14. Zeichen und Texte II

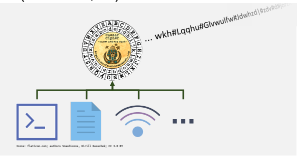
Caesar-Code mit Streams, Texte als Strings, String-Operationen

Caesar-Code: Generalisierung

```
void caesar(int s) {
  std::cin >> std::noskipws;

  char next;
  while (std::cin >> next) {
    std::cout << shift(next, s);
  }
}
```

- Momentan nur von `std::cin` nach `std::cout`

- Besser: von beliebiger Zeichenquelle (Konsole, Datei, ...) zu beliebiger Zeichensenke (Konsole, ...)



Caesar-Code: Generalisierung

```
void caesar(std::istream& in,
            std::ostream& out,
            int s) {

  in >> std::noskipws;

  char next;
  while (in >> next) {
    out << shift(next, s);
  }
}
```

- `std::istream`/`std::ostream` ist ein *generischer Eingabe-/Ausgabestrom* an `char`s

- Aufruf der Funktion erfolgt mit *spezifischen Strömen*, z.B.: Konsole (`std::cin/cout`), Dateien (`std::i/ofstream`), Strings (`std::i/ostringstream`)

Caesar-Code: Generalisierung, Beispiel 1

```
#include <iostream>
...

// in void main():
caesar(std::cin, std::cout, s);
```

Aufruf der generischen `caesar`-Funktion: Von `std::cin` nach `std::cout`

Caesar-Code: Generalisierung, Beispiel 2

```
#include <iostream>
#include <fstream>
...

// in void main():
std::string from_file_name = ...; // Name of file to read from
std::string to_file_name = ...; // Name of file to write to
std::ifstream from(from_file_name); // Input file stream
std::ofstream to(to_file_name); // Output file stream

caesar(from, to, s);
```

Aufruf der generischen `caesar`-Funktion: Von Datei zu Datei

Caesar-Code: Generalisierung, Beispiel 3

```
#include <iostream>
#include <sstream>
...

// in void main():
std::string plaintext = "My password is 1234";
std::istringstream from(plaintext);

caesar(from, std::cout, s);
```

Aufruf der generischen `caesar`-Funktion: Von einem String nach `std::cout`

Texte

- Text „`Sein oder nicht sein`“ könnte als `vector<char>` repräsentiert werden
- Texte sind jedoch allgegenwärtig, daher existiert in der Standardbibliothek ein eigener Typ für sie: `std::string` (Zeichenkette)
- Benutzung benötigt `#include <string>`

Benutzung von `std::string`

- Deklaration und Initialisierung mittels Literal:

```
std::string text = "Essen ist fertig!"
```

- Mit variabler Länge initialisieren:

```
std::string text(n, 'a')
```

`text` wird mit n `'a'`s gefüllt

- Texte vergleichen:

```
if (text1 == text2) ...
```

`true` wenn zeichenweise gleich

Benutzung von `std::string`

- Grösse auslesen:

```
for (unsigned int i = 0; i < text.size(); ++i) ...
```

Grösse ungleich Textlänge für Multibytekodierungen, z.B. UTF-8

- Einzelne Zeichen lesen:

```
if (text[0] == 'a') ... // or text.at(0)
```

`text[0]` prüft Indexgrenzen nicht, `text.at(0)` hingegen schon

- Einzelne Zeichen schreiben:

```
text[0] = 'b'; // or text.at(0)
```


Benutzung von `std::string`

- Strings konkatenieren (zusammensetzen):

```
text = ":-";
text += ")";
assert(text == ":-)");
```

- Viele weitere Operationen, bei Interesse siehe `https://en.cppreference.com/w/cpp/string`

15. Vektoren II

Mehrdimensionale Vektoren/Vektoren von Vektoren, Kürzeste Wege, Vektoren als Funktionsargumente

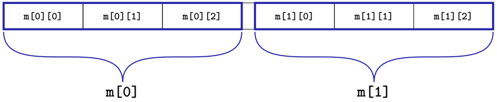
Mehrdimensionale Vektoren

- Zum Speichern von mehrdimensionalen Strukturen wie Tabellen, Matrizen, ...
- ... können *Vektoren von Vektoren* verwendet werden:

```
std::vector<std::vector<int>> m; // An empty matrix
```

Mehrdimensionale Vektoren

Im Speicher: flach



Im Kopf: Matrix

Spalten →

Zeilen ↓

	0	1	2
0	`m[0][0]`	`m[0][1]`	`m[0][2]`
1	`m[1][0]`	`m[1][1]`	`m[1][2]`

Mehrdimensionale Vektoren: Initialisierungsbeispiele

Mittels Literalen[7]:

```
// A 3-by-5 matrix
std::vector<std::vector<std::string>> m = {
  {"ZH", "BE", "LU", "BS", "GE"},
  {"FR", "VD", "VS", "NE", "JU"},
  {"AR", "AI", "OW", "IW", "ZG"}
};

assert(m[1][2] == "VS");
```

[7] eigentlich *Initialisierungslisten*

Mehrdimensionale Vektoren: Initialisierungsbeispiele

Auf bestimmte Grösse füllen:

```
unsigned int a = ...;
unsigned int b = ...;

// An a-by-b matrix with all ones
std::vector<std::vector<int>>
  m(a, std::vector<int>(b, 1));
```

`m` (Typ `std::vector<std::vector<int>>`) ist ein Vektor der Länge `a`, dessen Elemente (Typ `std::vector<int>`) Vektoren der Länge `b` sind, deren Elemente (Typ `int`) alles Einsen sind

(Es gibt noch viele weitere Wege, Vektoren zu initialisieren)

Mehrdimensionale Vektoren und Typ-Aliasse

- Auch möglich: Vektoren von Vektoren von Vektoren von ...: `std::vector<std::vector<std::vector<...>>>`
- Typnamen können offensichtlich laaaaaaaang werden
- Dann hilft die Deklaration eines *Typ-Alias*:

`using` *Name* = *Typ*;

Name, unter dem der Typ neu auch angesprochen werden kann

bestehender Typ

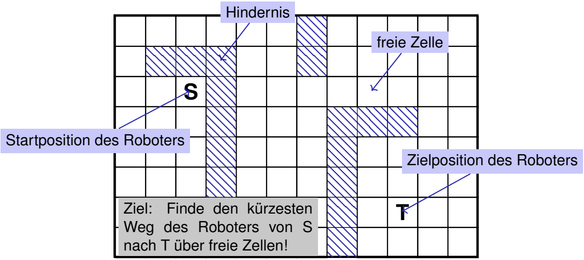
Typ-Aliasse: Beispiel

```
#include <iostream>
#include <vector>
using imatrix = std::vector<std::vector<int>>;

// POST: Matrix 'm' was output to stream 'out'
void print(const imatrix& m, std::ostream& out);

int main() {
  imatrix m = ...;
  print(m, std::cout);
}
```

Hinweis: `const`-Referenz für Effizienz (keine Kopie) und Sicherheit (unveränderlich)

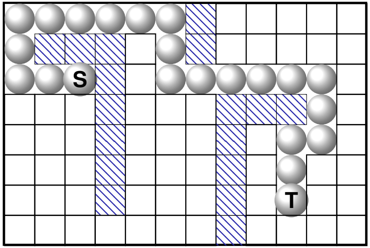
Anwendung: Kürzeste Wege

Fabrik-Halle ($n \times m$ quadratische Zellen)



Anwendung: Kürzeste Wege

Lösung

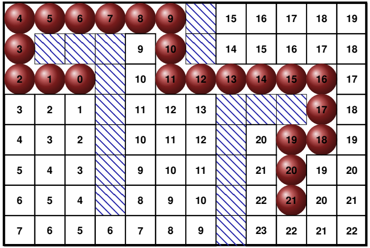


Ein (scheinbar) anderes Problem

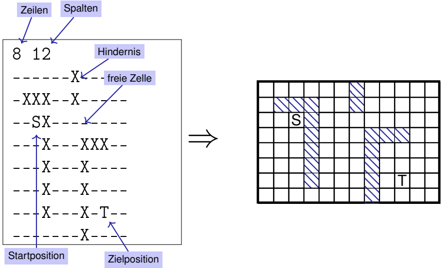
Finde die *Längen* der kürzesten Wege zu *allen* möglichen Zielen

Ein (scheinbar) anderes Problem

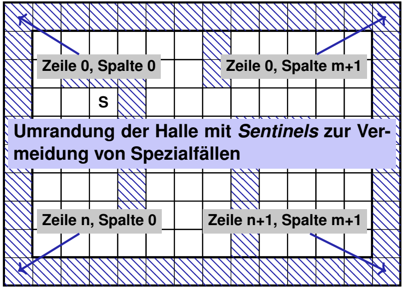
Finde die *Längen* der kürzesten Wege zu *allen* möglichen Zielen



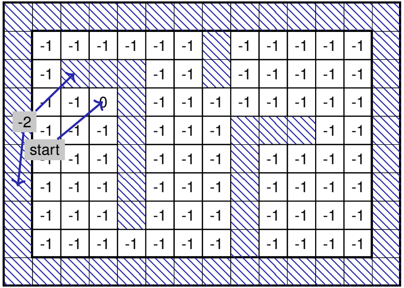
Vorbereitung: Eingabeformat



Vorbereitung: Wächter (*Sentinels*)



Vorbereitung: Initiale Markierung



Das Kürzeste-Wege-Programm

- Einlesen der Dimensionen und Bereitstellung eines zweidimensionalen Feldes für die Weglängen

```
#include<iostream>
#include<vector>

int main()
{
  // read floor dimensions
  int n; std::cin >> n; // number of rows
  int m; std::cin >> m; // number of columns

  // define a two-dimensional
  // array of dimensions
  // (n+2) x (m+2) to hold the floor plus extra walls around
  std::vector<std::vector<int>> floor (n+2, std::vector<int>(m+2));
```

Wächter (Sentinel)

Das Kürzeste-Wege-Programm

- Einlesen der Hallenbelegung und Initialisierung der Längen

```
int tr = 0;
int tc = 0;
for (int r=1; r<n+1; ++r)
  for (int c=1; c<m+1; ++c) {
    char entry = '-';
    std::cin >> entry;
    if      (entry == 'S') floor[r][c] = 0;
    else if (entry == 'T') floor[tr = r][tc = c] = -1;
    else if (entry == 'X') floor[r][c] = -2;
    else if (entry == '-') floor[r][c] = -1;
  }
```

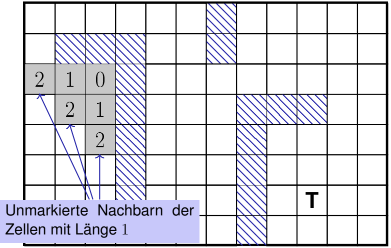

Das Kürzeste-Wege-Programm

- Hinzufügen der umschliessenden „Wände”

```
for (int r=0; r<n+2; ++r)
  floor[r][0] = floor[r][m+1] = -2;

for (int c=0; c<m+2; ++c)
  floor[0][c] = floor[n+1][c] = -2;
```


Markierung aller Zellen mit ihren Weglängen

Schritt 2: Alle Zellen mit Weglänge 2



Hauptschleife

Finde und markiere alle Zellen mit Weglängen $i = 1, 2, 3...$

```
for (int i=1;; ++i) {
  bool progress = false;
  for (int r=1; r<n+1; ++r)
    for (int c=1; c<m+1; ++c) {
     if (floor[r][c] != −1) continue;
     if (floor[r−1][c] == i−1 || floor[r+1][c] == i−1 ||
         floor[r][c−1] == i−1 || floor[r][c+1] == i−1 ) {
       floor[r][c] = i; // label cell with i
       progress = true;
     }
    }
  if (!progress) break;
}
```


Das Kürzeste-Wege-Programm

Markieren des kürzesten Weges durch „Rückwärtslaufen“ vom Ziel zum Start

```
int r = tr; int c = tc;
while (floor[r][c] > 0) {
  const int d = floor[r][c] − 1;
  floor[r][c] = −3;
  if      (floor[r−1][c] == d) −−r;
  else if (floor[r+1][c] == d) ++r;
  else if (floor[r][c−1] == d) −−c;
  else ++c; // (floor[r][c+1] == d)
}
```


Markierung am Ende

-3	-3	-3	-3	-3	-3		15	16	17	18	19
-3				9	-3		14	15	16	17	18
-3	-3	0		10	-3	-3	-3	-3	-3	-3	17
3	2	1		11	12	13				-3	18
4	3	2		10	11	12		20	-3	-3	19
5	4	3		9	10	11		21	-3	19	20
6	5	4		8	9	10		22	-3	20	21
7	6	5	6	7	8	9		23	22	21	22

Das Kürzeste-Wege-Programm: Ausgabe

Ausgabe

```
for (int r=1; r<n+1; ++r) {
  for (int c=1; c<m+1; ++c)
    if (floor[r][c] == 0)
        std::cout << 'S';
    else if (r == tr && c == tc)
        std::cout << 'T';
    else if (floor[r][c] == -3)
        std::cout << 'o';
    else if (floor[r][c] == -2)
        std::cout << 'X';
    else
        std::cout << '-';
  std::cout << "\n";
}
```

$\Rightarrow$

```
ooooooX-----
oXXX-oX-----
ooSX-oooooo-
---X---XXXo-
---X---X-oo-
---X---X-o--
---X---X-T--
-------X----
```

Das Kürzeste-Wege-Programm

- Algorithmus: *Breitensuche* (Breiten- vs. Tiefensuche wird typischerweise in Algorithmik-Vorlesungen diskutiert)
- Das Programm kann recht langsam sein, weil für jedes i alle Zellen durchlaufen werden
- Verbesserung: Für Markierung i, durchlaufe nur die Nachbarn der Zellen mit Markierung $i-1$
- Verbesserung: Stoppe, sobald das Ziel erreicht wurde

16. Rekursion 1

Mathematische Rekursion, Terminierung, der Aufrufstapel, Beispiele, Rekursion vs. Iteration, n-Damen Problem, Lindenmayer System

Mathematische Rekursion

- Viele mathematische Funktionen sind sehr natürlich rekursiv definierbar.
- Das heisst, die Funktion erscheint in ihrer eigenen Definition.

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \le 1 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Rekursion in $\mathrm{C}{+}{+}$: Genauso!

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \le 1 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

```
// POST: return value is n!
unsigned int fac(unsigned int n) {
  if (n <= 1)
    return 1;
  else
    return n * fac(n-1);
}
```

Unendliche Rekursion

- ist so schlecht wie eine Endlosschleife ...
- ... nur noch schlechter („verbrennt“ Zeit und Speicher)

```
void f()
{
  f(); // f() -> f() -> ... stack overflow
}
```


Rekursive Funktionen: Terminierung

Wie bei Schleifen brauchen wir *garantierten Fortschritt Richtung einer Abbruchbedingung (≈ Basisfall)*

Beispiel `fac(n)`:

- Rekursion endet falls $n \leq 1$
- Rekursiver Aufruf mit neuem Argument $< n$
- Abbruchbedingung wird daher garantiert erreicht

```
unsigned int fac(
    unsigned int n) {

  if (n <= 1)
    return 1;
  else
    return n * fac(n-1);
}
```


Rekursive Funktionen: Auswertung

Beispiel: `fac(4)`

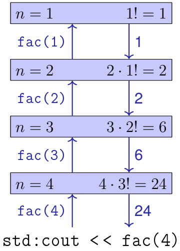
```
// POST: return value is n!
unsigned int fac(unsigned int n)
{
  if (n <= 1) return 1;
  return n * fac(n-1); // n > 1
}
```

Initialisierung des formalen Arguments: $n = 4$
Rekursiver Aufruf mit Argument $n - 1 == 3$

Der Aufrufstapel

Bei jedem Funktionsaufruf:

- Wert des Aufrufarguments kommt auf einen Stapel
- Es wird immer mit dem obersten Wert gearbeitet
- Am Ende des Aufrufs wird der oberste Wert wieder vom Stapel gelöscht



Euklidischer Algorithmus

- findet den grössten gemeinsamen Teiler $\mathrm{gcd}(a,b)$ zweier natürlicher Zahlen a und b
- basiert auf folgender mathematischen Rekursion (Beweis im Skript):

$$\mathrm{gcd}(a,b) = \begin{cases} a, & \text{falls } b = 0 \\ \mathrm{gcd}(b, a \bmod b), & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Euklidischer Algorithmus in C++

$$\mathrm{gcd}(a,b) = \begin{cases} a, & \text{falls } b = 0 \\ \mathrm{gcd}(b, a \bmod b), & \text{andernfalls} \end{cases}$$

```
unsigned int gcd(unsigned int a, unsigned int b) {
  if (b == 0)
    return a;
  else
    return gcd(b, a % b);
}
```

Terminierung: $a \bmod b < b$, also wird b in jedem rekursiven Aufruf kleiner.

Fibonacci-Zahlen

$$F_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 \ldots$

Fibonacci-Zahlen in C++

Laufzeit

`fib(50)` dauert „ewig“, denn es berechnet F_{48} 2-mal, F_{47} 3-mal, F_{46} 5-mal, F_{45} 8-mal, F_{44} 13-mal, F_{43} 21-mal ... F_1 ca. 10^9 mal (!)

```
unsigned int fib(unsigned int n) {
  if (n == 0) return 0;
  if (n == 1) return 1;
  return fib(n-1) + fib(n-2); // n > 1
}
```

Schnelle Fibonacci-Zahlen

Idee:

- Berechne jede Fibonacci-Zahl nur einmal, in der Reihenfolge $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n$
- Speichere jeweils die zwei letzten berechneten Fibonacci-Zahlen (Variablen `a` und `b`)
- Berechne die nächste Zahl als Summe von `a` und `b`

Kann rekursiv und iterativ implementiert werden, letzteres ist einfacher/direkter

Schnelle Fibonacci-Zahlen in C++

```
unsigned int fib(unsigned int n) {
  if (n == 0) return 0;
  if (n == 1) return 1;
  unsigned int a = 0;  // F_0
  unsigned int b = 1;  // F_1
  for (unsigned int i = 2; i <= n; ++i){
    unsigned int a_old = a;  // F_i-2
    a = b;                   // F_i-1
    b += a_old;              // F_i-1 += F_i-2 -> F_i
  }
  return b;
}
```

sehr schnell auch bei `fib(50)`

$(F_{i-2}, F_{i-1}) \longrightarrow (F_{i-1}, F_i)$

a

b

Rekursion und Iteration

Rekursion kann *immer* simuliert werden durch

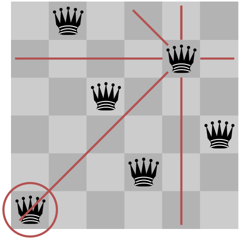
- Iteration (Schleifen)
- expliziten „Aufrufstapel“ (z.B. Feld).

Oft sind rekursive Formulierungen einfacher, aber manchmal auch weniger effizient.

Die Macht der Rekursion

- Einige Probleme scheinen ohne Rekursion kaum lösbar zu sein. Mit Rekursion werden sie plötzlich deutlich einfacher lösbar.
- Beispiele: *das n-Damen-Problem*, Die Türme von Hanoi, Parsen von Ausdrücken, *Sudoku-Löser*, Umgekehrte Aus- oder Eingabe, Suchen in Bäumen, Divide-And-Conquer (z.B. Sortieren)

Das n-Damen Problem

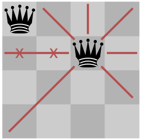


- Gegeben sei ein $n \times n$ Schachbrett
- Zum Beispiel $n = 6$
- Frage: ist es möglich n Damen so zu platzieren, dass keine zwei Damen sich bedrohen?
- Wenn ja, wie viele Lösungen gibt es?

Lösung?

- Durchprobieren aller Möglichkeiten?
- $\binom{n^2}{n}$ Möglichkeiten. Zu viele!
- Nur eine Dame pro Zeile: n^n Möglichkeiten. Besser – aber auch noch zu viele.
- Idee: Unsinnige Versuche gar nicht erst weiterverfolgen, stattdessen falsche Züge zurücknehmen $\Rightarrow$ *Backtracking*

Lösung mit Backtracking

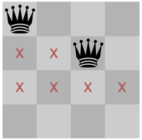


Nächste Dame in nächster Zeile (keine Kollision)

queens

0
2
0
0

Lösung mit Backtracking

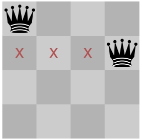


Alle Felder in nächster Zeile verboten. Zurück! (Backtracking!)

queens

0
2
4
0

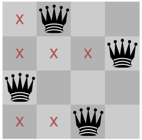
Lösung mit Backtracking

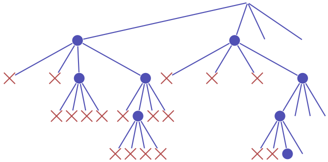


Dame eins weiter setzen und wieder versuchen

queens
0
3
0
0

Suchstrategie als Baum visualisiert





Prüfe Dame

```
using Queens = std::vector<unsigned int>;

// post: returns if queen in the given row is valid, i.e.
//      does not share a common row, column or diagonal
//      with any of the queens on rows 0 to row−1
bool valid(const Queens& queens, unsigned int row) {
  unsigned int col = queens[row];
  for (unsigned int r = 0; r != row; ++r) {
    unsigned int c = queens[r];
    if (col == c || col − row == c − r || col + row == c + r)
      return false; // same column or diagonal
  }
  return true; // no shared column or diagonal
}
```


Rekursion: Finde eine Lösung

```
// pre: all queens from row 0 to row−1 are valid,
//      i.e. do not share any common row, column or diagonal
// post: returns if there is a valid position for queens on
//      row .. queens.size(). if true is returned then the
//      queens vector contains a valid configuration.
bool solve(Queens& queens, unsigned int row) {
  if (row == queens.size())
    return true;
  for (unsigned int col = 0; col != queens.size(); ++col) {
    queens[row] = col;
    if (valid(queens, row) && solve(queens,row+1))
        return true; // (else check next position)
  }
  return false; // no valid configuration found
}
```

Rekursion: Zähle alle Lösungen

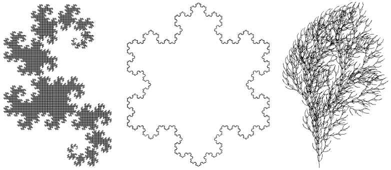
```
// pre: all queens from row 0 to row−1 are valid,
//   i.e. do not share any common row, column or diagonal
// post: returns the number of valid configurations of the
//   remaining queens on rows row ... queens.size()
int nSolutions(Queens& queens, unsigned int row) {
  if (row == queens.size())
    return 1;
  int count = 0;
  for (unsigned int col = 0; col != queens.size(); ++col) {
    queens[row] = col;
    if (valid(queens, row))
      count += nSolutions(queens,row+1);
  }
  return count;
}
```


Hauptprogramm

```
// pre: positions of the queens in vector queens
// post: output of the positions of the queens in a graphical way
void print(const Queens& queens);

int main() {
  int n;
  std::cin >> n;
  Queens queens(n);
  if (solve(queens,0)) {
    print(queens);
    std::cout << "# solutions:" << nSolutions(queens,0) << std::endl;
  } else
    std::cout << "no solution" << std::endl;
  return 0;
}
```


Lindenmayer-Systeme (L-Systeme)

Fraktale aus Strings und Schildkröten



- L-Systeme wurden vom ungarischen Biologen Aristid Lindenmayer (1925–1989) zur Modellierung von Pflanzenwachstum erfunden.
- Rekursion ist natürlich klausurrelevant, die L-Systeme an sich sind es jedoch nicht

Definition und Beispiel

- Alphabet Σ
- Σ^*: alle endlichen Wörter über Σ
- Produktion $P : \Sigma \to \Sigma^*$
- Startwort $s_0 \in \Sigma^*$

- $\{\mathrm{F}, +, -\}$
-

c	$P(c)$
F	F + F +
+	+
−	−

- F

Definition

Das Tripel $\mathcal{L} = (\Sigma, P, s_0)$ ist ein L-System.

Die beschriebene Sprache

Wörter $w_0, w_1, w_2, \ldots \in \Sigma^*$: $P(\mathrm{F}) = \mathrm{F} + \mathrm{F} +$

$$w_0 := s_0 \qquad\qquad w_0 := \mathrm{F}$$

$$\mathrm{F} + \mathrm{F} +$$

$$w_1 := P(w_0) \qquad\qquad w_1 := \boxed{\mathrm{F}}\boxed{+}\boxed{\mathrm{F}}\boxed{+}$$

$$w_2 := P(w_1) \qquad\qquad w_2 := \boxed{\mathrm{F} + \mathrm{F} +}\boxed{+}\boxed{\mathrm{F} + \mathrm{F} +}\boxed{+}$$

$$P(\mathrm{F})P(+)P(\mathrm{F})P(+)$$

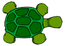
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Definition

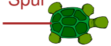
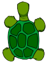
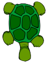
$P(c_1 c_2 \ldots c_n) := P(c_1)P(c_2)\ldots P(c_n)$

Turtle-Grafik

Schildkröte mit Position und Richtung

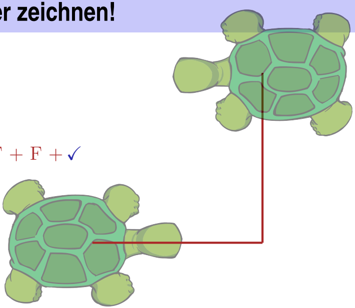


Schildkröte versteht 3 Befehle:

F: Gehe einen Schritt vorwärts ✓	$+$: Drehe dich um 90 Grad ✓	$-$: Drehe dich um -90 Grad ✓
Spur 		

Wörter zeichnen!

$w_1 = \mathrm{F} + \mathrm{F} +$ ✓



`lindenmayer`: Hauptprogramm

Wort $w_0 \in \Sigma^*$:

```
int main() {
  std::cout << "Maximal Recursion Depth =? ";
  unsigned int n;
  std::cin >> n;

  std::string w = "F"; // w_0
  produce(w,n);

  return 0;
}
```

$w = w_0 = \mathrm{F}$

lindenmayer: production

```
// POST: recursively iterate over the production of the characters
//       of a word.
//       When recursion limit is reached, the word is "drawn"
void produce(std::string word, int depth) {
  if (depth > 0) {
    for (unsigned int k = 0; k < word.length(); ++k)
      produce(replace(word[k]), depth-1);
  } else {
    draw_word(word);
  }
}
```

$w = w_i \to w = w_{i+1}$

Zeichne $w = w_n$

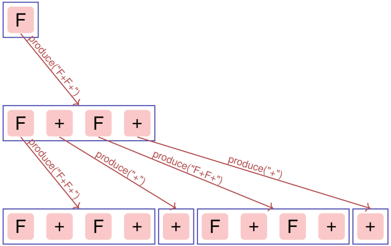
lindenmayer: replace

```
// POST: returns the production of c
std::string replace(const char c) {
  switch (c) {
    case 'F':
      return "F+F+";
    default:
      return std::string (1, c); // trivial production c -> c
  }
}
```


lindenmayer: draw

```
// POST: draws the turtle graphic interpretation of word
void draw_word(const std::string& word) {
  for (unsigned int k = 0; k < word.length(); ++k)
    switch (word[k]) {
      case 'F':
        turtle::forward(); // move one step forward
        break;
      case '+':
        turtle::left(90); // turn counterclockwise by 90 degrees
        break;
      case '-':
        turtle::right(90); // turn clockwise by 90 degrees
    }
}
```


Die Rekursion



(Obige Implementierung realisiert eine *Tiefensuche*)

L-Systeme: Erweiterungen

- Beliebige Symbole ohne grafische Interpretation (dragon)
- Beliebige Drehwinkel (snowflake)
- Sichern und Wiederherstellen des Schildkröten-Zustandes $\rightarrow$ Pflanzen (bush)