2. Ganze Zahlen

Auswertung arithmetischer Ausdrücke, Assoziativität und Präzedenz, arithmetische Operatoren, Wertebereich der Typen `int`, `unsigned int`

Celsius to Fahrenheit

```
// Program: fahrenheit.cpp
// Convert temperatures from Celsius to Fahrenheit.
#include <iostream>

int main() {
  // Input
  std::cout << "Temperature in degrees Celsius =? ";
  int celsius;
  std::cin >> celsius;

  // Computation and output
  std::cout << celsius << " degrees Celsius are "
            << 9 * celsius / 5 + 32  << " degrees Fahrenheit.\n";
  return 0;
}
```


`9 * celsius / 5 + 32`

- Arithmetischer Ausdruck,
- enthält drei Literale, eine Variable, drei Operatorsymbole

Wie ist der Ausdruck geklammert?

Präzedenz

Punkt vor Strichrechnung

`9 * celsius / 5 + 32`

bedeutet

`(9 * celsius / 5) + 32`

Regel 1: Präzedenz

Multiplikative Operatoren (`*`, `/`, `%`) haben höhere Präzedenz („binden stärker") als additive Operatoren (`+`, `-`)

Assoziativität

Von links nach rechts

`9 * celsius / 5 + 32`

bedeutet

`((9 * celsius) / 5) + 32`

Regel 2: Assoziativität

Arithmetische Operatoren (*, /, %, +, -) sind linksassoziativ: bei gleicher Präzedenz erfolgt Auswertung von links nach rechts

Stelligkeit

Regel 3: Stelligkeit

Unäre Operatoren +, - vor binären +, -.

`-3 - 4`

bedeutet

`(-3) - 4`

Klammerung

Jeder Ausdruck kann mit Hilfe der

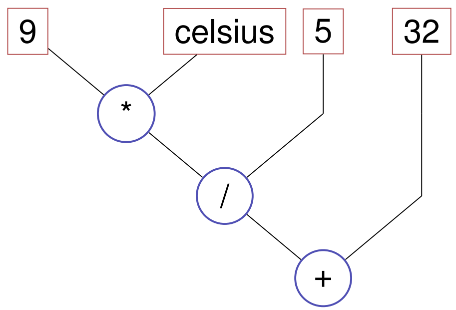
- Assoziativitäten
- Präzedenzen
- Stelligkeiten (Anzahl Operanden)

der beteiligten Operatoren eindeutig geklammert werden (Details im Skript).

Ausdrucksbäume

Klammerung ergibt Ausdrucksbaum

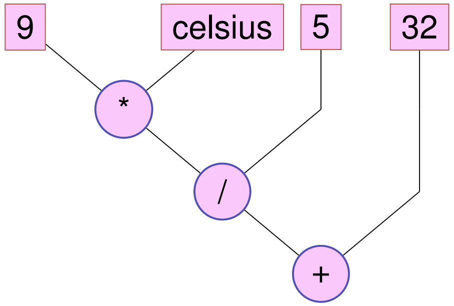
`(((9 * celsius) / 5) + 32)`



Auswertungsreihenfolge

„Von oben nach unten“ im Ausdrucksbaum

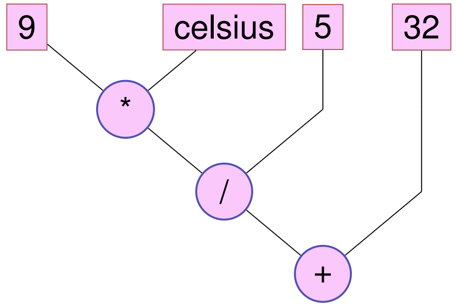
`9 * celsius / 5 + 32`



Auswertungsreihenfolge

Reihenfolge nicht eindeutig bestimmt:

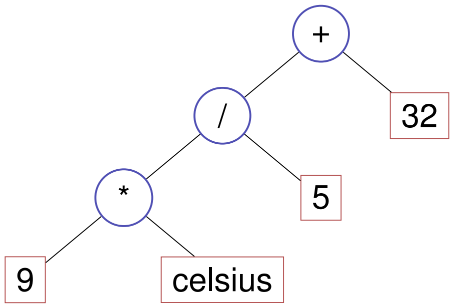
`9 * celsius / 5 + 32`



Ausdrucksbäume – Notation

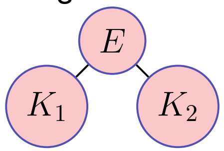
Üblichere Notation: Wurzel oben

`9 * celsius / 5 + 32`



Auswertungsreihenfolge – formaler

- Gültige Reihenfolge: Jeder Knoten wird erst *nach* seinen Kindern ausgewertet.



In C++ist die anzuwendende gültige Reihenfolge nicht spezifiziert.

- „Guter Ausdruck“: jede gültige Reihenfolge führt zum gleichen Ergebnis.
- Beispiel eines „schlechten Ausdrucks“: `a*(a=2)`

Auswertungsreihenfolge

Richtlinie

Vermeide das Verändern von Variablen, welche im selben Ausdruck noch einmal verwendet werden!

Arithmetische Operatoren

	Symbol	Stelligkeit	Präzedenz	Assoziativität
Unäres +	+	1	16	rechts
Negation	-	1	16	rechts
Multiplikation	*	2	14	links
Division	/	2	14	links
Modulo	%	2	14	links
Addition	+	2	13	links
Subtraktion	-	2	13	links

Alle Operatoren: [R-Wert $\times$] R-Wert $\to$ R-Wert

Einschub: Zuweisungsausdruck – nun genauer

- Bereits bekannt: `a = b` bedeutet Zuweisung von `b` (R-Wert) an `a` (L-Wert). Rückgabe: L-Wert
- Was bedeutet `a = b = c` ?
- Antwort: Zuweisung rechtsassoziativ, also

`a = b = c` $\Longleftrightarrow$ `a = (b = c)`

Beispiel Mehrfachzuweisung:
`a = b = 0` $\Longrightarrow$ `b=0; a=0`

Division

- Operator / realisiert ganzzahlige Division

`5 / 2` hat Wert 2

- In `fahrenheit.cpp`

```
9 * celsius / 5 + 32

15 degrees Celsius are 59 degrees Fahrenheit
```

- Mathematisch äquivalent... aber nicht in C++!

```
9 / 5 * celsius + 32

15 degrees Celsius are 47 degrees Fahrenheit
```

Präzisionsverlust

Richtlinie

- Auf möglichen Präzisionsverlust achten
- Potentiell verlustbehaftete Operationen möglichst spät durchführen um „Fehlereskalation" zu vermeiden

Division und Modulo

- Modulo-Operator berechnet Rest der ganzzahligen Division

`5 / 2` hat Wert 2, `5 % 2` hat Wert 1.

- Es gilt immer:

`(a / b) * b + a % b` hat den Wert von `a`.

Inkrement und Dekrement

- Erhöhen / Erniedrigen einer Zahl um 1 ist eine häufige Operation
- geht für einen L-Wert so:

```
expr = expr + 1.
```

Nachteile

- relativ lang
- `expr` wird zweimal ausgewertet
  - Später: L-wertige Ausdrücke deren Auswertung „teuer" ist
  - `expr` könnte einen Effekt haben (aber sollte nicht, siehe Richtlinie)

In-/Dekrement Operatoren

Post-Inkrement

```
expr++
```

Wert von `expr` wird um 1 erhöht, der *alte* Wert von `expr` wird (als R-Wert) zurückgegeben

Prä-Inkrement

```
++expr
```

Wert von `expr` wird um 1 erhöht, der *neue* Wert von `expr` wird (als L-Wert) zurückgegeben

Post-Dekrement

```
expr--
```

Wert von `expr` wird um 1 verringert, der *alte* Wert von `expr` wird (als R-Wert) zurückgegeben

Prä-Dekrement

```
--expr
```

Wert von `expr` wird um 1 verringert, der *neue* Wert von `expr` wird (als L-Wert) zurückgegeben

In-/Dekrement Operatoren

	Gebrauch	Stelligkeit	Präz	Assoz.	L/R-Werte
Post-Inkrement	`expr++`	1	17	links	L-Wert → R-Wert
Prä-Inkrement	`++expr`	1	16	rechts	L-Wert → L-Wert
Post-Dekrement	`expr--`	1	17	links	L-Wert → R-Wert
Prä-Dekrement	`--expr`	1	16	rechts	L-Wert → L-Wert

In-/Dekrement Operatoren

Beispiel

```
int a = 7;
std::cout << ++a << "\n"; // 8
std::cout << a++ << "\n"; // 8
std::cout << a << "\n"; // 9
```


In-/Dekrement Operatoren

Ist die Anweisung

`++expr;` ← wir bevorzugen dies

äquivalent zu

`expr++;`?

Ja, aber

- Prä-Inkrement ist effizienter (alter Wert muss nicht gespeichert werden)
- Post-In/Dekrement sind die einzigen linksassoziativen unären Operatoren (nicht sehr intuitiv)

`C++` vs. `++C`

Eigentlich sollte unsere Sprache `++C` heissen, denn

- sie ist eine Weiterentwicklung der Sprache `C`,
- während `C++` ja immer noch das alte `C` liefert.

Arithmetische Zuweisungen

```
a += b
```

$\Leftrightarrow$

```
a = a + b
```

Analog für `-`, `*`, `/` und `%`

Arithmetische Zuweisungen

	Gebrauch	Bedeutung
`+=`	`expr1 += expr2`	`expr1 = expr1 + expr2`
`-=`	`expr1 -= expr2`	`expr1 = expr1 - expr2`
`*=`	`expr1 *= expr2`	`expr1 = expr1 * expr2`
`/=`	`expr1 /= expr2`	`expr1 = expr1 / expr2`
`%=`	`expr1 %= expr2`	`expr1 = expr1 % expr2`

Arithmetische Zuweisungen werten expr1 nur einmal aus.
Zuweisungen haben Präzedenz 4 und sind rechtsassoziativ

Binäre Zahlendarstellungen

Binäre Darstellung (Bits aus $\{0, 1\}$)

$$b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0$$

entspricht der Zahl $b_n \cdot 2^n + \cdots + b_1 \cdot 2 + b_0$

Beispiel: `101011` entspricht 43.

Niedrigstes Bit, Least Significant Bit (LSB)

Höchstes Bit, Most Significant Bit (MSB)

Binäre Zahlen: Zahlen der Computer?

Wahrheit: Computer rechnen mit Binärzahlen.


NEUE ZÜRCHER ZEITUNG — TECHNIK — Mittwoch, 30. August 1950, Blatt 5, Mittagausgabe, Nr. 1796 (50)

Das programmgesteuerte Rechengerät an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

Binäre Zahlen: Zahlen der Computer?

Klischee: Computer reden 0/1-Kauderwelsch.

Rechentricks

- Abschätzung der Grössenordnung von Zweierpotenzen[2]:

$$
\begin{aligned}
2^{10} &= 1024 = 1\mathrm{Ki} \approx 10^3.\\
2^{20} &= 1\mathrm{Mi} \approx 10^6,\\
2^{30} &= 1\mathrm{Gi} \approx 10^9,\\
2^{32} &= 4 \cdot (1024)^3 = 4\mathrm{Gi}.\\
2^{64} &= 16\mathrm{Ei} \approx 16 \cdot 10^{18}.
\end{aligned}
$$

[2] Dezimal vs. Binäre Einheiten: MB - Megabyte vs. MiB - Megabibyte (etc.)
kilo (K, Ki) – mega (M, Mi) – giga (G, Gi) – tera(T, Ti) – peta(P, Pi) – exa (E, Ei)

Hexadezimale Zahlen

Zahlen zur Basis 16. Darstellung

$$h_n h_{n-1} \dots h_1 h_0$$

entspricht der Zahl

$$h_n \cdot 16^n + \cdots + h_1 \cdot 16 + h_0.$$

Schreibweise in C++: vorangestelltes `0x`

Beispiel: `0xff` entspricht 255.

Hex Nibbles

hex	bin	dec
0	0000	0
1	**0001**	**1**
2	**0010**	**2**
3	0011	3
4	**0100**	**4**
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	**1000**	**8**
9	1001	9
a	1010	10
b	1011	11
c	1100	12
d	1101	13
e	1110	14
f	1111	15

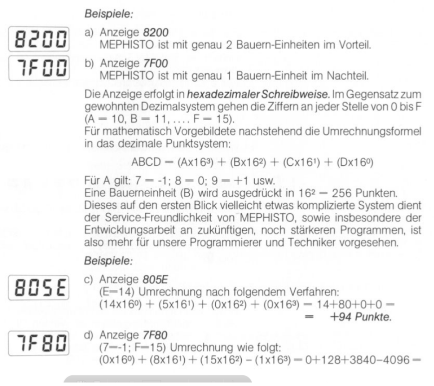
Wozu Hexadezimalzahlen?

- Ein Hex-Nibble entspricht *genau* 4 Bits. Die Zahlen 1, 2, 4 und 8 repräsentieren Bits 0, 1, 2 und 3.
- „Kompakte Darstellung von Binärzahlen“.

32-bit Zahlen bestehen aus acht Hex-Nibbles: `0x00000000 -- 0xffffffff` .
`0x400` $= 1Ki = 1'024.$
`0x100000` $= 1Mi = 1'048'576.$
`0x40000000` $= 1Gi = 1'073.741,824.$
`0x80000000`: höchstes Bit einer 32-bit Zahl gesetzt.
`0xffffffff`: alle Bits einer 32-bit Zahl gesetzt.
“`0x8a20aaf0` ist eine Addresse in den oberen 2G des 32-bit Addressraumes”

Wozu Hexadezimalzahlen?

„Für Programmierer und Techniker“ (Auszug aus der Bedienungsanleitung des Schachcomputers *Mephisto II*, 1981)



Beispiele:

8200 a) Anzeige ***8200***
MEPHISTO ist mit genau 2 Bauern-Einheiten im Vorteil.

7F00 b) Anzeige *7F00*
MEPHISTO ist mit genau 1 Bauern-Einheit im Nachteil.

Die Anzeige erfolgt in ***hexadezimaler Schreibweise.*** Im Gegensatz zum gewohnten Dezimalsystem gehen die Ziffern an jeder Stelle von 0 bis F (A = 10, B = 11, ... F = 15).
Für mathematisch Vorgebildete nachstehend die Umrechnungsformel in das dezimale Punktsystem:

$$ABCD = (Ax16^3) + (Bx16^2) + (Cx16^1) + (Dx16^0)$$

Für A gilt: 7 = -1; 8 = 0; 9 = +1 usw.
Eine Bauerneinheit (B) wird ausgedrückt in $16^2 = 256$ Punkten.
Dieses auf den ersten Blick vielleicht etwas komplizierte System dient der Service-Freundlichkeit von MEPHISTO, sowie insbesondere der Entwicklungsarbeit an zukünftigen, noch stärkeren Programmen, ist also mehr für unsere Programmierer und Techniker vorgesehen.

Beispiele:

805E c) Anzeige *805E*
(E=14) Umrechnung nach folgendem Verfahren:
$(14x16^0) + (5x16^1) + (0x16^2) + (0x16^3) = 14+80+0+0 =$
$= $ *+94 Punkte.*

7F80 d) Anzeige *7F80*
(7=-1; F=15) Umrechnung wie folgt:
$(0x16^0) + (8x16^1) + (15x16^2) - (1x16^3) = 0+128+3840-4096 =$

Beispiel: Hex-Farben

$$\#\underbrace{00}_{r}\underbrace{FF}_{g}\underbrace{00}_{b}$$

Wozu Hexadezimalzahlen?

Die NZZ hätte viel Platz sparen können...

Wertebereich des Typs `int`

```
// Output the smallest and the largest value of type int.
#include <iostream>
#include <limits>

int main() {
  std::cout << "Minimum int value is "
            << std::numeric_limits<int>::min() << ".\n"
            << "Maximum int value is "
            << std::numeric_limits<int>::max() << ".\n";
  return 0;
}
```

```
Minimum int value is -2147483648.
Maximum int value is 2147483647.
```

Woher kommen diese Zahlen?

Wertebereich des Typs `int`

- Repräsentation mit B Bits. Wertebereich umfasst die 2^B ganzen Zahlen:

$$\{-2^{B-1}, -2^{B-1}+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 2^{B-1}-2, 2^{B-1}-1\}$$

  Woher kommt gerade diese Aufteilung?

- Auf den meisten Plattformen $B = 32$
- Für den Typ `int` garantiert $\mathrm{C}{+}{+}$ $B \geq 16$
- Hintergrund: Abschnitt 2.2.8 (Binary Representation) im Skript

Überlauf und Unterlauf

- Arithmetische Operationen (`+,-,*`) können aus dem Wertebereich herausführen.
- Ergebnisse können inkorrekt sein.

`power8.cpp`: $15^8 = -1732076671$

`power20.cpp`: $3^{20} = -808182895$

- Es gibt *keine Fehlermeldung!*

Der Typ `unsigned int`

- Wertebereich

$$\{0, 1, \ldots, 2^B - 1\}$$

- Alle arithmetischen Operationen gibt es auch für `unsigned int`.
- Literale: `1u, 17u` ...

Gemischte Ausdrücke

- Operatoren können Operanden verschiedener Typen haben (z.B. `int` und `unsigned int`).

```
17 + 17u
```

- Solche gemischten Ausdrücke sind vom „allgemeineren" Typ `unsigned int`.
- `int`-Operanden werden *konvertiert* nach `unsigned int`.

Konversion

`int` Wert	Vorzeichen	`unsigned int` Wert
x	≥ 0	x
x	< 0	$x + 2^B$

Konversion "andersherum"

Die Deklaration

```
int a = 3u;
```

konvertiert `3u` nach `int`.

Der Wert bleibt erhalten, weil er im Wertebereich von `int` liegt; andernfalls ist das Ergebnis implementierungsabhängig.

Vorzeichenbehaftete Zahlendarstellung

- Soweit klar (hoffentlich): Binäre Zahlendarstellung ohne Vorzeichen, z.B.

$$[b_{31}b_{30}\dots b_0]_u \quad \widehat{=} \quad b_{31}\cdot 2^{31} + b_{30}\cdot 2^{30} + \dots + b_0$$

- Nun offensichtlich notwendig: Verwende ein Bit für das Vorzeichen.
- Suche möglichst konsistente Lösung

Die Darstellung mit Vorzeichen sollte möglichst viel mit der vorzeichenlosen Lösung „gemein haben". Positive Zahlen sollten sich in beiden Systemen algorithmisch möglichst gleich verhalten.

Rechnen mit Binärzahlen (4 Stellen)

Einfache Addition

$$\begin{array}{r} 2 \\ +3 \\ \hline 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0010 \\ +0011 \\ \hline 0101 \end{array}$$

Einfache Subtraktion

$$\begin{array}{r} 5 \\ -3 \\ \hline 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0101 \\ -0011 \\ \hline 0010 \end{array}$$

Rechnen mit Binärzahlen (4 Stellen)

Addition mit Überlauf

$$\begin{array}{rr} 7 & 0111 \\ +9 & +1001 \\ \hline 16 & (1)0000 \end{array}$$

Negative Zahlen?

$$\begin{array}{rr} 5 & 0101 \\ +(-5) & ???? \\ \hline 0 & (1)0000 \end{array}$$

Rechnen mit Binärzahlen (4 Stellen)

Einfacher: -1

$$\begin{array}{rr} 1 & 0001 \\ +(-1) & 1111 \\ \hline 0 & (1)0000 \end{array}$$

Nutzen das aus:

$$\begin{array}{rr} 3 & 0011 \\ +? & +???? \\ \hline -1 & 1111 \end{array}$$

Rechnen mit Binärzahlen (4 Stellen)

Invertieren!

$$\begin{array}{rl} 3 & 0011 \\ +(-4) & +1100 \\ \hline -1 & 1111 \widehat{=} 2^B - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} a & a \\ +(-a-1) & \bar{a} \\ \hline -1 & 1111 \widehat{=} 2^B - 1 \end{array}$$

Rechnen mit Binärzahlen (4 Stellen)

- Negation: Inversion und Addition von 1

$$-a \quad \widehat{=} \quad \bar{a} + 1$$

- Wrap-around Semantik (Rechnen modulo 2^B)

$$-a \quad \widehat{=} \quad 2^B - a$$

Warum das funktioniert

Modulo-Arithmetik: Rechnen im Kreis[3]

$11 \equiv 23 \equiv -1 \equiv \ldots \mod 12$ $\quad$ $4 \equiv 16 \equiv \ldots \mod 12$ $\quad$ $3 \equiv 15 \equiv \ldots \mod 12$

[3] Die Arithmetik funktioniert auch mit Dezimalzahlen (und auch für die Multiplikation)

Negative Zahlen (3 Stellen)

	a	$-a$	
0	000	000	0
1	001	**111**	-1
2	010	**110**	-2
3	011	**101**	-3
4	100	**100**	-4
5	101		
6	110		
7	111		

Das höchste Bit entscheidet über das Vorzeichen *und* es trägt zum Zahlwert bei.

Zweierkomplement

- Negation durch bitweise Negation und Addition von 1.

$$-2 = -[0010] = [1101] + [0001] = [1110]$$

  - Arithmetik der Addition und Subtraktion *identisch* zur vorzeichenlosen Arithmetik.

$$3 - 2 = 3 + (-2) = [0011] + [1110] = [0001]$$

  - Intuitive „Wrap-Around“ Konversion negativer Zahlen.

$$-n \to 2^B - n$$

  - Wertebereich: $-2^{B-1} \ldots 2^{B-1} - 1$