Alle anderen *binären* Booleschen Funktionen sind daraus erzeugbar.

x	y	$\mathrm{XOR}(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Vollständigkeit: $\mathrm{XOR}(x, y)$

$x \oplus y$

$$\mathrm{XOR}(x, y) = \mathrm{AND}(\mathrm{OR}(x, y), \mathrm{NOT}(\mathrm{AND}(x, y))).$$

$$x \oplus y = (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y).$$

```
(x || y) && !(x && y)
```


Vollständigkeit Beweis

- Identifiziere binäre Boolesche Funktionen mit ihrem charakteristischen Vektor.

x	y	$\mathrm{XOR}(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Charakteristischer Vektor: 0110

$$\mathrm{XOR} = f_{0110}$$

Vollständigkeit Beweis

- Schritt 1: erzeuge die *elementaren* Funktionen f_{0001}, f_{0010}, f_{0100}, f_{1000}

$$f_{0001} = \mathrm{AND}(x, y)$$
$$f_{0010} = \mathrm{AND}(x, \mathrm{NOT}(y))$$
$$f_{0100} = \mathrm{AND}(y, \mathrm{NOT}(x))$$
$$f_{1000} = \mathrm{NOT}(\mathrm{OR}(x, y))$$

Vollständigkeit Beweis

- Schritt 2: erzeuge alle Funktionen durch “Veroderung” elementarer Funktionen

$$f_{1101} = \mathrm{OR}(f_{1000}, \mathrm{OR}(f_{0100}, f_{0001}))$$

- Schritt 3: erzeuge f_{0000}

$$f_{0000} = 0.$$

`bool` vs `int`: Konversion

- `bool` kann überall dort verwendet werden, wo `int` gefordert ist – und umgekehrt.
- Viele existierende Programme verwenden statt `bool` den Typ `int`.
  Das ist schlechter Stil, der noch auf die Sprache C zurückgeht.

`bool`	→ `int`
true	→ 1
false	→ 0

`int`	→ `bool`
≠0	→ *true*
0	→ *false*

```
bool b = 3; // b=true
```


DeMorgansche Regeln

- `!(a && b) == (!a || !b)`
- `!(a || b) == (!a && !b)`

! (reich *und* schön) == (arm *oder* hässlich)

Anwendung: Entweder ... Oder (XOR)

`(x || y)`	`&& !(x && y)`	x oder y, und nicht beide
`(x || y)`	`&& (!x || !y)`	x oder y, und eines nicht
`!(!x && !y)`	`&& !(x && y)`	nicht keines, und nicht beide
`!(!x && !y || x && y)`		nicht: keines oder beide

Kurzschlussauswertung

- Logische Operatoren `&&` und `||` werten den *linken Operanden zuerst* aus.
- Falls das Ergebnis dann schon feststeht, wird der rechte Operand *nicht mehr* ausgewertet.

```
x != 0 && z / x > y
```

⇒ Keine Division durch 0

Fehlerquellen

- Fehler, die der Compiler findet:
  syntaktische und manche semantische Fehler
- Fehler, die der Compiler nicht findet:
  Laufzeitfehler (immer semantisch)

Fehlerquellen vermeiden

1. Genaue Kenntnis des gewünschten Programmverhaltens

   ≫ It's not a bug, it's a feature !!≪
2. Überprüfe an vielen kritischen Stellen, ob das Programm auf dem richtigen Weg ist!
3. Hinterfrage auch das (scheinbar) Offensichtliche, es könnte sich ein simpler Tippfehler eingeschlichen haben!

Gegen Laufzeitfehler: *Assertions*

```
assert(expr)
```

- hält das Programm an, falls der boolesche Ausdruck `expr` nicht wahr ist
- benötigt `#include <cassert>`
- kann abgeschaltet werden

DeMorgansche Regeln

Hinterfrage das Offensichtliche! Hinterfrage das scheinbar Offensichtliche!

```
// Prog: assertion.cpp
// use assertions to check De Morgan's laws

#include<cassert>

int main()
{
  bool x; // whatever x and y actually are,
  bool y; // De Morgan's laws will hold:
  assert ( !(x && y) == (!x || !y) );
  assert ( !(x || y) == (!x && !y) );
  return 0;
}
```


Assertions abschalten

```
// Prog: assertion2.cpp
// use assertions to check De Morgan's laws. To tell the
// compiler to ignore them, #define NDEBUG ("no debugging")
// at the beginning of the program, before the #includes

#define NDEBUG
#include<cassert>

int main()
{
  bool x; // whatever x and y actually are,
  bool y; // De Morgan's laws will hold:
  assert ( !(x && y) == (!x || !y) );  // ignored by NDEBUG
  assert ( !(x || y) == (!x && !y) );  // ignored by NDEBUG
  return 0;
}
```


Div-Mod Identität `a/b * b + a%b == a`

Überprüfe, ob das Programm auf dem richtigen Weg ist...

```
std::cout << "Dividend a =? ";
int a;
std::cin >> a;

std::cout << "Divisor b =? ";
int b;
std::cin >> b;

// check input
assert (b != 0);
```

Eingabe der Argumente für die Berechnung

Vorbedingung für die weitere Berechnung

Div-Mod Identität `a/b * b + a%b == a`

...und hinterfrage das Offensichtliche!

```
// check input
assert (b != 0);

// compute result
int div = a / b;
int mod = a % b;

// check result
assert (div * b + mod == a);
...
```

Vorbedingung für die weitere Berechnung

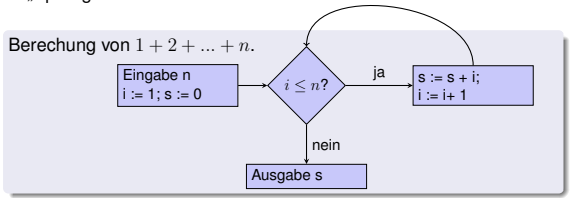
Div-Mod Identität

5. Kontrollanweisungen I

Auswahlanweisungen, Iterationsanweisungen, Terminierung, Blöcke

Kontrollfluss

- bisher *linear* (von oben nach unten)
- Für interessante Programme braucht man „Verzweigungen” und „Sprünge”.



Auswahlanweisungen

realisieren Verzweigungen

- `if` Anweisung
- `if-else` Anweisung

`if`-Anweisung

`if` (*condition*)
statement

```
int a;
std::cin >> a;
if (a % 2 == 0)
    std::cout << "even";
```

Ist *condition* wahr, dann wird *statement* ausgeführt.

- *statement*: beliebige Anweisung (*Rumpf* der `if`-Anweisung)
- *condition*: konvertierbar nach `bool`

`if-else`-Anweisung

`if` (*condition*)
  statement1
`else`
  statement2

```
int a;
std::cin >> a;
if (a % 2 == 0)
    std::cout << "even";
else
    std::cout << "odd";
```

Ist *condition* wahr, so wird *statement1* ausgeführt, andernfalls wird *statement2* ausgeführt.

- *condition*: konvertierbar nach `bool`.
- *statement1*: *Rumpf* des `if`-Zweiges
- *statement2*: *Rumpf* des `else`-Zweiges

Layout!

```
int a;
std::cin >> a;
if (a % 2 == 0)
    std::cout << "even";
else
    std::cout << "odd";
```

Einrückung

Einrückung

Iterationsanweisungen

realisieren „Schleifen”:

- `for`-Anweisung
- `while`-Anweisung
- `do`-Anweisung

Berechne $1 + 2 + ... + n$

```
// Program: sum_n.cpp
// Compute the sum of the first n natural numbers.

#include <iostream>

int main()
{
  // input
  std::cout << "Compute the sum 1+...+n for n =? ";
  unsigned int n;
  std::cin >> n;

  // computation of sum_{i=1}^n i
  unsigned int s = 0;
  for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i) s += i;

  // output
  std::cout << "1+...+" << n << " = " << s << ".\n";
  return 0;
}
```

`for`-Anweisung am Beispiel

```
for ( unsigned int i=1; i <= n ; ++i )
    s += i;
```

Annahmen: `n == 2`, `s == 0`

`i`		`s`
`i==1`	wahr	`s == 1`
`i==2`	wahr	`s == 3`
`i==3`	falsch	

`s == 3`

`for`-Anweisung: Syntax

`for` (*init statement* *condition* ; *expression*)
statement

- *init-statement*: Ausdrucksanweisung, Deklarationsanweisung, Nullanweisung
- *condition*: konvertierbar nach bool
- *expression*: beliebiger Ausdruck
- *statement* : beliebige Anweisung (*Rumpf* der for-Anweisung)

`for`-Anweisung: Semantik

`for` (*init statement* *condition* ; *expression*)
statement

- *init-statement* wird ausgeführt
- *condition* wird ausgewertet
  - `true`: Iteration beginnt
    statement wird ausgeführt
    expression wird ausgeführt
  - falsch: `for`-Anweisung wird beendet.

Der kleine Gauß (1777 - 1855)

- Mathe-Lehrer wollte seine Schüler mit folgender Aufgabe beschäftigen:

Berechne die Summe der Zahlen von 1 bis 100 !

- Gauß war nach einer Minute fertig.

Die Lösung von Gauß

- Die gesuchte Zahl ist

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100.$$

- Das ist die Hälfte von

$$\begin{array}{rcrcccrcr} & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ + & 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline = & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

- Antwort: $100 \cdot 101/2 = 5050$

`for`-Anweisung: Terminierung

```
for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i)
    s += i;
```

Hier und meistens:

- *expression* ändert einen Wert, der in *condition* vorkommt.
- Nach endlich vielen Iterationen wird *condition* falsch: *Terminierung*.

Endlosschleifen

- Endlosschleifen sind leicht zu produzieren:

```
for ( ; ; ) ;
```

  - Die *leere condition* ist wahr.
  - Die *leere expression* hat keinen Effekt.
  - Die *Nullanweisung* hat keinen Effekt.

- ... aber nicht automatisch zu erkennen.

```
for ( e; v; e) r;
```


Halteproblem

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Es gibt kein C++ Programm, das für jedes C++- Programm P und jede Eingabe I korrekt feststellen kann, ob das Programm P bei Eingabe von I terminiert.

Das heisst, die Korrektheit von Programmen kann *nicht* automatisch überprüft werden.[5]

[5] Alan Turing, 1936. Theoretische Fragestellungen dieser Art waren für Alan Turing die Hauptmotivation für die Konstruktion seiner Rechenmaschine.

Beispiel: Primzahltest

Def.: Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ ist eine Primzahl, wenn kein $d \in \{2, \ldots, n-1\}$ ein Teiler von n ist.

Eine Schleife, die das testet:

```
unsigned int d;
for (d=2; n%d != 0; ++d);
```

- Beobachtung 1:
  Nach der `for`-Anweisung gilt $d \leq n$.
- Beobachtung 2:
  n ist Primzahl genau wenn am Ende $d = n$.

Blöcke

- Blöcke gruppieren mehrere Anweisungen zu einer neuen Anweisung

  ```
  {statement1 statement2 ... statementN}
  ```

- Beispiel: Rumpf der main Funktion

  ```
  int main() {
      ...
  }
  ```

- Beispiel: Schleifenrumpf

  ```
  for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i) {
      s += i;
      std::cout << "partial sum is " << s << "\n";
  }
  ```