8. Fliesskommazahlen II

Fliesskommazahlensysteme; IEEE Standard; Grenzen der Fliesskommaarithmetik; Fliesskomma-Richtlinien; Harmonische Zahlen

Fliesskommazahlensysteme

Ein Fliesskommazahlensystem ist durch vier natürliche Zahlen definiert:

- $\beta \geq 2$, die Basis,
- $p \geq 1$, die Präzision (Stellenzahl),
- $e_{\min}$, der kleinste Exponent,
- $e_{\max}$, der grösste Exponent.

Fliesskommazahlensysteme

Ein Fliesskommazahlensystem ist durch vier natürliche Zahlen definiert:

- $\beta \geq 2$, die Basis,
- $p \geq 1$, die Präzision (Stellenzahl),
- $e_{\min}$, der kleinste Exponent,
- $e_{\max}$, der grösste Exponent.

Bezeichnung:

$$F(\beta, p, e_{\min}, e_{\max})$$

Fliesskommazahlensysteme

$F(\beta, p, e_{\min}, e_{\max})$ enthält die Zahlen

$$\pm \sum_{i=0}^{p-1} d_i \beta^{-i} \cdot \beta^e,$$

$d_i \in \{0, \ldots, \beta - 1\}, \quad e \in \{e_{\min}, \ldots, e_{\max}\}.$

Fliesskommazahlensysteme

$F(\beta, p, e_{\min}, e_{\max})$ enthält die Zahlen

$$\pm \sum_{i=0}^{p-1} d_i \beta^{-i} \cdot \beta^e,$$

$$d_i \in \{0, \ldots, \beta - 1\}, \quad e \in \{e_{\min}, \ldots, e_{\max}\}.$$

In Basis-β-Darstellung:

$$\pm\, d_0 \bullet d_1 \ldots d_{p-1} \times \beta^e,$$

Fliesskommazahlensysteme

Darstellungen der Dezimalzahl 0.1 (mit $\beta = 10$):

$$1.0 \cdot 10^{-1}, \quad 0.1 \cdot 10^{0}, \quad 0.01 \cdot 10^{1}, \quad \ldots$$

Unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten durch Wahl des Exponenten

Normalisierte Darstellung

Normalisierte Zahl:

$$\pm\, d_0 \bullet d_1 \ldots d_{p-1} \times \beta^e, \qquad d_0 \neq 0$$

Normalisierte Darstellung

Normalisierte Zahl:

$$\pm\, d_0 \bullet d_1 \ldots d_{p-1} \times \beta^e, \qquad d_0 \neq 0$$

Bemerkung 1

Die normalisierte Darstellung ist eindeutig und deshalb zu bevorzugen.

Normalisierte Darstellung

Normalisierte Zahl:

$$\pm\, d_0 \bullet d_1 \ldots d_{p-1} \times \beta^e, \qquad d_0 \neq 0$$

Bemerkung 2

Die Zahl 0, sowie alle Zahlen kleiner als $\beta^{e_{\min}}$, haben keine normalisierte Darstellung (greifen wir später wieder auf)

Menge der normalisierten Zahlen

$$F^*(\beta, p, e_{\min}, e_{\max})$$

Normalisierte Darstellung

Beispiel $F^*(2, 3, -2, 2)$ (nur positive Zahlen)

$d_0 \bullet d_1 d_2$	$e = -2$	$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$	$e = 2$
1.00_2	0.25	0.5	1	2	4
1.01_2	0.3125	0.625	1.25	2.5	5
1.10_2	0.375	0.75	1.5	3	6
1.11_2	0.4375	0.875	1.75	3.5	7

Normalisierte Darstellung

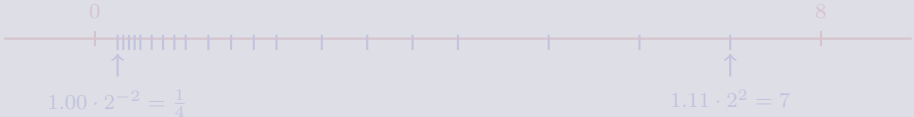
Beispiel $F^*(2, 3, -2, 2)$ (nur positive Zahlen)

$d_0 \bullet d_1 d_2$	$e = -2$	$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$	$e = 2$
$\mathbf{1.00_2}$	0.25	0.5	1	2	4
$\mathbf{1.01_2}$	0.3125	0.625	1.25	2.5	5
$\mathbf{1.10_2}$	0.375	0.75	1.5	3	6
$\mathbf{1.11_2}$	0.4375	0.875	1.75	3.5	7

Normalisierte Darstellung

Beispiel $F^*(2, 3, -2, 2)$ (nur positive Zahlen)

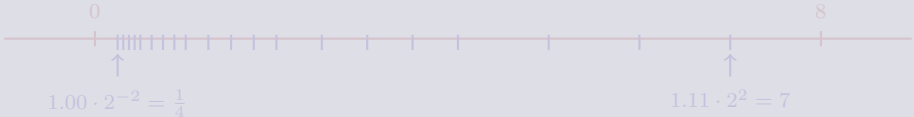
$d_0{\bullet}d_1d_2$	$\mathbf{e = -2}$	$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$	$e = 2$
1.00_2	0.25	0.5	1	2	4
1.01_2	0.3125	0.625	1.25	2.5	5
1.10_2	0.375	0.75	1.5	3	6
1.11_2	0.4375	0.875	1.75	3.5	7



Normalisierte Darstellung

Beispiel $F^*(2, 3, -2, 2)$ (nur positive Zahlen)

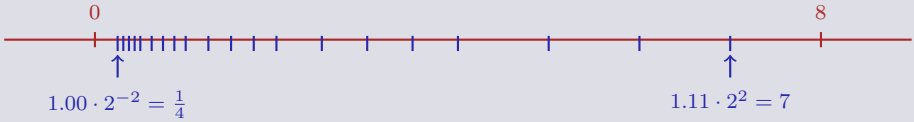
$d_0 \bullet d_1 d_2$	$e = -2$	$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$	$\mathbf{e = 2}$
1.00_2	0.25	0.5	1	2	4
1.01_2	0.3125	0.625	1.25	2.5	5
1.10_2	0.375	0.75	1.5	3	6
1.11_2	0.4375	0.875	1.75	3.5	7



Normalisierte Darstellung

Beispiel $F^*(2, 3, -2, 2)$ (nur positive Zahlen)

$d_0 \bullet d_1 d_2$	$e = -2$	$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$	$e = 2$
1.00_2	0.25	0.5	1	2	4
1.01_2	0.3125	0.625	1.25	2.5	5
1.10_2	0.375	0.75	1.5	3	6
1.11_2	0.4375	0.875	1.75	3.5	7



Binäre und dezimale Systeme

- Intern rechnet der Computer mit $\beta = 2$ (binäres System)
- Literale und Eingaben haben $\beta = 10$ (dezimales System)

Binäre und dezimale Systeme

- Intern rechnet der Computer mit $\beta = 2$ (binäres System)
- Literale und Eingaben haben $\beta = 10$ (dezimales System)

Umrechnung $(0 < x < 2)$

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

Umrechnung $(0 < x < 2)$

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$x = b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots$$

Umrechnung ($0 < x < 2$)

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$\begin{aligned} x &= b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots \\ &= b_0 + 0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots \end{aligned}$$

Umrechnung $(0 < x < 2)$

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$\begin{aligned} x &= b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots \\ &= b_0 + 0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots \\ &\Longrightarrow \end{aligned}$$

Umrechnung $(0 < x < 2)$

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$\begin{aligned} x &= b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots \\ &= b_0 + 0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots \\ &\Longrightarrow \\ (x - b_0) &= 0 \bullet b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots \end{aligned}$$

Umrechnung $(0 < x < 2)$

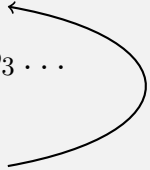
Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$\begin{aligned} x &= b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots \\ &= b_0 + 0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots \\ &\Longrightarrow \\ 2 \cdot (x - b_0) &= b_1 \bullet b_2 b_3 b_4 \ldots \end{aligned}$$

Umrechnung $(0 < x < 2)$

Berechnung der *Binärdarstellung*:

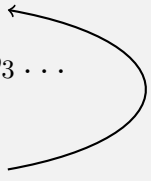
$$
\begin{aligned}
x &= b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots \\
&= b_0 + 0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - b_0) &= b_1 \bullet b_2 b_3 b_4 \ldots
\end{aligned}
$$



Umrechnung $(0 < x < 2)$

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$
\begin{aligned}
x &= b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots \\
&= b_0 + 0 \bullet b_1 b_2 b_3 \ldots \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - b_0) &= b_1 \bullet b_2 b_3 b_4 \ldots
\end{aligned}
$$



```
for (int b_0; x != 0; x = 2 * (x - b_0)) {
  b_0 = (x >= 1);
  std::cout << b_0;
}
```

Beispiel (binär)

$$
\begin{aligned}
x &= 1.01011 \\
&= 1 + 0.01011 \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - 1) &= 0.1011
\end{aligned}
$$

Beispiel (binär)

$$
\begin{aligned}
x &= 1.\mathbf{01011} \\
&= 1 + 0.01011 \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - 1) &= \mathbf{0.1011}
\end{aligned}
$$

Beispiel (binär)

$$
\begin{aligned}
x &= \mathbf{0}.1011 \\
&= \mathbf{0} + 0.1011 \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - \mathbf{0}) &= 1.011
\end{aligned}
$$

Beispiel (binär)

$$
\begin{aligned}
x &= 0.\mathbf{1011} \\
&= 0 + 0.1011 \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - 0) &= \mathbf{1.011}
\end{aligned}
$$

Beispiel (binär)

$$
\begin{aligned}
x &= 1.011 \\
&= 1 + 0.011 \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - 1) &= 0.11
\end{aligned}
$$

Beispiel (binär)

$$
\begin{aligned}
x &= 1.\mathbf{011} \\
&= 1 + 0.011 \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - 1) &= \mathbf{0.11}
\end{aligned}
$$

Beispiel (binär)

$$
\begin{aligned}
x &= \mathbf{0}.11 \\
&= \mathbf{0} + 0.11 \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - \mathbf{0}) &= 1.1
\end{aligned}
$$

Beispiel (binär)

$$
\begin{aligned}
x &= 0.\mathbf{11} \\
&= 0 + 0.11 \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - 0) &= \mathbf{1.1}
\end{aligned}
$$

Beispiel (binär)

$$
\begin{aligned}
x &= 1.1 \\
&= 1 + 0.1 \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - 1) &= 1
\end{aligned}
$$

Beispiel (binär)

$$
\begin{aligned}
x &= 1.\mathbf{1} \\
&= 1 + 0.1 \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - 1) &= \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Beispiel (binär)

$$
\begin{aligned}
x &= 1 \\
&= 1 + 0 \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - 1) &= 0
\end{aligned}
$$

Beispiel (binär)

$$
\begin{aligned}
x &= 1 \\
&= 1 + 0 \\
&\Longrightarrow \\
2 \cdot (x - 1) &= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x		b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 =$	$\mathbf{1}$		

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$		

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$		

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$		

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6
1.6	$b_4 = \mathbf{1}$		

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6
1.6	$b_4 = \mathbf{1}$	0.6	1.2

Binärdarstellung von 1.1_{10}

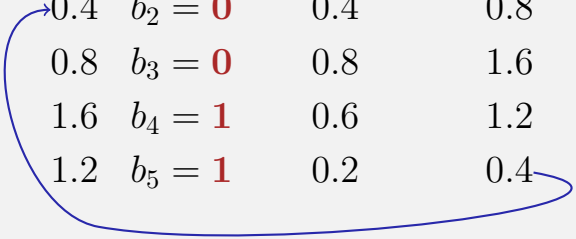
x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6
1.6	$b_4 = \mathbf{1}$	0.6	1.2
1.2	$b_5 = \mathbf{1}$		

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6
1.6	$b_4 = \mathbf{1}$	0.6	1.2
1.2	$b_5 = \mathbf{1}$	0.2	0.4

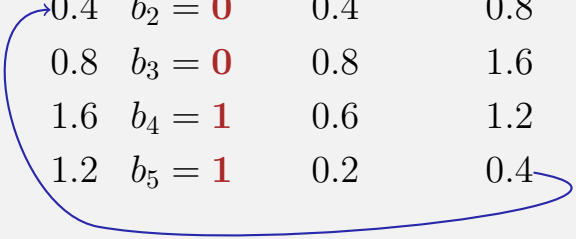
Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6
1.6	$b_4 = \mathbf{1}$	0.6	1.2
1.2	$b_5 = \mathbf{1}$	0.2	0.4



Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6
1.6	$b_4 = \mathbf{1}$	0.6	1.2
1.2	$b_5 = \mathbf{1}$	0.2	0.4



$\Rightarrow 1.0\overline{0011}$, periodisch, *nicht* endlich

Binärdarstellungen von 1.1 und 0.1

- sind nicht endlich $\Rightarrow$ Fehler bei der Konversion
- `1.1f` und `0.1f`: *Approximationen* von 1.1 und 0.1
- In `diff.cpp`: $1.1 - 1.0 \neq 0.1$

Binärdarstellungen von 1.1 und 0.1

- sind nicht endlich $\Rightarrow$ Fehler bei der Konversion
- `1.1f` und `0.1f`: *Approximationen* von 1.1 und 0.1
- In `diff.cpp`: $1.1 - 1.0 \neq 0.1$

Binärdarstellungen von 1.1 und 0.1

- sind nicht endlich $\Rightarrow$ Fehler bei der Konversion
- `1.1f` und `0.1f`: *Approximationen* von 1.1 und 0.1
- In `diff.cpp`: $1.1 - 1.0 \neq 0.1$

Binärdarstellungen von 1.1 und 0.1

auf meinem Computer:

$$\begin{aligned} \texttt{1.1} &= \underline{1.1000000000000000}888178\ldots \\ \texttt{1.1f} &= \underline{1.1000000}238418\ldots \end{aligned}$$

Rechnen mit Fliesskommazahlen

ist fast so einfach wie mit ganzen Zahlen.

Rechnen mit Fliesskommazahlen

Beispiel ($\beta = 2$, $p = 4$):

$$\begin{aligned} & 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + \quad & 1.011 \cdot 2^{-1} \end{aligned}$$

1. Exponenten anpassen durch Denormalisieren einer Zahl

Rechnen mit Fliesskommazahlen

Beispiel ($\beta = 2$, $p = 4$):

$$\begin{aligned} & 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + \quad & 10.110 \cdot 2^{-2} \checkmark \end{aligned}$$

1. Exponenten anpassen durch Denormalisieren einer Zahl

Rechnen mit Fliesskommazahlen

Beispiel ($\beta = 2$, $p = 4$):

$$\begin{array}{rr} & 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + & 10.110 \cdot 2^{-2} \\ \hline & \end{array}$$

2. Binäre Addition der Signifikanden

Rechnen mit Fliesskommazahlen

Beispiel ($\beta = 2$, $p = 4$):

$$\begin{aligned} & 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + \quad & 10.110 \cdot 2^{-2} \\ \hline = \; & 100.101 \cdot 2^{-2} \checkmark \end{aligned}$$

2. Binäre Addition der Signifikanden

Rechnen mit Fliesskommazahlen

Beispiel ($\beta = 2$, $p = 4$):

$$\begin{array}{rl} & 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + & 10.110 \cdot 2^{-2} \\ \hline & = 100.101 \cdot 2^{-2} \end{array}$$

3. Renormalisierung

Rechnen mit Fliesskommazahlen

Beispiel ($\beta = 2$, $p = 4$):

$$\begin{aligned} & 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + \quad & 10.110 \cdot 2^{-2} \\ \hline = \; & 1.00101 \cdot 2^{0} \checkmark \end{aligned}$$

3. Renormalisierung

Rechnen mit Fliesskommazahlen

Beispiel ($\beta = 2$, $p = 4$):

$$\begin{aligned} & 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + \quad & 10.110 \cdot 2^{-2} \\ \hline & = 1.00101 \cdot 2^{0} \end{aligned}$$

4. Runden auf p signifikante Stellen, falls nötig

Rechnen mit Fliesskommazahlen

Beispiel ($\beta = 2$, $p = 4$):

$$\begin{aligned} & 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + \quad & 10.110 \cdot 2^{-2} \\ \hline & = 1.001 \cdot 2^{0} \checkmark \end{aligned}$$

4. Runden auf p signifikante Stellen, falls nötig

Der IEEE Standard 754

- legt Fliesskommazahlensysteme und deren Rundungsverhalten fest
- wird fast überall benutzt

Der IEEE Standard 754

- legt Fliesskommazahlensysteme und deren Rundungsverhalten fest
- wird fast überall benutzt

Der IEEE Standard 754

- Single precision (`float`) Zahlen:

  $F^*(2, 24, -126, 127)$ (32 bit) plus $0, \infty, \ldots$

- Double precision (`double`) Zahlen:

  $F^*(2, 53, -1022, 1023)$ (64 bit) plus $0, \infty, \ldots$

- Alle arithmetischen Operationen runden das *exakte* Ergebnis auf die nächste darstellbare Zahl

Der IEEE Standard 754

- Single precision (`float`) Zahlen:

  $F^*(2, 24, -126, 127)$ (32 bit) plus $0, \infty, \ldots$

- Double precision (`double`) Zahlen:

  $F^*(2, 53, -1022, 1023)$ (64 bit) plus $0, \infty, \ldots$

- Alle arithmetischen Operationen runden das *exakte* Ergebnis auf die nächste darstellbare Zahl

Beispiel: 32-bit Darstellung einer Fliesskommazahl

$\pm$ Exponent Mantisse

$$\pm \begin{matrix} 2^{-126}, \ldots, 2^{127} \\ 0, \infty, \ldots \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1.00000000000000000000000 \\ \vdots \\ 1.11111111111111111111111 \end{matrix}$$

Regel 1

Teste keine gerundeten Fliesskommazahlen auf Gleichheit!

```
for (float i = 0.1; i != 1.0; i += 0.1)
    std::cout << i << "\n";
```

Regel 1

Teste keine gerundeten Fliesskommazahlen auf Gleichheit!

```
for (float i = 0.1; i != 1.0; i += 0.1)
    std::cout << i << "\n";
```

Regel 1

Teste keine gerundeten Fliesskommazahlen auf Gleichheit!

```
for (float i = 0.1; i != 1.0; i += 0.1)
    std::cout << i << "\n";
```

Endlosschleife, weil i niemals exakt 1 ist!

Regel 2

Addiere keine zwei Zahlen sehr unterschiedlicher Grösse!

Regel 2

Addiere keine zwei Zahlen sehr unterschiedlicher Grösse!

$$\begin{aligned} & 1.000 \cdot 2^5 \\ +& 1.000 \cdot 2^0 \end{aligned}$$

Regel 2

Addiere keine zwei Zahlen sehr unterschiedlicher Grösse!

$$
\begin{aligned}
& 1.000 \cdot 2^5 \\
+ & 1.000 \cdot 2^0 \\
= & \ 1.00001 \cdot 2^5
\end{aligned}
$$

Regel 2

Addiere keine zwei Zahlen sehr unterschiedlicher Grösse!

$$
\begin{aligned}
& 1.000 \cdot 2^5 \\
+ & 1.000 \cdot 2^0 \\
= & \ 1.00001 \cdot 2^5 \\
\text{„=“} & \ 1.000 \cdot 2^5 \quad \text{(Rundung auf 4 Stellen)}
\end{aligned}
$$

Regel 2

Addiere keine zwei Zahlen sehr unterschiedlicher Grösse!

$$
\begin{aligned}
& 1.000 \cdot 2^5 \\
+ & 1.000 \cdot 2^0 \\
= & \ 1.00001 \cdot 2^5 \\
\text{„=“} & \ 1.000 \cdot 2^5 \quad \text{(Rundung auf 4 Stellen)}
\end{aligned}
$$

Addition von 1 hat keinen Effekt!

- Die n-te Harmonische Zahl ist

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Harmonische Zahlen

Regel 2

- Die n-te Harmonische Zahl ist

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \ln n.$$

- Die n-te Harmonische Zahl ist

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \ln n.$$

- Diese Summe kann vorwärts oder rückwärts berechnet werden, was mathematisch gesehen natürlich äquivalent ist.

Harmonische Zahlen

Regel 2

```
std::cout << "Compute H_n for n =? ";
unsigned int n;
std::cin >> n;

float fs = 0;
for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i)
    fs += 1.0f / i;
std::cout << "Forward sum = " << fs << "\n";

float bs = 0;
for (unsigned int i = n; i >= 1; --i)
    bs += 1.0f / i;
std::cout << "Backward sum = " << bs << "\n";
```

Harmonische Zahlen


```
std::cout << "Compute H_n for n =? ";
unsigned int n;
std::cin >> n;

float fs = 0;
for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i)
    fs += 1.0f / i;
std::cout << "Forward sum = " << fs << "\n";

float bs = 0;
for (unsigned int i = n; i >= 1; --i)
    bs += 1.0f / i;
std::cout << "Backward sum = " << bs << "\n";
```

Eingabe: **10000000**

Vorwärts: **15.4037**

Rückwärts: **16.686**

Harmonische Zahlen


```
std::cout << "Compute H_n for n =? ";
unsigned int n;
std::cin >> n;

float fs = 0;
for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i)
    fs += 1.0f / i;
std::cout << "Forward sum = " << fs << "\n";

float bs = 0;
for (unsigned int i = n; i >= 1; --i)
    bs += 1.0f / i;
std::cout << "Backward sum = " << bs << "\n";
```

Eingabe: **100000000**

Vorwärts: **15.4037**

Rückwärts: **18.8079**

Beobachtung:

- Die Vorwärtssumme wächst irgendwann nicht mehr und ist „richtig“ falsch.
- Die Rückwärtssumme approximiert H_n gut.

Harmonische Zahlen — Regel 2

Beobachtung:

- Die Vorwärtssumme wächst irgendwann nicht mehr und ist „richtig“ falsch.
- Die Rückwärtssumme approximiert H_n gut.

Harmonische Zahlen

Regel 2

Beobachtung:

- Die Vorwärtssumme wächst irgendwann nicht mehr und ist „richtig“ falsch.
- Die Rückwärtssumme approximiert H_n gut.

Erklärung:

- Bei $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ sind späte Terme zu klein, um noch beizutragen.
- Problematik wie bei $2^5 + 1$ „=“ 2^5

Harmonische Zahlen

Regel 2

Beobachtung:

- Die Vorwärtssumme wächst irgendwann nicht mehr und ist „richtig“ falsch.
- Die Rückwärtssumme approximiert H_n gut.

Erklärung:

- Bei $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ sind späte Terme zu klein, um noch beizutragen.
- Problematik wie bei $2^5 + 1$ „=“ 2^5

Harmonische Zahlen

Regel 2

Beobachtung:

- Die Vorwärtssumme wächst irgendwann nicht mehr und ist „richtig“ falsch.
- Die Rückwärtssumme approximiert H_n gut.

Erklärung:

- Bei $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ sind späte Terme zu klein, um noch beizutragen.
- Problematik wie bei $2^5 + 1$ „=“ 2^5

Regel 3

Subtrahiere keine zwei Zahlen sehr ähnlicher Grösse!

Auslöschungsproblematik, siehe Skript.

Literatur

David Goldberg: What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic (1991)

Randy Glasbergen, 1996

9. Funktionen I

Funktionsdefinitionen- und Aufrufe, Auswertung von Funktionsaufrufen, Der Typ `void`

Potenzberechnung

```
double a;
int n;
std::cin >> a; // Eingabe a
std::cin >> n; // Eingabe n

double result = 1.0;
if (n < 0) { // a^n = (1/a)^(-n)
  a = 1.0/a;
  n = -n;
}
for (int i = 0; i < n; ++i)
  result *= a;

std::cout << a << "^" << n << " = " << result << ".\n";
```

Potenzberechnung

```
double a;
int n;
std::cin >> a; // Eingabe a
std::cin >> n; // Eingabe n

double result = 1.0;
if (n < 0) { // a^n = (1/a)^(-n)
  a = 1.0/a;
  n = -n;
}
for (int i = 0; i < n; ++i)
  result *= a;

std::cout << a << "^" << n << " = " << result << ".\n";
```

Potenzberechnung

```
double a;
int n;
std::cin >> a; // Eingabe a
std::cin >> n; // Eingabe n

double result = 1.0;
if (n < 0) { // a^n = (1/a)^(-n)
  a = 1.0/a;
  n = -n;
}
for (int i = 0; i < n; ++i)
  result *= a;

std::cout << a << "^" << n << " = " << pow(a,n) << ".\n";
```

"Funktion pow"

Funktion zur Potenzberechnung

```
// PRE: e >= 0 || b != 0.0
// POST: return value is b^e
double pow(double b, int e)
{
    double result = 1.0;
    if (e < 0) { // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e; ++i)
        result *= b;
    return result;
}
```

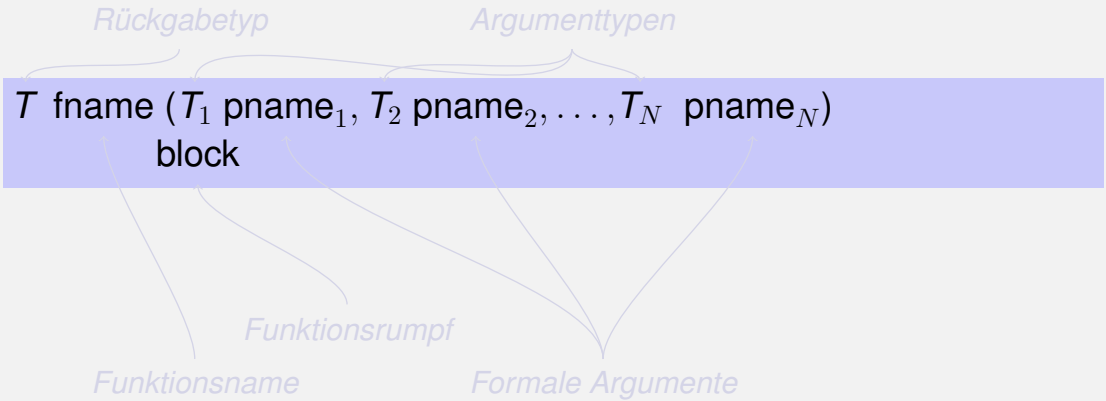
Funktion zur Potenzberechnung

```
double pow(double b, int e){...}
```

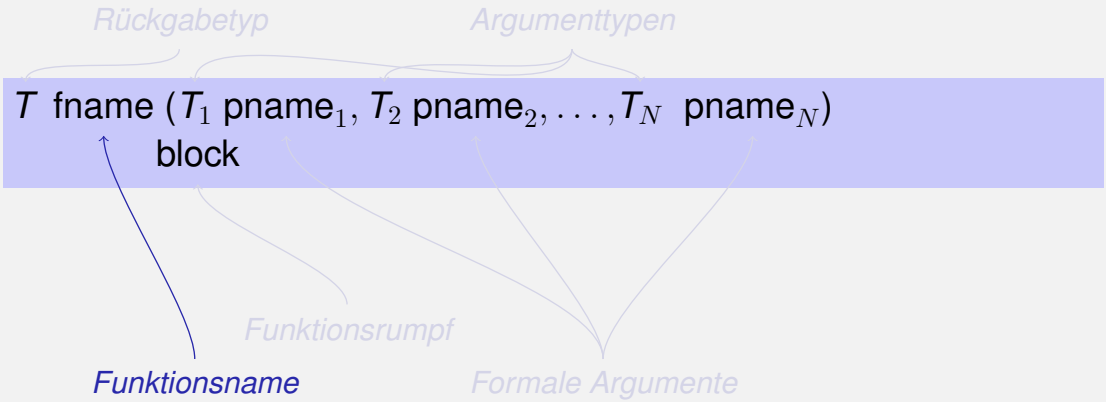
Funktion zur Potenzberechnung

```
// Prog: callpow.cpp
// Define and call a function for computing powers.
#include <iostream>

double pow(double b, int e){...}

int main()
{
  std::cout << pow( 2.0, −2) << "\n"; // outputs 0.25
  std::cout << pow( 1.5, 2) << "\n"; // outputs 2.25
  std::cout << pow(−2.0, 9) << "\n"; // outputs −512

  return 0;
}
```

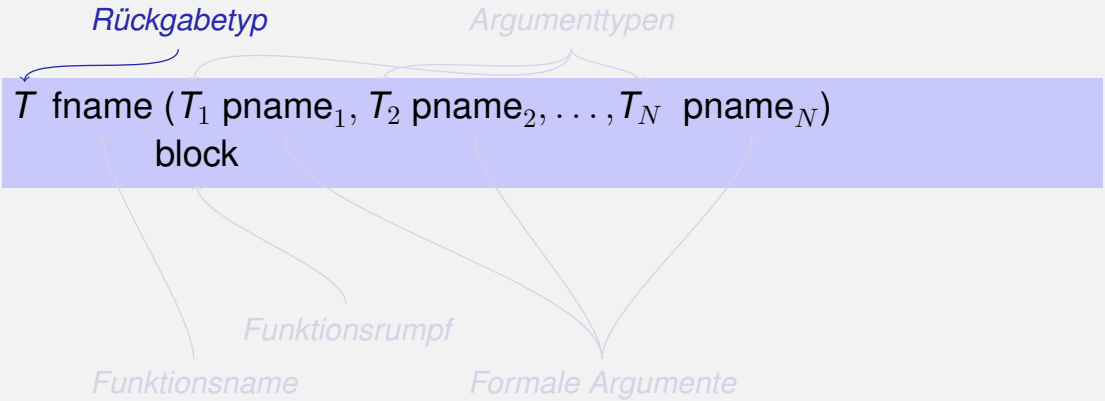
Funktionsdefinitionen



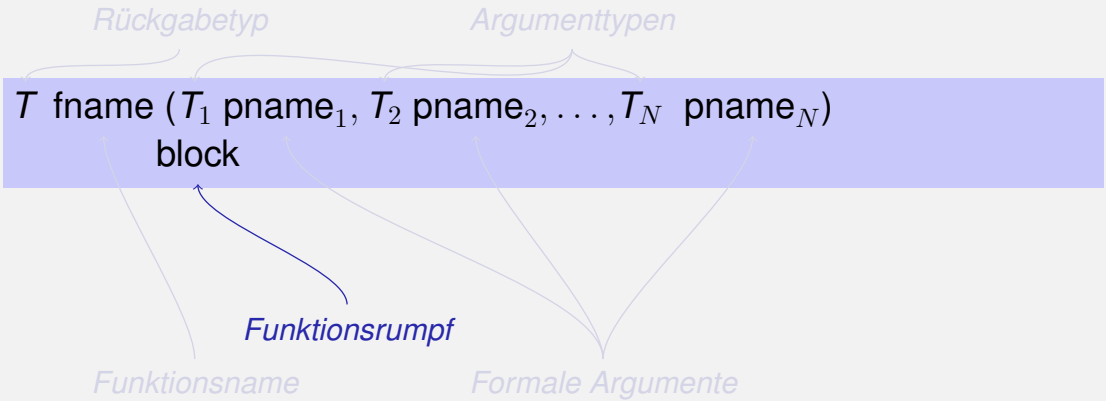
Funktionsdefinitionen



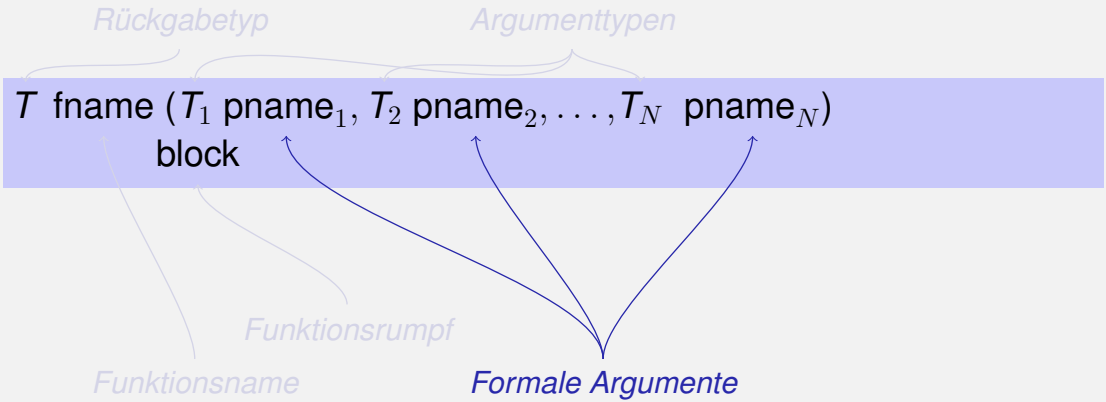
Funktionsdefinitionen



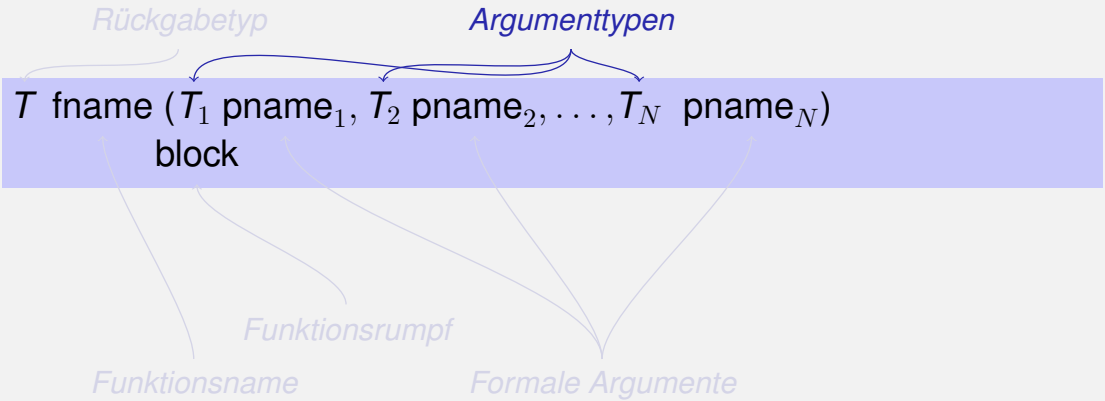
Funktionsdefinitionen



Funktionsdefinitionen



Funktionsdefinitionen



Xor

```
// post: returns l XOR r
bool Xor(bool l, bool r)
{
    return l != r;
}
```

Harmonic

```
// PRE: n >= 0
// POST: returns nth harmonic number
//       computed with backward sum
float Harmonic(int n)
{
    float res = 0;
    for (unsigned int i = n; i >= 1; --i)
        res += 1.0f / i;
    return res;
}
```

min

```
// POST: returns the minimum of a and b
int min(int a, int b)
{
    if (a<b)
        return a;
    else
        return b;
}
```

Funktionsaufrufe

fname ($expression_1$, $expression_2$, ..., $expression_N$)

- Alle Aufrufargumente müssen konvertierbar sein in die entsprechenden Argumenttypen.
- Der Funktionsaufruf selbst ist ein Ausdruck vom Rückgabetyp.

Beispiel: `pow(a,n)`: Ausdruck vom Typ `double`

Funktionsaufrufe

fname ($expression_1$, $expression_2$, ..., $expression_N$)

- Alle Aufrufargumente müssen konvertierbar sein in die entsprechenden Argumenttypen.
- Der Funktionsaufruf selbst ist ein Ausdruck vom Rückgabetyp.

Beispiel: `pow(a,n)`: Ausdruck vom Typ `double`

Funktionsaufrufe

fname ($expression_1$, $expression_2$, ..., $expression_N$)

- Alle Aufrufargumente müssen konvertierbar sein in die entsprechenden Argumenttypen.
- Der Funktionsaufruf selbst ist ein Ausdruck vom Rückgabetyp.

Beispiel: `pow(a,n)`: Ausdruck vom Typ `double`

Funktionsaufrufe

Für die Typen, die wir bisher kennen, gilt:

- Aufrufargumente sind R-Werte
  $\hookrightarrow$ *call-by-value* (auch *pass-by-value*), dazu gleich mehr
- Funktionsaufruf selbst ist R-Wert.

Funktionsaufrufe

Für die Typen, die wir bisher kennen, gilt:

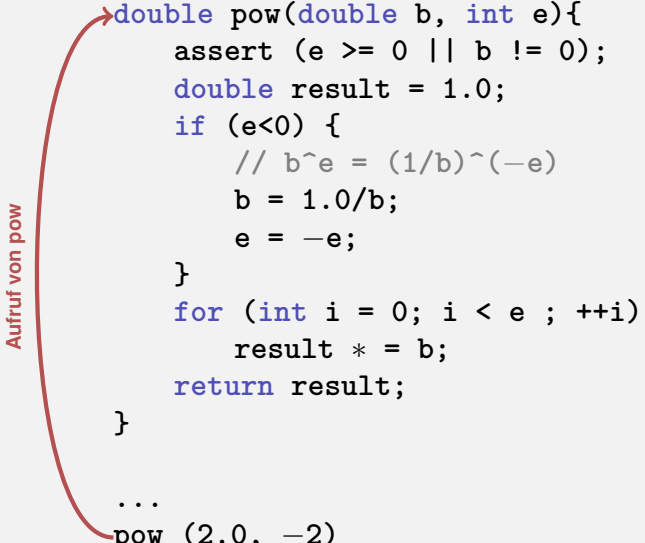
- Aufrufargumente sind R-Werte
  $\hookrightarrow$ *call-by-value* (auch *pass-by-value*), dazu gleich mehr
- Funktionsaufruf selbst ist R-Wert.

fname: R-Wert $\times$ R-Wert $\times \cdots \times$ R-Wert $\longrightarrow$ R-Wert

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf




```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```

b=2.0,e=-2

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```

b=2.0,e=-2

// ok

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```

result=1.0

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```

e == -2

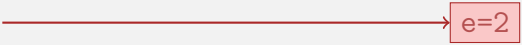
Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```

b=0.5

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```



Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```

i=0

result=0.5

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```

i=1

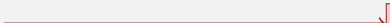
result=0.25

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```

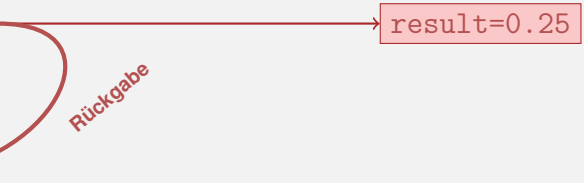
Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```



Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```



Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, -2)
```


Wert: 0.25

Gültigkeit formaler Argumente

```
int main(){
    double b = 2.0;
    int e = -2;
    double z = pow(b, e);

    std::cout << z; // 0.25
    std::cout << b; // 2
    std::cout << e; // -2
    return 0;
}
```

Gültigkeit formaler Argumente

```
double pow(double b, int e){
    double r = 1.0;
    if (e<0) {
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        r *= b;
    return r;
}
```

```
int main(){
    double b = 2.0;
    int e = -2;
    double z = pow(b, e);

    std::cout << z; // 0.25
    std::cout << b; // 2
    std::cout << e; // -2
    return 0;
}
```

Gültigkeit formaler Argumente

```
double pow(double b, int e){
    double r = 1.0;
    if (e<0) {
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        r *= b;
    return r;
}
```

```
int main(){
    double b = 2.0;
    int e = -2;
    double z = pow(b, e);

    std::cout << z; // 0.25
    std::cout << b; // 2
    std::cout << e; // -2
    return 0;
}
```

Nicht die formalen Argumente `b` und `e` von pow, sondern die hier definierten Variablen lokal zum Rumpf von `main`

Der Typ `void`

```
// POST: "(i, j)" has been written to standard output
???? print_pair(int i, int j) {
    std::cout << "(" << i << ", " << j << ")\n";
}

int main() {
    print_pair(3,4); // outputs (3, 4)
    return 0;
}
```

Der Typ `void`

```
// POST: "(i, j)" has been written to standard output
void print_pair(int i, int j) {
    std::cout << "(" << i << ", " << j << ")\n";
}

int main() {
    print_pair(3,4); // outputs (3, 4)
    return 0;
}
```

Der Typ `void`

- Fundamentaler Typ mit leerem Wertebereich

Der Typ `void`

- Fundamentaler Typ mit leerem Wertebereich
- Verwendung als Rückgabetyp für Funktionen, die *nur* einen Effekt haben

`void`-Funktionen

- benötigen kein `return`.
- Ausführung endet, wenn Ende des Funktionsrumpfes erreicht wird oder
- `return;` erreicht wird