7. Fliesskommazahlen II

Fliesskommazahlensysteme; IEEE Standard; Grenzen der Fliesskommaarithmetik; Fliesskomma-Richtlinien; Harmonische Zahlen

Fliesskommazahlensysteme

Ein Fliesskommazahlensystem ist durch vier natürliche Zahlen definiert:

- $\beta \geq 2$, die Basis,
- $p \geq 1$, die Präzision (Stellenzahl),
- $e_{\min}$, der kleinste Exponent,
- $e_{\max}$, der grösste Exponent.

Bezeichnung:

$$F(\beta, p, e_{\min}, e_{\max})$$

Fliesskommazahlensysteme

$F(\beta, p, e_{\min}, e_{\max})$ enthält die Zahlen

$$\pm \sum_{i=0}^{p-1} d_i \beta^{-i} \cdot \beta^e,$$

$d_i \in \{0, \ldots, \beta - 1\}, \quad e \in \{e_{\min}, \ldots, e_{\max}\}$.

In Basis-β-Darstellung:

$$\pm\, d_{0\bullet} d_1 \ldots d_{p-1} \times \beta^e,$$

Fliesskommazahlensysteme

Beispiel

- $\beta = 10$

Darstellungen der Dezimalzahl 0.1

$$1.0 \cdot 10^{-1}, \quad 0.1 \cdot 10^{0}, \quad 0.01 \cdot 10^{1}, \quad \ldots$$

Normalisierte Darstellung

Normalisierte Zahl:

$$\pm\, d_{0\bullet} d_1 \dots d_{p-1} \times \beta^e, \qquad d_0 \neq 0$$

Bemerkung 1

Die normalisierte Darstellung ist eindeutig und deshalb zu bevorzugen.

Bemerkung 2

Die Zahl 0 (und alle Zahlen kleiner als $\beta^{e_{\min}}$) haben keine normalisierte Darstellung (werden wir später beheben)!

Menge der normalisierten Zahlen

$$F^*(\beta, p, e_{\min}, e_{\max})$$

Normalisierte Darstellung

Beispiel $F^*(2, 3, -2, 2)$ (nur positive Zahlen)

$d_{0\bullet} d_1 d_2$	$e = -2$	$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$	$e = 2$
1.00_2	0.25	0.5	1	2	4
1.01_2	0.3125	0.625	1.25	2.5	5
1.10_2	0.375	0.75	1.5	3	6
1.11_2	0.4375	0.875	1.75	3.5	7

Binäre und dezimale Systeme

- Intern rechnet der Computer mit $\beta = 2$ (binäres System)
- Literale und Eingaben haben $\beta = 10$ (dezimales System)
- Eingaben müssen umgerechnet werden!

Umrechnung dezimal $\rightarrow$ binär

Angenommen, $0 < x < 2$.

Binärdarstellung:

$$x = \sum_{i=-\infty}^{0} b_i 2^i = b_0{\bullet}b_{-1}b_{-2}b_{-3}\ldots$$

$$= b_0 + \sum_{i=-\infty}^{-1} b_i 2^i = b_0 + \sum_{i=-\infty}^{0} b_{i-1} 2^{i-1}$$

$$= b_0 + \underbrace{\left(\sum_{i=-\infty}^{0} b_{i-1} 2^i\right)}_{x'=b_{-1}{\bullet}b_{-2}b_{-3}b_{-4}} / 2$$

Umrechnung dezimal $\rightarrow$ binär

Angenommen, $0 < x < 2$.

- Also: $x' = b_{-1}{\bullet}b_{-2}b_{-3}b_{-4}\ldots = 2 \cdot (x - b_0)$
- Schritt 1 (für x): Berechnen von b_0:

$$b_0 = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Schritt 2 (für x): Berechnen von $b_{-1}, b_{-2}, \ldots$:

  Gehe zu Schritt 1 (für $x' = 2 \cdot (x - b_0)$)

Binärdarstellung von 1.1

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_{-1} = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_{-2} = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_{-3} = \mathbf{0}$	0.8	1.6
1.6	$b_{-4} = \mathbf{1}$	0.6	1.2
1.2	$b_{-5} = \mathbf{1}$	0.2	0.4

$\Rightarrow$ $1.0\overline{0011}$, periodisch, *nicht* endlich

Binärdarstellungen von 1.1 und 0.1

- sind nicht endlich, also gibt es Fehler bei der Konversion in ein (endliches) binäres Fliesskommazahlensystem.
- `1.1f` und `0.1f` sind nicht 1.1 und 0.1, sondern geringfügig fehlerhafte Approximationen dieser Zahlen.
- In `diff.cpp`: $1.1 - 1.0 \neq 0.1$

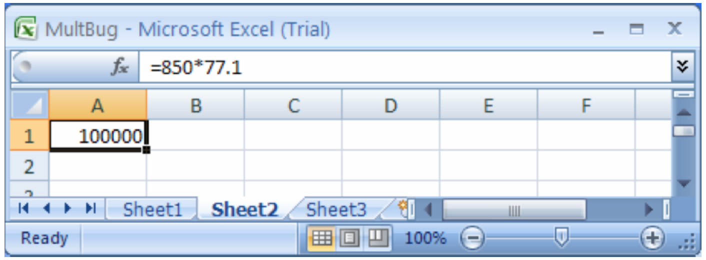
Binärdarstellungen von 1.1 und 0.1

auf meinem Computer:

$$\begin{aligned} \texttt{1.1} &= \underline{1.1000000000000000}888178\ldots \\ \texttt{1.1f} &= \underline{1.1000000}238418\ldots \end{aligned}$$

Der Excel-2007-Bug

```
std::cout << 850 * 77.1; // 65535
```



- 77.1 hat keine endliche Binärdarstellung, wir erhalten $65534.9999999999927\ldots$
- Für diese und genau 11 andere “seltene” Zahlen war die Ausgabe (und nur diese) fehlerhaft.

http://www.lomont.org/Math/Papers/2007/Excel2007Bug.pdf

Rechnen mit Fliesskommazahlen

Beispiel ($\beta = 2, p = 4$):

$$\begin{array}{rr} & 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + & 1.011 \cdot 2^{-1} \\ \hline & = 1.001 \cdot 2^{0} \end{array}$$

1. Exponenten anpassen durch Denormalisieren einer Zahl 2. Binäre Addition der Signifikanden 3. Renormalisierung 4. Runden auf p signifikante Stellen, falls nötig

Der IEEE Standard 754

- legt Fliesskommazahlensysteme und deren Rundungsverhalten fest
- wird fast überall benutzt
- Single precision (`float`) Zahlen:

  $F^*(2, 24, -126, 127)$ plus $0, \infty, \ldots$

- Double precision (`double`) Zahlen:

  $F^*(2, 53, -1022, 1023)$ plus $0, \infty, \ldots$

- Alle arithmetischen Operationen runden das *exakte* Ergebnis auf die nächste darstellbare Zahl

Der IEEE Standard 754

Warum

$$F^*(2, 24, \ -126, 127)?$$

- 1 Bit für das Vorzeichen
- 23 Bit für den Signifikanden (führendes Bit ist 1 und wird nicht gespeichert)
- 8 Bit für den Exponenten (256 mögliche Werte)(254 mögliche Exponenten, 2 Spezialwerte: 0, ∞,…)

$\Rightarrow$ insgesamt 32 Bit.

Der IEEE Standard 754

Warum

$$F^*(2, 53, -1022, 1023)?$$

- 1 Bit für das Vorzeichen
- 52 Bit für den Signifikanden (führendes Bit ist 1 und wird nicht gespeichert)
- 11 Bit für den Exponenten (2046 mögliche Exponenten, 2 Spezialwerte: 0, ∞,…)

$\Rightarrow$ insgesamt 64 Bit.

Fliesskomma-Richtlinien Regel 1

Regel 1

Teste keine gerundeten Fliesskommazahlen auf Gleichheit!

```
for (float i = 0.1; i != 1.0; i += 0.1)
   std::cout << i << "\n";
```

Endlosschleife, weil i niemals exakt 1 ist!

Fliesskomma-Richtlinien Regel 2

Regel 2

Addiere keine zwei Zahlen sehr unterschiedlicher Grösse!

$$\begin{aligned} & 1.000 \cdot 2^5 \\ & +1.000 \cdot 2^0 \\ & = 1.00001 \cdot 2^5 \\ \text{“=”}\ & 1.000 \cdot 2^5 \quad \text{(Rundung auf 4 Stellen)} \end{aligned}$$

Addition von 1 hat keinen Effekt!

Harmonische Zahlen — Regel 2

- Die n-te Harmonische Zahl ist

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \ln n.$$

- Diese Summe kann vorwärts oder rückwärts berechnet werden, was mathematisch gesehen natürlich äquivalent ist.

Harmonische Zahlen — Regel 2

```
// Program: harmonic.cpp
// Compute the n-th harmonic number in two ways.

#include <iostream>

int main()
{
  // Input
  std::cout << "Compute H_n for n =? ";
  unsigned int n;
  std::cin >> n;

  // Forward sum
  float fs = 0;
  for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i)
    fs += 1.0f / i;

  // Backward sum
  float bs = 0;
  for (unsigned int i = n; i >= 1; --i)
    bs += 1.0f / i;

  // Output
  std::cout << "Forward sum  = " << fs << "\n"
            << "Backward sum = " << bs << "\n";
  return 0;
}
```


Harmonische Zahlen — Regel 2

Ergebnisse:

- ```
  Compute H_n for n =?  10000000
  Forward sum = 15.4037
  Backward sum = 16.686
  ```
- ```
  Compute H_n for n =?  100000000
  Forward sum = 15.4037
  Backward sum = 18.8079
  ```


Harmonische Zahlen — Regel 2

Beobachtung:

- Die Vorwärtssumme wächst irgendwann nicht mehr und ist “richtig” falsch.
- Die Rückwärtssumme approximiert H_n gut.

Erklärung:

- Bei $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ sind späte Terme zu klein, um noch beizutragen.
- Problematik wie bei $2^5 + 1$ “=” 2^5

Fliesskomma-Richtlinien — Regel 3

Regel 3
Subtrahiere keine zwei Zahlen sehr ähnlicher Grösse!

Auslöschungsproblematik, siehe Skript.

Literatur

David Goldberg: What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic (1991)

Randy Glasbergen, 1996

8. Funktionen I

Funktionsdefinitionen- und Aufrufe, Auswertung von Funktionsaufrufen, Der Typ `void`, Vor- und Nachbedingungen

Funktionen

- kapseln häufig gebrauchte Funktionalität (z.B. Potenzberechnung) und machen sie einfach verfügbar
- strukturieren das Programm: Unterteilung in kleine Teilaufgaben, jede davon durch eine Funktion realisiert

⇒ Prozedurales Programmieren; Prozedur: anderes Wort für Funktion.

Beispiel: Potenzberechnung

```
double a;
int n;
std::cin >> a; // Eingabe a
std::cin >> n; // Eingabe n
```

```
double result = 1.0;
if (n < 0) { // a^n = (1/a)^(−n)
  a = 1.0/a;
  n = −n;
}
for (int i = 0; i < n; ++i)
  result *= a;
```

"Funktion pow"

`std::cout << a << "^" << n << " = " <<` ~~result~~`pow(a,n) << ".\n";`

Funktion zur Potenzberechnung

```
// PRE: e >= 0 || b != 0.0
// POST: return value is b^e
double pow(double b, int e)
{
    double result = 1.0;
    if (e < 0) { // b^e = (1/b)^(−e)
        b = 1.0/b;
        e = −e;
    }
    for (int i = 0; i < e; ++i)
        result *= b;
    return result;
}
```


Funktion zur Potenzberechnung

```
// Prog: callpow.cpp
// Define and call a function for computing powers.
#include <iostream>

double pow(double b, int e){...}

int main()
{
  std::cout << pow( 2.0, −2) << "\n"; // outputs 0.25
  std::cout << pow( 1.5, 2) << "\n"; // outputs 2.25
  std::cout << pow(−2.0, 9) << "\n"; // outputs −512

  return 0;
}
```


Funktionsdefinitionen

Rückgabetyp *Argumenttypen*

T fname (T_1 pname$_1$, T_2 pname$_2$, $\ldots$, T_N pname$_N$)
block

Funktionsrumpf

Funktionsname *Formale Argumente*

Funktionsdefinitionen

- dürfen nicht *lokal* auftreten, also nicht in Blocks, nicht in anderen Funktionen und nicht in Kontrollanweisungen
- können im Programm ohne Trennsymbole aufeinander folgen

```
double pow (double b, int e)
{
    ...
}

int main ()
{
    ...
}
```


Beispiel: Xor

```
// post: returns l XOR r
bool Xor(bool l, bool r)
{
    return l && !r || !l && r;
}
```


Beispiel: Harmonic

```
// PRE: n >= 0
// POST: returns nth harmonic number
//      computed with backward sum
float Harmonic(int n)
{
    float res = 0;
    for (unsigned int i = n; i >= 1; --i)
        res += 1.0f / i;
    return res;
}
```


Beispiel: min

```
// POST: returns the minimum of a and b
int min(int a, int b)
{
    if (a<b)
        return a;
    else
        return b;
}
```

Funktionsaufrufe

fname (*expression*$_1$, *expression*$_2$, $\ldots$, *expression*$_N$)

- Alle Aufrufargumente müssen konvertierbar sein in die entsprechenden Argumenttypen.
- Der Funktionsaufruf selbst ist ein Ausdruck vom Rückgabetyp. Wert und Effekt wie in der Nachbedingung der Funktion *fname* angegeben.

Beispiel: `pow(a,n)`: Ausdruck vom Typ `double`

Funktionsaufrufe

Für die Typen, die wir bisher kennen, gilt:

- Aufrufargumente sind R-Werte
- Funktionsaufruf selbst ist R-Wert.

fname: R-Wert $\times$ R-Wert $\times \cdots \times$ R-Wert $\longrightarrow$ R-Wert

Auswertung eines Funktionsaufrufes

- Auswertung der Aufrufargumente
- Initialisierung der formalen Argumente mit den resultierenden Werten
- Ausführung des Funktionsrumpfes: formale Argumente verhalten sich dabei wie lokale Variablen
- Ausführung endet mit
  `return` *expression*;

Rückgabewert ergibt den Wert des Funktionsaufrufes.

Beispiel: Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(−e)
        b = 1.0/b;
        e = −e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result ∗ = b;
    return result;
}

...
pow (2.0, −2)
```

Aufruf von pow

Rückgabe

Formale Funktionsargumente[7]

- Deklarative Region: Funktionsdefinition
- sind ausserhalb der Funktionsdefinition *nicht* sichtbar
- werden bei jedem Aufruf der Funktion neu angelegt (automatische Speicherdauer)
- Änderungen ihrer Werte haben keinen Einfluss auf die Werte der Aufrufargumente (Aufrufargumente sind R-Werte)

[7] manchmal „formale Parameter"

Gültigkeit formaler Argumente

```
double pow(double b, int e){
    double r = 1.0;
    if (e<0) {
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        r * = b;
    return r;
}
```

```
int main(){
    double b = 2.0;
    int e = -2;
    double z = pow(b, e);

    std::cout << z; // 0.25
    std::cout << b; // 2
    std::cout << e; // -2
    return 0;
}
```

Nicht die formalen Argumente `b` und `e` von pow, sondern die hier definierten Variablen lokal zum Rumpf von `main`

Der Typ `void`

- Fundamentaler Typ mit leerem Wertebereich
- Verwendung als Rückgabetyp für Funktionen, die *nur* einen Effekt haben

```
// POST: "(i, j)" has been written to
//       standard output
void print_pair (int i, int j)
{
    std::cout << "(" << i << ", " << j << ")\n";
}

int main()
{
    print_pair(3,4); // outputs (3, 4)
    return 0;
}
```


`void`-Funktionen

- benötigen kein `return`.
- Ausführung endet, wenn Ende des Funktionsrumpfes erreicht wird oder
- `return;` erreicht wird
  oder
- `return` *expression*`;` erreicht wird.

Ausdruck vom Typ `void` (z.B. Aufruf einer Funktion mit Rückgabetyp `void`

Vor- und Nachbedingungen

- beschreiben (möglichst vollständig) was die Funktion „macht”
- dokumentieren die Funktion für Benutzer / Programmierer (wir selbst oder andere)
- machen Programme lesbarer: wir müssen nicht verstehen, *wie* die Funktion es macht
- werden vom Compiler ignoriert
- Vor- und Nachbedingungen machen – unter der Annahme ihrer Korrektheit – Aussagen über die Korrektheit eines Programmes möglich.

Vorbedingungen

Vorbedingung (precondition):

- Was muss bei Funktionsaufruf gelten?
- Spezifiziert *Definitionsbereich* der Funktion.

0^e ist für $e < 0$ undefiniert

```
// PRE: e >= 0 || b != 0.0
```


Nachbedingungen

Nachbedingung (postcondition):

- Was gilt nach Funktionsaufruf?
- Spezifiziert *Wert* und *Effekt* des Funktionsaufrufes.

Hier nur Wert, kein Effekt.

```
// POST: return value is b^e
```


Vor- und Nachbedingungen

- sollten korrekt sein:
- *Wenn* die Vorbedingung beim Funktionsaufruf gilt, *dann* gilt auch die Nachbedingung nach dem Funktionsaufruf.

Funktion `pow`: funktioniert für alle Basen $b \neq 0$

Vor- und Nachbedingungen

- Gilt Vorbedingung beim Funktionsaufruf nicht, so machen wir keine Aussage.
- C++-Standard-Jargon: „Undefined behavior”.

Funktion `pow`: Division durch 0

Vor- und Nachbedingungen

- Vorbedingung sollte so *schwach* wie möglich sein (möglichst grosser Definitionsbereich)
- Nachbedingung sollte so *stark* wie möglich sein (möglichst detaillierte Aussage)

Fromme Lügen...

```
// PRE: e >= 0 || b != 0.0
// POST: return value is b^e
```

ist formal inkorrekt:

- Überlauf, falls e oder b zu gross sind
- b^e vielleicht nicht als double Wert darstellbar (Löcher im Wertebereich)

Fromme Lügen... sind erlaubt.

```
// PRE: e >= 0 || b != 0.0
// POST: return value is b^e
```

Die exakten Vor- und Nachbedingungen sind plattformabhängig und meist sehr kompliziert. Wir abstrahieren und geben die mathematischen Bedingungen an. $\Rightarrow$ Kompromiss zwischen formaler Korrektheit und lascher Praxis.

Prüfen von Vorbedingungen…

- Vorbedingungen sind nur Kommentare.
- Wie können wir *sicherstellen*, dass sie beim Funktionsaufruf gelten?

…mit Assertions

```
#include <cassert>
...
// PRE: e >= 0 || b != 0.0
// POST: return value is b^e
double pow(double b, int e) {
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    ...
}
```


Nachbedingungen mit Assertions

- Das Ergebnis "komplizierter" Berechnungen ist oft einfach zu prüfen.
- Dann lohnt sich der Einsatz von assert für die Nachbedingung

```
// PRE: the discriminant p*p/4 - q is nonnegative
// POST: returns larger root of the polynomial x^2 + p x + q
double root(double p, double q)
{
    assert(p*p/4 >= q); // precondition
    double x1 = - p/2 + sqrt(p*p/4 - q);
    assert(equals(x1*x1+p*x1+q,0)); // postcondition
    return x1;
}
```


Ausnahmen (Exception Handling)

- Assertions sind ein grober Hammer; falls eine Assertion fehlschlägt, wird das Programm hart abgebrochen.
- C++bietet elegantere Mittel (Exceptions), um auf solche Fehlschläge situationsabhängig (und oft auch ohne Programmabbruch) zu reagieren.
- "Narrensichere" Programmen sollten nur im Notfall abbrechen und deshalb mit Exceptions arbeiten; für diese Vorlesung führt das aber zu weit.