3. Wahrheitswerte

Boolesche Funktionen; der Typ `bool`; logische und relationale Operatoren; Kurzschlussauswertung

Wo wollen wir hin?

```
int a;
std::cin >> a;
if (a % 2 == 0)
    std::cout << "even";
else
    std::cout << "odd";
```

Verhalten hängt ab vom Wert eines Booleschen Ausdrucks

Boolesche Werte in der Mathematik

Boolesche Ausdrücke können zwei mögliche Werte annehmen:

0 oder *1*

- *0* entspricht *„falsch“*
- *1* entspricht *„wahr“*

Der Typ `bool` in C++

- Repräsentiert *Wahrheitswerte*
- Literale `false` und `true`
- Wertebereich {*false*, *true*}

```
bool b = true; // Variable mit Wert true (wahr)
```

Relationale Operatoren

```
a < b    (kleiner als)
a >= b   (grösser gleich)
a == b   (gleich)
a != b   (ungleich)
```

Zahlentyp $\times$ Zahlentyp $\to$ `bool`

R-Wert $\times$ R-Wert $\to$ R-Wert

Relationale Operatoren: Tabelle

	Symbol	Stelligkeit	Präzedenz	Assoziativität
Kleiner	<	2	11	links
Grösser	>	2	11	links
Kleiner gleich	<=	2	11	links
Grösser gleich	>=	2	11	links
Gleich	==	2	10	links
Ungleich	!=	2	10	links

Zahlentyp $\times$ Zahlentyp $\to$ `bool`

R-Wert $\times$ R-Wert $\to$ R-Wert

Boolesche Funktionen in der Mathematik

- Boolesche Funktion

$$f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

- 0 entspricht „falsch“.
- 1 entspricht „wahr“.

$\mathrm{AND}(x,y)$ $x \wedge y$

- „Logisches Und“

$$f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

- 0 entspricht „falsch“.
- 1 entspricht „wahr“.

x	y	$\mathrm{AND}(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Logischer Operator &&

`a && b` (logisches Und)

`bool` $\times$ `bool` $\to$ `bool`

R-Wert $\times$ R-Wert $\to$ R-Wert

```
int n = -1;
int p = 3;
bool b = (n < 0) && (0 < p); // b = true (wahr)
```


$\mathrm{OR}(x, y)$ $x \vee y$

- „Logisches Oder“

$$f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

- 0 entspricht „falsch“.
- 1 entspricht „wahr“.

x	y	$\mathrm{OR}(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Logischer Operator ||

`a || b` (logisches Oder)

`bool` $\times$ `bool` $\to$ `bool`

R-Wert $\times$ R-Wert $\to$ R-Wert

```
int n = 1;
int p = 0;
bool b = (n < 0) || (0 < p); // b = false (falsch)
```


$\mathrm{NOT}(x)$ $\neg x$

- „Logisches Nicht“

$$f : \{0,1\} \to \{0,1\}$$

- 0 entspricht „falsch“.
- 1entspricht „wahr“.

x	$\mathrm{NOT}(x)$
0	1
1	0

Logischer Operator !

`!b` (logisches Nicht)

`bool` → `bool`

R-Wert → R-Wert

```
int n = 1;
bool b = !(n < 0); // b = true (wahr)
```


Präzedenzen

```
!b && a
   ⇕
(!b) && a

a && b || c && d
      ⇕
(a && b) || (c && d)

a || b     &&     c || d
      ⇕
a || (b && c) || d
```


Logische Operatoren: Tabelle

	Symbol	Stelligkeit	Präzedenz	Assoziativität
Logisches Und (AND)	`&&`	2	6	links
Logisches Oder (OR)	`||`	2	5	links
Logisches Nicht (NOT)	`!`	1	16	rechts

Präzedenzen

Der unäre logische Operator `!`

bindet stärker als

binäre arithmetische Operatoren. Diese

binden stärker als

relationale Operatoren,

und diese binden stärker als

binäre logische Operatoren.

```
7 + x < y && y != 3 * z || ! b
7 + x < y && y != 3 * z || (!b)
```

Vollständigkeit

- AND, OR und NOT sind die in $\mathrm{C{+}{+}}$ verfügbaren Booleschen Funktionen.
- Alle anderen *binären* Booleschen Funktionen sind daraus erzeugbar.

x	y	$\mathrm{XOR}(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Vollständigkeit: $\mathrm{XOR}(x,y)$ $x \oplus y$

$$\mathrm{XOR}(x,y) = \mathrm{AND}(\mathrm{OR}(x,y), \mathrm{NOT}(\mathrm{AND}(x,y))).$$

$$x \oplus y = (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y).$$

```
(x || y) && !(x && y)
```


Vollständigkeit Beweis

- Identifiziere binäre Boolesche Funktionen mit ihrem charakteristischen Vektor.

x	y	$\mathrm{XOR}(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Charakteristischer Vektor: 0110

$$\mathrm{XOR} = f_{0110}$$

Vollständigkeit Beweis

- Schritt 1: erzeuge die *elementaren* Funktionen f_{0001}, f_{0010}, f_{0100}, f_{1000}

$$\begin{aligned} f_{0001} &= \mathrm{AND}(x,y) \\ f_{0010} &= \mathrm{AND}(x,\mathrm{NOT}(y)) \\ f_{0100} &= \mathrm{AND}(y,\mathrm{NOT}(x)) \\ f_{1000} &= \mathrm{NOT}(\mathrm{OR}(x,y)) \end{aligned}$$

Vollständigkeit Beweis

- Schritt 2: erzeuge alle Funktionen durch “Veroderung” elementarer Funktionen

$$f_{1101} = \mathrm{OR}(f_{1000}, \mathrm{OR}(f_{0100}, f_{0001}))$$

- Schritt 3: erzeuge f_{0000}

$$f_{0000} = 0.$$

`bool` vs `int`: Konversion

- `bool` kann überall dort verwendet werden, wo `int` gefordert ist – und umgekehrt.
- Viele existierende Programme verwenden statt `bool` den Typ `int`.
  Das ist schlechter Stil, der noch auf die Sprache C zurückgeht.

`bool`	→ `int`
true	→ 1
false	→ 0
`int`	**→ `bool`**
≠0	→ *true*
0	→ *false*

```
bool b = 3; // b=true
```


DeMorgansche Regeln

- `!(a && b) == (!a || !b)`
- `!(a || b) == (!a && !b)`

! (reich *und* schön) == (arm *oder* hässlich)

Anwendung: Entweder ... Oder (XOR)

`(x || y)`	`&& !(x && y)`	x oder y, und nicht beide
`(x || y)`	`&& (!x || !y)`	x oder y, und eines nicht
`!(!x && !y)`	`&& !(x && y)`	nicht keines, und nicht beide
`!(!x && !y || x && y)`		nicht: keines oder beide

Kurzschlussauswertung

- Logische Operatoren `&&` und `||` werten den *linken Operanden zuerst* aus.
- Falls das Ergebnis dann schon feststeht, wird der rechte Operand *nicht mehr* ausgewertet.

```
x != 0 && z / x > y
```

$\Rightarrow$ Keine Division durch 0

4. Defensives Programmieren

Konstanten und Assertions

Fehlerquellen

- Fehler, die der Compiler findet:
  syntaktische und manche semantische Fehler
- Fehler, die der Compiler nicht findet:
  Laufzeitfehler (immer semantisch)

Der Compiler als Freund: Konstanten

Konstanten

- sind Variablen mit unveränderbarem Wert

```
const int speed_of_light = 299792458;
```

- Verwendung: `const` vor der Definition

Der Compiler als Freund: Konstanten

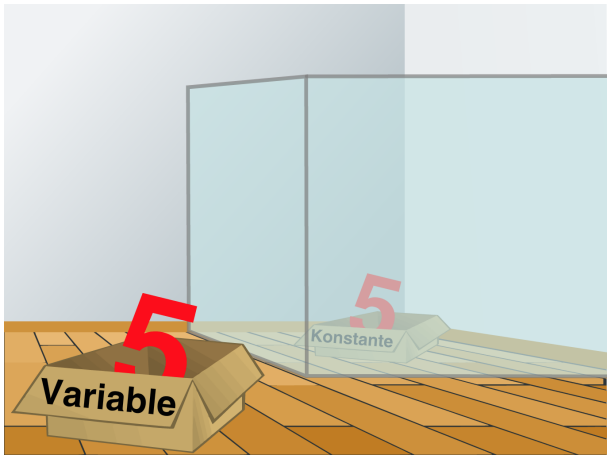
- Compiler kontrolliert Einhaltung des `const`-Versprechens

```
const int speed_of_light = 299792458;
...
speed_of_light = 300000000;
```

Compilerfehler!

- Hilfsmittel zur Vermeidung von Fehlern: Konstanten erlauben garantierte Einhaltung des Versprechens *„Wert ändert sich nicht“*

Konstanten: Variablen hinter Glas



Die `const`-Richtlinie

`const`-Richtlinie

Denke bei *jeder Variablen* darüber nach, ob sie im Verlauf des Programmes jemals ihren Wert ändern wird oder nicht. Im letzteren Falle verwende das Schlüsselwort `const`, um die Variable zu einer Konstanten zu machen.

Ein Programm, welches diese Richtlinie befolgt, heisst `const`-korrekt.

Fehlerquellen vermeiden

1. Genaue Kenntnis des gewünschten Programmverhaltens
2. Überprüfe an vielen kritischen Stellen, ob das Programm auf dem richtigen Weg ist
3. Hinterfrage auch das (scheinbar) Offensichtliche, es könnte sich ein simpler Tippfehler eingeschlichen haben

Gegen Laufzeitfehler: *Assertions*

`assert(expr)`

- hält das Programm an, falls der boolesche Ausdruck `expr` nicht wahr ist
- benötigt `#include <cassert>`
- kann abgeschaltet werden (potentieller Geschwindigkeitsgewinn)

Assertions für den $ggT(x, y)$

Überprüfe, ob das Programm auf dem richtigen Weg ist ...

```
// Input x and y
std::cout << "x =? ";
std::cin >> x;
std::cout << "y =? ";
std::cin >> y;

// Check validity of inputs
assert(x > 0 && y > 0);

... // Compute gcd(x,y), store result in variable a
```

Eingabe der Argumente für die Berechnung

Vorbedingung für die weitere Berechnung

Assertions für den $ggT(x, y)$

... und hinterfrage das Offensichtliche! ...

```
...
assert(x > 0 && y > 0);

... // Compute gcd(x,y), store result in variable a

assert (a >= 1);
assert (x % a == 0 && y % a == 0);
for (int i = a+1; i <= x && i <= y; ++i)
  assert(!(x % i == 0 && y % i == 0));
```

Vorbedingung für die weitere Berechnung

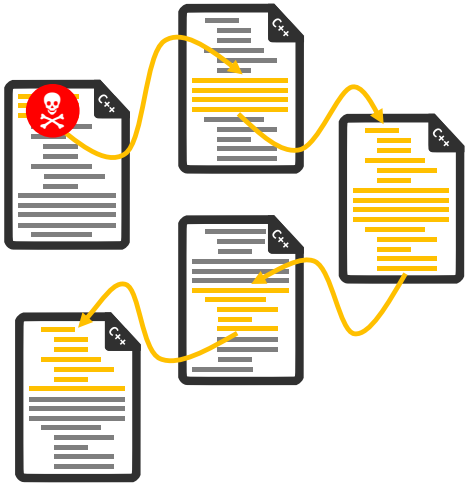
Verschiedene Eigenschaften des ggT überprüfen

Assertions abschalten

```
#define NDEBUG // To ignore assertions
#include<cassert>

...
assert(x > 0 && y > 0); // Ignored

... // Compute gcd(x,y), store result in variable a

assert(a >= 1); // Ignored
...
```

Fail-Fast mit Assertions

- Reale Software: viele C++-Dateien, komplexer Kontrollfluss
- Fehler machen sich erst spät(er) bemerkbar → Fehlersuche erschwert
- Assertions: Fehler frühzeitig bemerken



5. Kontrollanweisungen I

Auswahlanweisungen, Iterationsanweisungen, Terminierung, Blöcke

Kontrollfluss

- Bisher: *linear* (von oben nach unten)
- Interessante Programme nutzen „Verzweigungen“ und „Sprünge“

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[8] → **L**	[9] → **R**	**L** = 0? *stop*	**R** > **L**? *springe zu* **6**	**L** − **R** → [8]	*springe zu* 0	**R** − **L** → [9]	*springe zu* 0	b	a

Auswahlanweisungen

realisieren Verzweigungen

- `if` Anweisung
- `if-else` Anweisung

`if`-Anweisung

`if` (*condition*)
  statement

```
int a;
std::cin >> a;
if (a % 2 == 0)
    std::cout << "even";
```

Ist *condition* wahr, dann wird *statement* ausgeführt.

- *statement*: beliebige Anweisung (*Rumpf* der `if`-Anweisung)
- *condition*: konvertierbar nach `bool`

`if-else`-Anweisung

`if` (*condition*)
  statement1
`else`
  statement2

```
int a;
std::cin >> a;
if (a % 2 == 0)
    std::cout << "even";
else
    std::cout << "odd";
```

Ist *condition* wahr, so wird *statement1* ausgeführt, andernfalls wird *statement2* ausgeführt.

- *condition*: konvertierbar nach `bool`.
- *statement1*: *Rumpf* des `if`-Zweiges
- *statement2*: *Rumpf* des `else`-Zweiges

Layout!

```
int a;
std::cin >> a;
if (a % 2 == 0)
    std::cout << "even";   <-- Einrückung
else
    std::cout << "odd";    <-- Einrückung
```


Iterationsanweisungen

realisieren „Schleifen“:

- `for`-Anweisung
- `while`-Anweisung
- `do`-Anweisung

Berechne $1 + 2 + \ldots + n$

```
// Program: sum_n.cpp
// Compute the sum of the first n natural numbers.

#include <iostream>

int main()
{
  // input
  std::cout << "Compute the sum 1+...+n for n =? ";
  unsigned int n;
  std::cin >> n;

  // computation of sum_{i=1}^n i
  unsigned int s = 0;
  for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i) s += i;

  // output
  std::cout << "1+...+" << n << " = " << s << ".\n";
  return 0;
}
```


`for`-Anweisung am Beispiel

```
for ( unsigned int i=1; i <= n ; ++i )
    s += i;
```

Annahmen: `n == 2`, `s == 0`

`i`		`s`
`i==1`	wahr	`s == 1`
`i==2`	wahr	`s == 3`
`i==3`	falsch	

`s == 3`

`for`-Anweisung: Syntax

`for` (*init statement*; *condition*; *expression*)
body statement

- *init statement*: Ausdrucksanweisung, Deklarationsanweisung, Nullanweisung
- *condition*: konvertierbar nach `bool`
- *expression*: beliebiger Ausdruck
- *body statement*: beliebige Anweisung (*Rumpf* der for-Anweisung)

`for`-Anweisung: Semantik

`for` (*init statement* *condition* ; *expression*)
statement

- *init-statement* wird ausgeführt
- *condition* wird ausgewertet
  - `true`: Iteration beginnt
    statement wird ausgeführt
    expression wird ausgeführt
  - falsch: `for`-Anweisung wird beendet.

Der kleine Gauß (1777 - 1855)

- Mathe-Lehrer wollte seine Schüler mit folgender Aufgabe beschäftigen:

Berechne die Summe der Zahlen von 1 bis 100!

- Gauß war nach einer Minute fertig.

Die Lösung von Gauß

- Die gesuchte Zahl ist

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100.$$

- Das ist die Hälfte von

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ + & 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline = & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

- Antwort: $100 \cdot 101/2 = 5050$

`for`-Anweisung: Terminierung

```
for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i)
    s += i;
```

Hier und meistens:

- *expression* ändert einen Wert, der in *condition* vorkommt.
- Nach endlich vielen Iterationen wird *condition* falsch: *Terminierung*.

Endlosschleifen

- Endlosschleifen sind leicht zu produzieren:

```
for ( ; ; ) ;
```

  - Die *leere condition* ist wahr.
  - Die *leere expression* hat keinen Effekt.
  - Die *Nullanweisung* hat keinen Effekt.

- ... aber nicht automatisch zu erkennen.

```
for (init; cond; expr) stmt;
```

Halteproblem

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Es gibt kein C++ Programm, das für jedes C++- Programm P und jede Eingabe I korrekt feststellen kann, ob das Programm P bei Eingabe von I terminiert.

Das heisst, die Korrektheit von Programmen kann *nicht* automatisch überprüft werden.[4]

[4] Alan Turing, 1936. Theoretische Fragestellungen dieser Art waren für Alan Turing die Hauptmotivation für die Konstruktion seiner Rechenmaschine.

Beispiel: Primzahltest

Def.: Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ ist eine Primzahl, wenn kein $d \in \{2, \ldots, n-1\}$ ein Teiler von n ist.

Eine Schleife, die das testet:

```
unsigned int d;
for (d=2; n%d != 0; ++d);
```


Primzahltest: Terminierung

```
unsigned int d;
for (d=2; n%d != 0; ++d); // for n >= 2
```

- Fortschritt: Startwert `d=2`, dann in jeder Iteration plus 1 (`++d`)
- Abbruch: `n%d != 0` evaluiert zu `false` sobald ein Teiler erreicht wurde — spätestes, wenn `d == n`
- Fortschritt garantiert, dass Abbruchbedingung erreicht wird

Primzahltest: Korrektheit

```
unsigned int d;
for (d=2; n%d != 0; ++d); // for n >= 2
```

Jeder mögliche Teiler `2 <= d <= n` wird ausprobiert. Falls die Schleife mit `d == n` terminiert, dann und genau dann ist `n` prim.

Blöcke

- Blöcke gruppieren mehrere Anweisungen zu einer neuen Anweisung

```
{statement1 statement2 ... statementN}
```

- Beispiel: Rumpf der main Funktion

```
int main() {
    ...
}
```

- Beispiel: Schleifenrumpf

```
for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i) {
    s += i;
    std::cout << "partial sum is " << s << "\n";
}
```