

8. Fließkommazahlen II

Fließkommazahlensysteme; IEEE Standard; Grenzen der Fließkommaarithmetik; Fließkomma-Richtlinien; Harmonische Zahlen

Fließkommazahlensysteme

Ein Fließkommazahlensystem ist durch vier natürliche Zahlen definiert:

- $\beta \geq 2$, die Basis,
- $p \geq 1$, die Präzision (Stellenzahl),
- e_{\min} , der kleinste Exponent,
- e_{\max} , der grösste Exponent.

Fließkommazahlensysteme

Ein Fließkommazahlensystem ist durch vier natürliche Zahlen definiert:

- $\beta \geq 2$, die Basis,
- $p \geq 1$, die Präzision (Stellenzahl),
- e_{\min} , der kleinste Exponent,
- e_{\max} , der grösste Exponent.

Bezeichnung:

$$F(\beta, p, e_{\min}, e_{\max})$$

Fliesskommazahlensysteme

$F(\beta, p, e_{\min}, e_{\max})$ enthält die Zahlen

$$\pm \sum_{i=0}^{p-1} d_i \beta^{-i} \cdot \beta^e,$$

$$d_i \in \{0, \dots, \beta - 1\}, \quad e \in \{e_{\min}, \dots, e_{\max}\}.$$

Fließkommazahlensysteme

$F(\beta, p, e_{\min}, e_{\max})$ enthält die Zahlen

$$\pm \sum_{i=0}^{p-1} d_i \beta^{-i} \cdot \beta^e,$$

$$d_i \in \{0, \dots, \beta - 1\}, \quad e \in \{e_{\min}, \dots, e_{\max}\}.$$

In Basis- β -Darstellung:

$$\pm d_0 \bullet d_1 \dots d_{p-1} \times \beta^e,$$

Fliesskommazahlensysteme

Darstellungen der Dezimalzahl 0.1 (mit $\beta = 10$):

$$1.0 \cdot 10^{-1}, \quad 0.1 \cdot 10^0, \quad 0.01 \cdot 10^1, \quad \dots$$

Unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten durch Wahl des Exponenten

Normalisierte Darstellung

Normalisierte Zahl:

$$\pm d_0 \bullet d_1 \dots d_{p-1} \times \beta^e, \quad d_0 \neq 0$$

Normalisierte Darstellung

Normalisierte Zahl:

$$\pm d_0 \bullet d_1 \dots d_{p-1} \times \beta^e, \quad d_0 \neq 0$$

Bemerkung 1

Die normalisierte Darstellung ist eindeutig und deshalb zu bevorzugen.

Normalisierte Darstellung

Normalisierte Zahl:

$$\pm d_0 \bullet d_1 \dots d_{p-1} \times \beta^e, \quad d_0 \neq 0$$

Bemerkung 2

Die Zahl 0, sowie alle Zahlen kleiner als $\beta^{e_{\min}}$, haben keine normalisierte Darstellung (greifen wir später wieder auf)

Menge der normalisierten Zahlen

$$F^*(\beta, p, e_{\min}, e_{\max})$$

Normalisierte Darstellung

Beispiel $F^*(2, 3, -2, 2)$

(nur positive Zahlen)

$d_0 \bullet d_1 d_2$	$e = -2$	$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$	$e = 2$
1.00_2	0.25	0.5	1	2	4
1.01_2	0.3125	0.625	1.25	2.5	5
1.10_2	0.375	0.75	1.5	3	6
1.11_2	0.4375	0.875	1.75	3.5	7



Normalisierte Darstellung

Beispiel $F^*(2, \mathbf{3}, -2, 2)$

(nur positive Zahlen)

$d_0 \cdot d_1 d_2$	$e = -2$	$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$	$e = 2$
1.00₂	0.25	0.5	1	2	4
1.01₂	0.3125	0.625	1.25	2.5	5
1.10₂	0.375	0.75	1.5	3	6
1.11₂	0.4375	0.875	1.75	3.5	7



Normalisierte Darstellung

Beispiel $F^*(2, 3, -2, 2)$

(nur positive Zahlen)

$d_0.d_1d_2$	$e = -2$	$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$	$e = 2$
1.00_2	0.25	0.5	1	2	4
1.01_2	0.3125	0.625	1.25	2.5	5
1.10_2	0.375	0.75	1.5	3	6
1.11_2	0.4375	0.875	1.75	3.5	7



Normalisierte Darstellung

Beispiel $F^*(2, 3, -2, \mathbf{2})$

(nur positive Zahlen)

$d_0.d_1d_2$	$e = -2$	$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$	$e = 2$
1.00_2	0.25	0.5	1	2	4
1.01_2	0.3125	0.625	1.25	2.5	5
1.10_2	0.375	0.75	1.5	3	6
1.11_2	0.4375	0.875	1.75	3.5	7



Normalisierte Darstellung

Beispiel $F^*(2, 3, -2, 2)$

(nur positive Zahlen)

$d_0.d_1d_2$	$e = -2$	$e = -1$	$e = 0$	$e = 1$	$e = 2$
1.00_2	0.25	0.5	1	2	4
1.01_2	0.3125	0.625	1.25	2.5	5
1.10_2	0.375	0.75	1.5	3	6
1.11_2	0.4375	0.875	1.75	3.5	7



Binäre und dezimale Systeme

- Intern rechnet der Computer mit $\beta = 2$
(binäres System)
- Literale und Eingaben haben $\beta = 10$
(dezimales System)

Binäre und dezimale Systeme

- Intern rechnet der Computer mit $\beta = 2$
(binäres System)
- Literale und Eingaben haben $\beta = 10$
(dezimales System)

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$x = b_0.b_1b_2b_3 \dots$$

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$\begin{aligned}x &= b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \dots \\ &= b_0 + 0 \bullet b_1 b_2 b_3 \dots\end{aligned}$$

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$\begin{aligned}x &= b_0.b_1b_2b_3\dots \\ &= b_0 + 0.b_1b_2b_3\dots \\ &\implies\end{aligned}$$

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$x = b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \dots$$

$$= b_0 + 0 \bullet b_1 b_2 b_3 \dots$$

$$\implies$$

$$(x - b_0) = 0 \bullet b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$$

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$x = b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \dots$$

$$= b_0 + 0 \bullet b_1 b_2 b_3 \dots$$

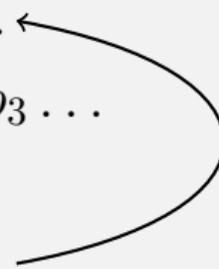
$$\implies$$

$$2 \cdot (x - b_0) = b_1 \bullet b_2 b_3 b_4 \dots$$

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$\begin{aligned}x &= b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \dots \leftarrow \\ &= b_0 + 0 \bullet b_1 b_2 b_3 \dots \\ &\implies \\ 2 \cdot (x - b_0) &= b_1 \bullet b_2 b_3 b_4 \dots\end{aligned}$$

Berechnung der *Binärdarstellung*:

$$\begin{aligned}x &= b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \dots \leftarrow \\ &= b_0 + 0 \bullet b_1 b_2 b_3 \dots \\ &\implies \\ 2 \cdot (x - b_0) &= b_1 \bullet b_2 b_3 b_4 \dots\end{aligned}$$


```
for (int b_0; x != 0; x = 2 * (x - b_0)) {  
    b_0 = (x >= 1);  
    std::cout << b_0;  
}
```

Beispiel (binär)

$$x = \mathbf{1}.01011$$

$$= \mathbf{1} + 0.01011$$

\implies

$$2 \cdot (x - \mathbf{1}) = 0.1011$$

Beispiel (binär)

$$\begin{aligned}x &= 1.\mathbf{01011} \\ &= 1 + 0.\mathbf{01011}\end{aligned}$$

\implies

$$2 \cdot (x - 1) = \mathbf{0.1011}$$

Beispiel (binär)

$$x = \mathbf{0}.1011$$

$$= \mathbf{0} + 0.1011$$

\implies

$$2 \cdot (x - \mathbf{0}) = 1.011$$

Beispiel (binär)

$$x = 0.\mathbf{1011}$$

$$= 0 + 0.\mathbf{1011}$$

\implies

$$2 \cdot (x - 0) = \mathbf{1.011}$$

Beispiel (binär)

$$x = \mathbf{1}\bullet 011$$

$$= \mathbf{1} + 0\bullet 011$$

\implies

$$2 \cdot (x - \mathbf{1}) = 0\bullet 11$$

Beispiel (binär)

$$x = 1.\mathbf{011}$$

$$= 1 + 0.\mathbf{011}$$

\implies

$$2 \cdot (x - 1) = \mathbf{0.11}$$

Beispiel (binär)

$$x = 0.11$$

$$= 0 + 0.11$$

\implies

$$2 \cdot (x - 0) = 1.1$$

Beispiel (binär)

$$\begin{aligned}x &= 0.\mathbf{11} \\ &= 0 + 0.\mathbf{11} \\ &\implies \\ 2 \cdot (x - 0) &= \mathbf{1.1}\end{aligned}$$

Beispiel (binär)

$$x = \mathbf{1}.1$$

$$= \mathbf{1} + 0.1$$

\implies

$$2 \cdot (x - \mathbf{1}) = 1$$

Beispiel (binär)

$$x = 1.\mathbf{1}$$

$$= 1 + 0.\mathbf{1}$$

\implies

$$2 \cdot (x - 1) = \mathbf{1}$$

Beispiel (binär)

$$x = \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} + 0$$

$$\implies$$

$$2 \cdot (x - \mathbf{1}) = 0$$

Beispiel (binär)

$$x = 1$$

$$= 1 + 0$$

\implies

$$2 \cdot (x - 1) = \mathbf{0}$$

Binärdarstellung von 1.1_{10}

$$\begin{array}{r} x \quad b_i \quad x - b_i \quad 2(x - b_i) \\ \hline 1.1 \quad b_0 = \mathbf{1} \end{array}$$

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$		

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$		

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$		

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6
1.6	$b_4 = \mathbf{1}$		

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6
1.6	$b_4 = \mathbf{1}$	0.6	1.2

Binärdarstellung von 1.1_{10}

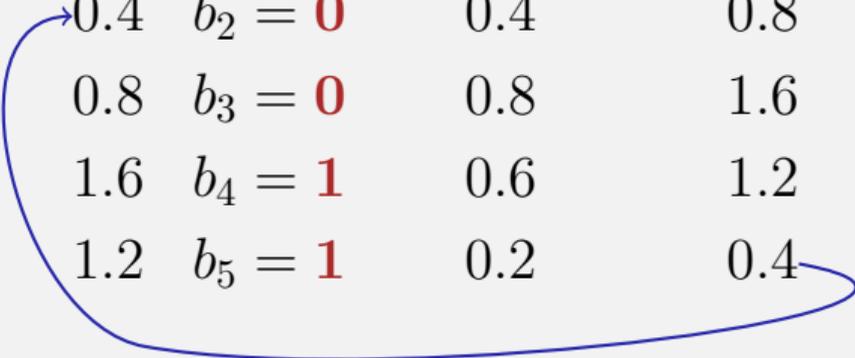
x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6
1.6	$b_4 = \mathbf{1}$	0.6	1.2
1.2	$b_5 = \mathbf{1}$		

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6
1.6	$b_4 = \mathbf{1}$	0.6	1.2
1.2	$b_5 = \mathbf{1}$	0.2	0.4

Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6
1.6	$b_4 = \mathbf{1}$	0.6	1.2
1.2	$b_5 = \mathbf{1}$	0.2	0.4



Binärdarstellung von 1.1_{10}

x	b_i	$x - b_i$	$2(x - b_i)$
1.1	$b_0 = \mathbf{1}$	0.1	0.2
0.2	$b_1 = \mathbf{0}$	0.2	0.4
0.4	$b_2 = \mathbf{0}$	0.4	0.8
0.8	$b_3 = \mathbf{0}$	0.8	1.6
1.6	$b_4 = \mathbf{1}$	0.6	1.2
1.2	$b_5 = \mathbf{1}$	0.2	0.4

$\Rightarrow 1.\overline{00011}$, periodisch, *nicht* endlich

Binärdarstellungen von 1.1 und 0.1

- sind nicht endlich \Rightarrow Fehler bei der Konversion
- `1.1f` und `0.1f`: *Approximationen* von 1.1 und 0.1
- In `diff.cpp`: `1.1 - 1.0 \neq 0.1`

Binärdarstellungen von 1.1 und 0.1

- sind nicht endlich \Rightarrow Fehler bei der Konversion
- `1.1f` und `0.1f`: *Approximationen* von 1.1 und 0.1
- In `diff.cpp`: `1.1 - 1.0 \neq 0.1`

Binärdarstellungen von 1.1 und 0.1

- sind nicht endlich \Rightarrow Fehler bei der Konversion
- `1.1f` und `0.1f`: *Approximationen* von 1.1 und 0.1
- In `diff.cpp`: `1.1 - 1.0 \neq 0.1`

Binärdarstellungen von 1.1 und 0.1

auf meinem Computer:

$$\begin{aligned} 1.1 &= \underline{1.100000000000000000}888178\dots \\ 1.1f &= \underline{1.1000000}238418\dots \end{aligned}$$

Rechnen mit Fließkommazahlen

ist fast so einfach wie mit ganzen Zahlen.

Rechnen mit Fließkommazahlen

Beispiel ($\beta = 2, p = 4$):

$$\begin{array}{r} 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + 1.011 \cdot 2^{-1} \end{array}$$

1. Exponenten anpassen durch Denormalisieren einer Zahl

Rechnen mit Fließkommazahlen

Beispiel ($\beta = 2, p = 4$):

$$\begin{array}{r} 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + 10.110 \cdot 2^{-2} \checkmark \end{array}$$

1. Exponenten anpassen durch Denormalisieren einer Zahl

Rechnen mit Fließkommazahlen

Beispiel ($\beta = 2, p = 4$):

$$\begin{array}{r} 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + 10.110 \cdot 2^{-2} \\ \hline \end{array}$$

2. Binäre Addition der Signifikanden

Rechnen mit Fließkommazahlen

Beispiel ($\beta = 2, p = 4$):

$$\begin{array}{r} 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + 10.110 \cdot 2^{-2} \\ \hline = 100.101 \cdot 2^{-2} \checkmark \end{array}$$

2. Binäre Addition der Signifikanden

Rechnen mit Fließkommazahlen

Beispiel ($\beta = 2, p = 4$):

$$\begin{array}{r} 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + 10.110 \cdot 2^{-2} \\ \hline = 100.101 \cdot 2^{-2} \end{array}$$

3. Renormalisierung

Rechnen mit Fließkommazahlen

Beispiel ($\beta = 2, p = 4$):

$$\begin{array}{r} 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + 10.110 \cdot 2^{-2} \\ \hline = 1.00101 \cdot 2^0 \checkmark \end{array}$$

3. Renormalisierung

Rechnen mit Fließkommazahlen

Beispiel ($\beta = 2, p = 4$):

$$\begin{array}{r} 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + 10.110 \cdot 2^{-2} \\ \hline = 1.00101 \cdot 2^0 \end{array}$$

4. Runden auf p signifikante Stellen, falls nötig

Rechnen mit Fließkommazahlen

Beispiel ($\beta = 2, p = 4$):

$$\begin{array}{r} 1.111 \cdot 2^{-2} \\ + 10.110 \cdot 2^{-2} \\ \hline = 1.001 \cdot 2^0 \checkmark \end{array}$$

4. Runden auf p signifikante Stellen, falls nötig

Der IEEE Standard 754

- legt Fließkommazahlensysteme und deren Rundungsverhalten fest
- wird fast überall benutzt

Der IEEE Standard 754

- legt Fließkommazahlensysteme und deren Rundungsverhalten fest
- wird fast überall benutzt

Der IEEE Standard 754

- Single precision (`float`) Zahlen:

$F^*(2, 24, -126, 127)$ (32 bit) plus 0, ∞ , ...

- Double precision (`double`) Zahlen:

$F^*(2, 53, -1022, 1023)$ (64 bit) plus 0, ∞ , ...

- Alle arithmetischen Operationen runden das *exakte* Ergebnis auf die nächste darstellbare Zahl

Der IEEE Standard 754

- Single precision (`float`) Zahlen:

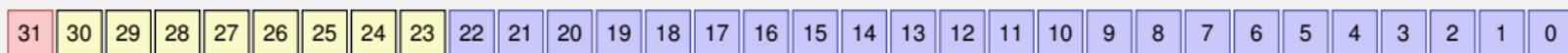
$F^*(2, 24, -126, 127)$ (32 bit) plus 0, ∞ , ...

- Double precision (`double`) Zahlen:

$F^*(2, 53, -1022, 1023)$ (64 bit) plus 0, ∞ , ...

- Alle arithmetischen Operationen runden das *exakte* Ergebnis auf die nächste darstellbare Zahl

Beispiel: 32-bit Darstellung einer Fließkommazahl



± Exponent

Mantisse

± $2^{-126}, \dots, 2^{127}$
0, ∞ , ...

1.000000000000000000000000
...
1.111111111111111111111111

Regel 1

Teste keine gerundeten Fließkommazahlen auf Gleichheit!

```
for (float i = 0.1; i != 1.0; i += 0.1)
    std::cout << i << "\n";
```

Regel 1

Teste keine gerundeten Fließkommazahlen auf Gleichheit!

```
for (float i = 0.1; i != 1.0; i += 0.1)
    std::cout << i << "\n";
```

Regel 1

Teste keine gerundeten Fließkommazahlen auf Gleichheit!

```
for (float i = 0.1; i != 1.0; i += 0.1)
    std::cout << i << "\n";
```

Endlosschleife, weil i niemals exakt 1 ist!

Regel 2

Addiere keine zwei Zahlen sehr unterschiedlicher Grösse!

Regel 2

Addiere keine zwei Zahlen sehr unterschiedlicher Grösse!

$$\begin{array}{r} 1.000 \cdot 2^5 \\ + 1.000 \cdot 2^0 \end{array}$$

Regel 2

Addiere keine zwei Zahlen sehr unterschiedlicher Grösse!

$$\begin{aligned} & 1.000 \cdot 2^5 \\ & + 1.000 \cdot 2^0 \\ & = 1.00001 \cdot 2^5 \end{aligned}$$

Regel 2

Addiere keine zwei Zahlen sehr unterschiedlicher Grösse!

$$1.000 \cdot 2^5$$

$$+1.000 \cdot 2^0$$

$$= 1.00001 \cdot 2^5$$

$$\text{„}=\text{“ } 1.000 \cdot 2^5 \text{ (Rundung auf 4 Stellen)}$$

Regel 2

Addiere keine zwei Zahlen sehr unterschiedlicher Grösse!

$$1.000 \cdot 2^5$$

$$+1.000 \cdot 2^0$$

$$= 1.00001 \cdot 2^5$$

„=“ $1.000 \cdot 2^5$ (Rundung auf 4 Stellen)

Addition von 1 hat keinen Effekt!

- Die n -te Harmonische Zahl ist

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

- Die n -te Harmonische Zahl ist

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \ln n.$$

- Die n -te Harmonische Zahl ist

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \ln n.$$

- Diese Summe kann vorwärts oder rückwärts berechnet werden, was mathematisch gesehen natürlich äquivalent ist.

```
std::cout << "Compute H_n for n =? ";
unsigned int n;
std::cin >> n;

float fs = 0;
for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i)
    fs += 1.0f / i;
std::cout << "Forward sum = " << fs << "\n";

float bs = 0;
for (unsigned int i = n; i >= 1; --i)
    bs += 1.0f / i;
std::cout << "Backward sum = " << bs << "\n";
```

```
std::cout << "Compute H_n for n =? ";  
unsigned int n;  
std::cin >> n;
```

Eingabe: 10000000

```
float fs = 0;  
for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i)  
    fs += 1.0f / i;  
std::cout << "Forward sum = " << fs << "\n";
```

Vorwärts: 15.4037

```
float bs = 0;  
for (unsigned int i = n; i >= 1; --i)  
    bs += 1.0f / i;  
std::cout << "Backward sum = " << bs << "\n";
```

Rückwärts: 16.686

```
std::cout << "Compute H_n for n =? ";  
unsigned int n;  
std::cin >> n;
```

Eingabe: **100000000**

```
float fs = 0;  
for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i)  
    fs += 1.0f / i;  
std::cout << "Forward sum = " << fs << "\n";
```

Vorwärts: **15.4037**

```
float bs = 0;  
for (unsigned int i = n; i >= 1; --i)  
    bs += 1.0f / i;  
std::cout << "Backward sum = " << bs << "\n";
```

Rückwärts: **18.8079**

Beobachtung:

- Die Vorwärtssumme wächst irgendwann nicht mehr und ist „richtig“ falsch.
- Die Rückwärtssumme approximiert H_n gut.

Beobachtung:

- Die Vorwärtssumme wächst irgendwann nicht mehr und ist „richtig“ falsch.
- Die Rückwärtssumme approximiert H_n gut.

Beobachtung:

- Die Vorwärtssumme wächst irgendwann nicht mehr und ist „richtig“ falsch.
- Die Rückwärtssumme approximiert H_n gut.

Erklärung:

- Bei $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ sind späte Terme zu klein, um noch beizutragen.
- Problematik wie bei $2^5 + 1$ „=“ 2^5

Beobachtung:

- Die Vorwärtssumme wächst irgendwann nicht mehr und ist „richtig“ falsch.
- Die Rückwärtssumme approximiert H_n gut.

Erklärung:

- Bei $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ sind späte Terme zu klein, um noch beizutragen.
- Problematik wie bei $2^5 + 1$ „=“ 2^5

Beobachtung:

- Die Vorwärtssumme wächst irgendwann nicht mehr und ist „richtig“ falsch.
- Die Rückwärtssumme approximiert H_n gut.

Erklärung:

- Bei $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ sind späte Terme zu klein, um noch beizutragen.
- Problematik wie bei $2^5 + 1$ „=“ 2^5

Regel 3

Subtrahiere keine zwei Zahlen sehr ähnlicher Grösse!

Auslöschungsproblematik, siehe Skript.

Literatur

David Goldberg: What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic (1991)



Randy Glasbergen, 1996

9. Funktionen I

Funktionsdefinitionen- und Aufrufe, Auswertung von Funktionsaufrufen, Der Typ `void`

Potenzberechnung

```
double a;
int n;
std::cin >> a; // Eingabe a
std::cin >> n; // Eingabe n

double result = 1.0;
if (n < 0) { //  $a^n = (1/a)^{-n}$ 
    a = 1.0/a;
    n = -n;
}
for (int i = 0; i < n; ++i)
    result *= a;

std::cout << a << "^" << n << " = " << result << ".\n";
```

Potenzberechnung

```
double a;  
int n;  
std::cin >> a; // Eingabe a  
std::cin >> n; // Eingabe n
```

```
double result = 1.0;  
if (n < 0) { //  $a^n = (1/a)^{-n}$   
    a = 1.0/a;  
    n = -n;  
}  
for (int i = 0; i < n; ++i)  
    result *= a;
```

```
std::cout << a << "^" << n << " = " << result << ".\n";
```

Potenzberechnung

```
double a;  
int n;  
std::cin >> a; // Eingabe a  
std::cin >> n; // Eingabe n
```

```
double result = 1.0;  
if (n < 0) { //  $a^n = (1/a)^{-n}$   
    a = 1.0/a;  
    n = -n;  
}  
for (int i = 0; i < n; ++i)  
    result *= a;
```

"Funktion pow"



```
std::cout << a << "^" << n << " = " << pow(a,n) << ".\n";
```

Funktion zur Potenzberechnung

```
// PRE: e >= 0 || b != 0.0
// POST: return value is b^e
double pow(double b, int e)
{
    double result = 1.0;
    if (e < 0) { // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e; ++i)
        result *= b;
    return result;
}
```

Funktion zur Potenzberechnung

```
double pow(double b, int e){...}
```

Funktion zur Potenzberechnung

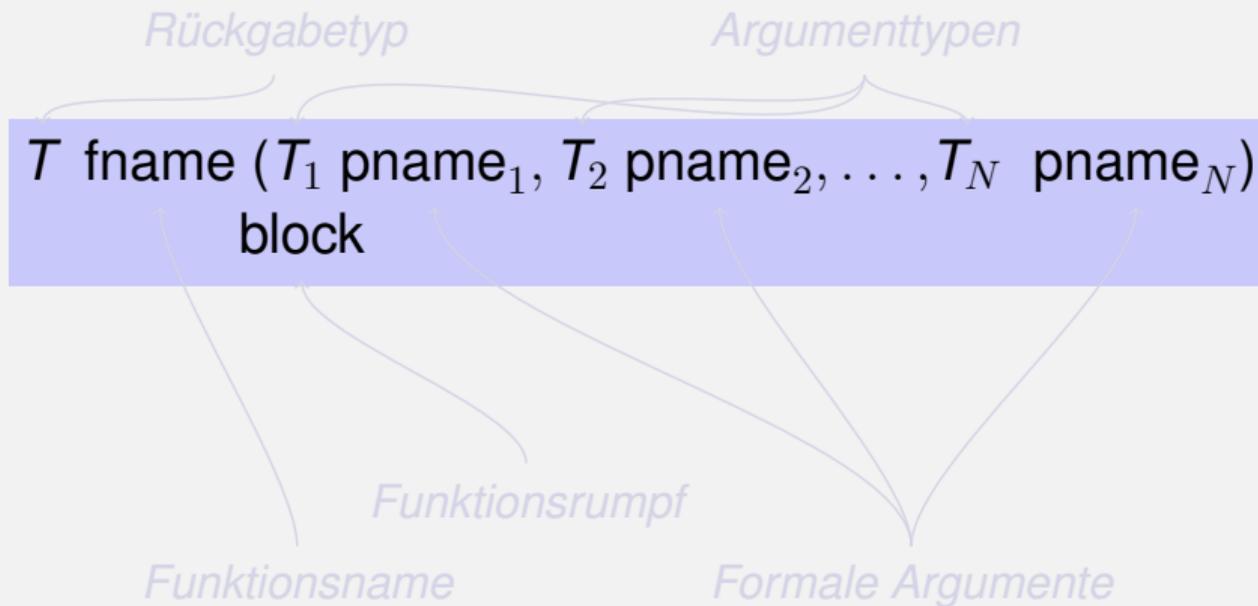
```
// Prog: callpow.cpp
// Define and call a function for computing powers.
#include <iostream>
```

```
double pow(double b, int e){...}
```

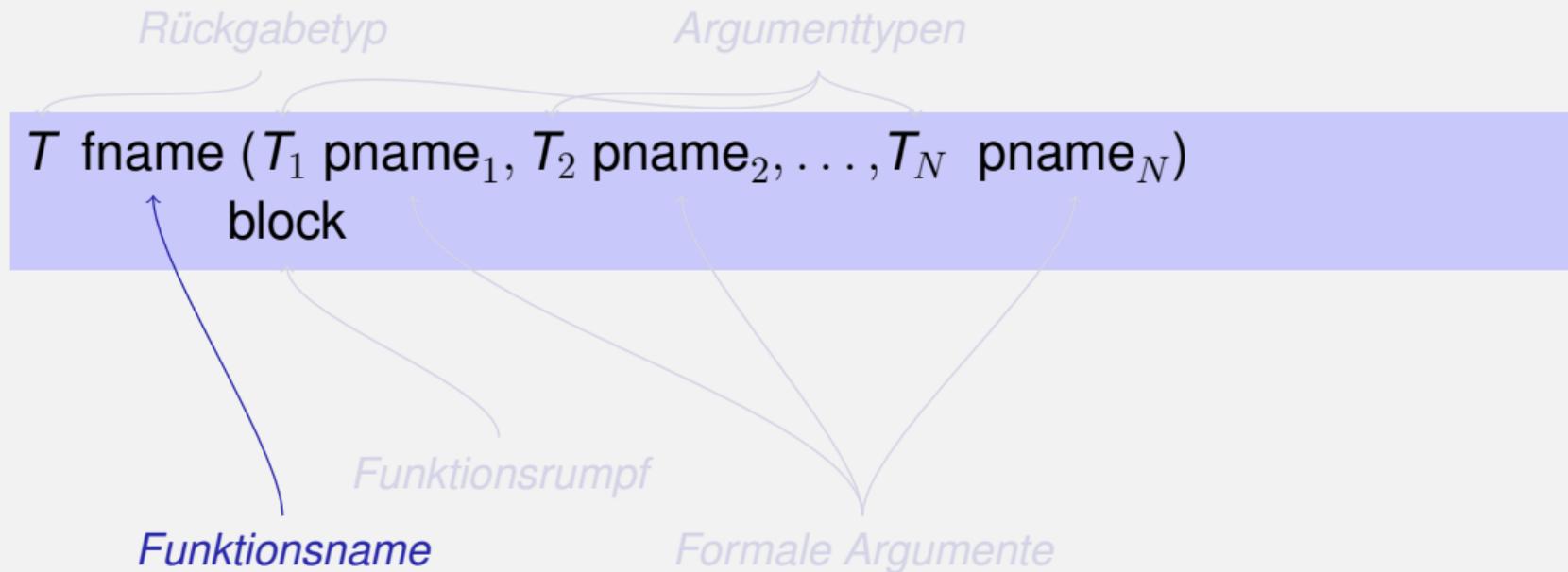
```
int main()
{
    std::cout << pow( 2.0, -2) << "\n"; // outputs 0.25
    std::cout << pow( 1.5, 2) << "\n"; // outputs 2.25
    std::cout << pow(-2.0, 9) << "\n"; // outputs -512

    return 0;
}
```

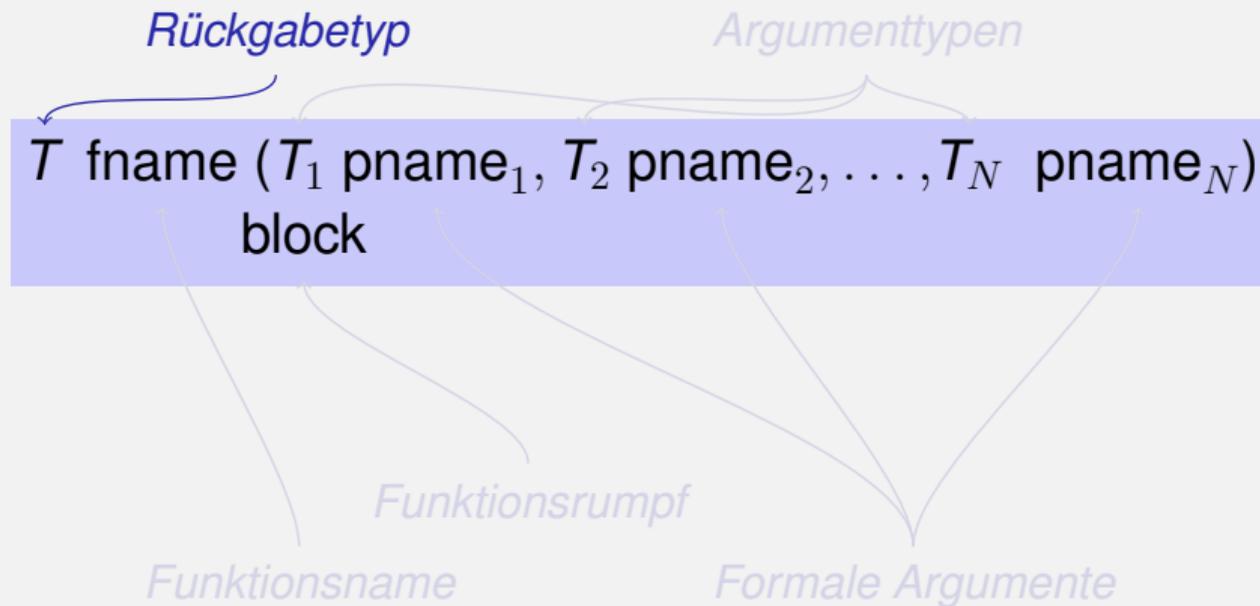
Funktionsdefinitionen



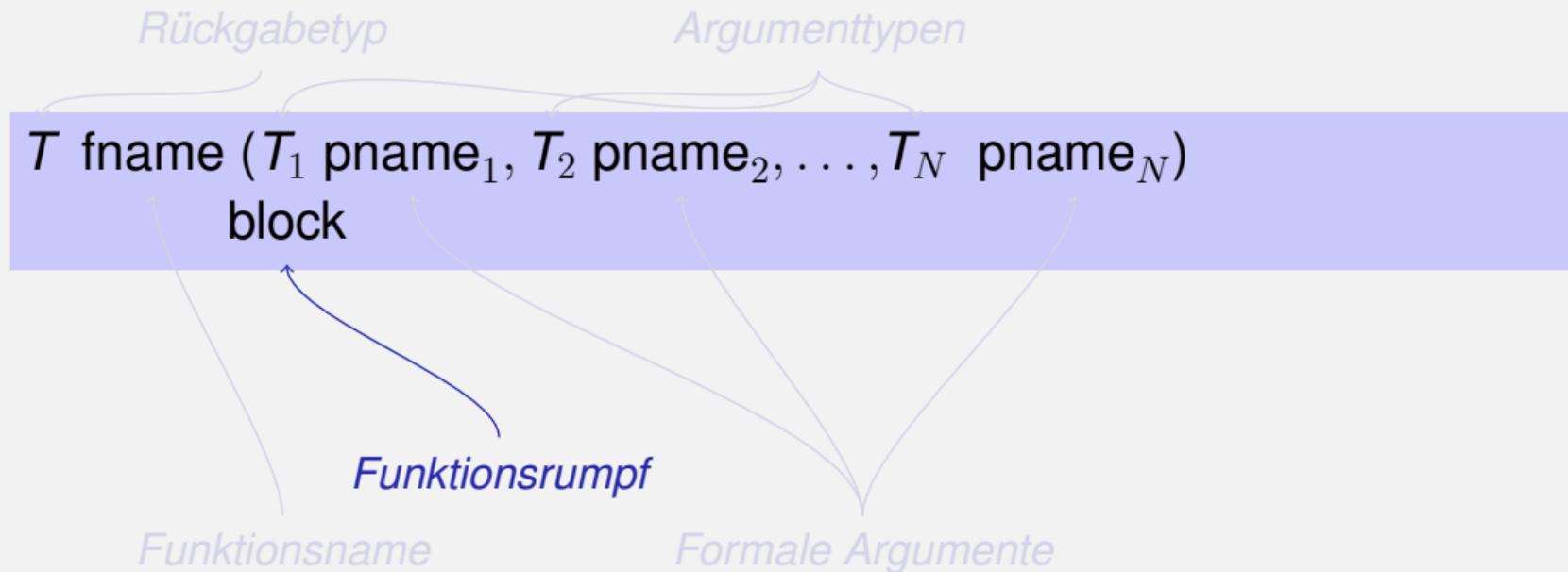
Funktionsdefinitionen



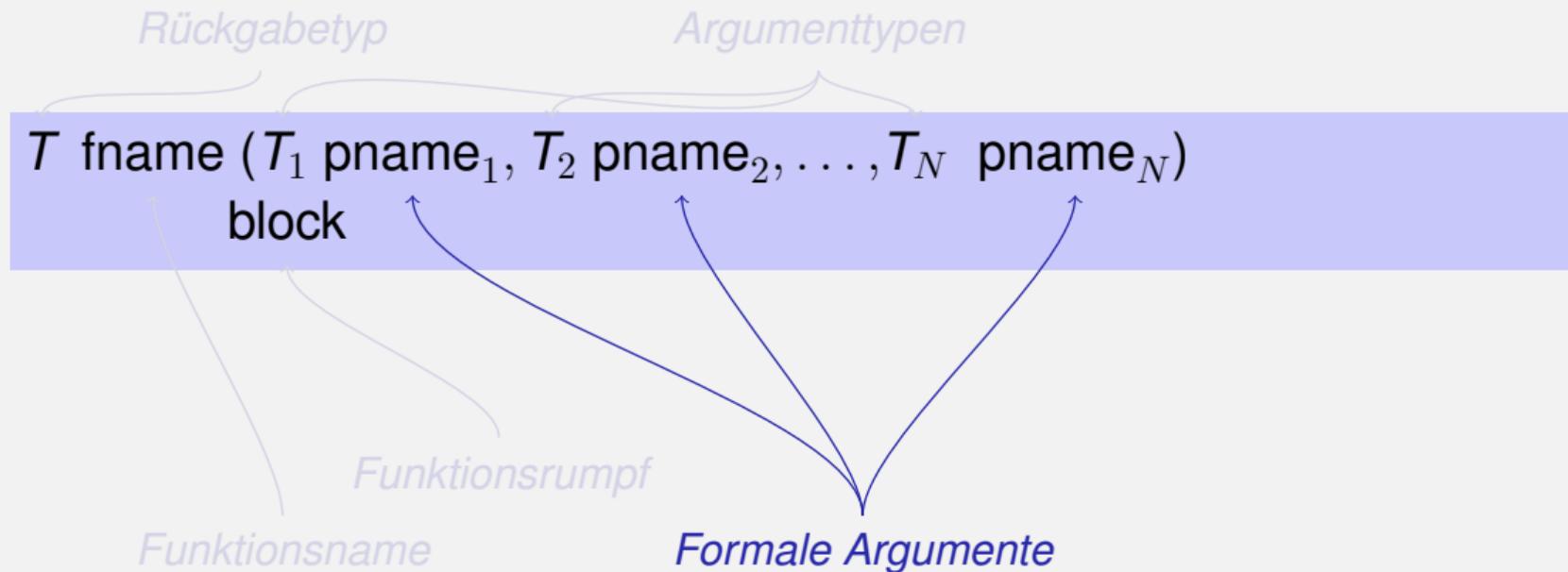
Funktionsdefinitionen



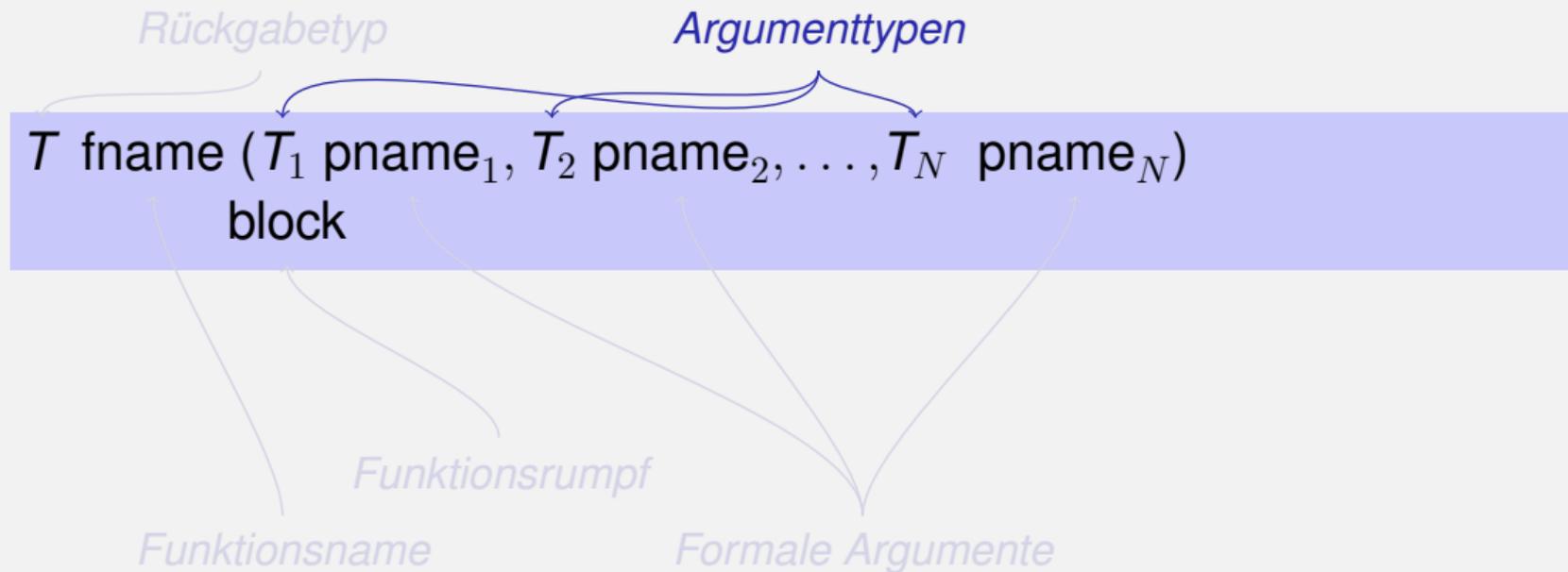
Funktionsdefinitionen



Funktionsdefinitionen



Funktionsdefinitionen



Xor

```
// post: returns l XOR r
bool Xor(bool l, bool r)
{
    return l && !r || !l && r;
}
```

Harmonic

```
// PRE: n >= 0
// POST: returns nth harmonic number
//       computed with backward sum
float Harmonic(int n)
{
    float res = 0;
    for (unsigned int i = n; i >= 1; --i)
        res += 1.0f / i;
    return res;
}
```

min

```
// POST: returns the minimum of a and b
int min(int a, int b)
{
    if (a<b)
        return a;
    else
        return b;
}
```

Funktionsaufrufe

$fname (expression_1, expression_2, \dots, expression_N)$

- Alle Aufrufargumente müssen konvertierbar sein in die entsprechenden Argumenttypen.
- Der Funktionsaufruf selbst ist ein Ausdruck vom Rückgabetyt.

Beispiel: `pow(a,n)`: Ausdruck vom Typ `double`

Funktionsaufrufe

`fname (expression1, expression2, ..., expressionN)`

- Alle Aufrufargumente müssen konvertierbar sein in die entsprechenden Argumenttypen.
- Der Funktionsaufruf selbst ist ein Ausdruck vom Rückgabetyt.

Beispiel: `pow(a,n)`: Ausdruck vom Typ `double`

Funktionsaufrufe

$fname (expression_1, expression_2, \dots, expression_N)$

- Alle Aufrufargumente müssen konvertierbar sein in die entsprechenden Argumenttypen.
- Der Funktionsaufruf selbst ist ein Ausdruck vom Rückgabetyt.

Beispiel: `pow(a,n)`: Ausdruck vom Typ `double`

Funktionsaufrufe

Für die Typen, die wir bisher kennen, gilt:

- Aufrufargumente sind R-Werte
 ↪ *call-by-value* (auch *pass-by-value*), dazu gleich mehr
- Funktionsaufruf selbst ist R-Wert.

Funktionsaufrufe

Für die Typen, die wir bisher kennen, gilt:

- Aufrufargumente sind R-Werte
 \hookrightarrow *call-by-value* (auch *pass-by-value*), dazu gleich mehr
- Funktionsaufruf selbst ist R-Wert.

fname: R-Wert \times R-Wert $\times \dots \times$ R-Wert \longrightarrow R-Wert

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```

```
...
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```

...

```
pow (2.0, -2)
```

Aufruf von pow



Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```

b=2.0,e=-2

```
...
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        // b^e = (1/b)^(-e)
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```

b=2.0,e=-2

// ok

...

```
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```



result=1.0

```
...
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```



e == -2

```
...
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```



b=0.5

...

```
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```



e=2

...

```
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```



i=0

...

```
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```

i=0

result=0.5

...

```
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```

i=1

...

```
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```

i=1

result=0.25

...

```
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```

i=2

...

```
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```

→ result=0.25

...

```
pow (2.0, -2)
```

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```

...

pow (2.0, -2)

result=0.25

Rückgabe

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```

...

pow (2.0, -2)

Rückgabe

Wert: 0.25

Auswertung Funktionsaufruf

```
double pow(double b, int e){
    assert (e >= 0 || b != 0);
    double result = 1.0;
    if (e<0) {
        //  $b^e = (1/b)^{-e}$ 
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        result * = b;
    return result;
}
```

...

pow (2.0, -2)

Wert: 0.25

Gültigkeit formaler Argumente

```
int main(){  
    double b = 2.0;  
    int e = -2;  
    double z = pow(b, e);  
  
    std::cout << z; // 0.25  
    std::cout << b; // 2  
    std::cout << e; // -2  
    return 0;  
}
```

Gültigkeit formaler Argumente

```
double pow(double b, int e){
    double r = 1.0;
    if (e<0) {
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        r * = b;
    return r;
}
```

```
int main(){
    double b = 2.0;
    int e = -2;
    double z = pow(b, e);

    std::cout << z; // 0.25
    std::cout << b; // 2
    std::cout << e; // -2
    return 0;
}
```

Gültigkeit formaler Argumente

```
double pow(double b, int e){
    double r = 1.0;
    if (e<0) {
        b = 1.0/b;
        e = -e;
    }
    for (int i = 0; i < e ; ++i)
        r * = b;
    return r;
}
```

```
int main(){
    double b = 2.0;
    int e = -2;
    double z = pow(b, e);

    std::cout << z; // 0.25
    std::cout << b; // 2
    std::cout << e; // -2
    return 0;
}
```

Nicht die formalen Argumente `b` und `e` von `pow`, sondern die hier definierten Variablen lokal zum Rumpf von `main`

Der Typ void

```
// POST: "(i, j)" has been written to standard output
???? print_pair(int i, int j) {
    std::cout << "(" << i << ", " << j << ")\n";
}

int main() {
    print_pair(3,4); // outputs (3, 4)
    return 0;
}
```

Der Typ void

```
// POST: "(i, j)" has been written to standard output
void print_pair(int i, int j) {
    std::cout << "(" << i << ", " << j << ")\n";
}

int main() {
    print_pair(3,4); // outputs (3, 4)
    return 0;
}
```

Der Typ `void`

- Fundamentaler Typ mit leerem Wertebereich

Der Typ `void`

- Fundamentaler Typ mit leerem Wertebereich
- Verwendung als Rückgabebetyp für Funktionen, die *nur* einen Effekt haben

void-Funktionen

- benötigen kein `return`.
- Ausführung endet, wenn Ende des Funktionsrumpfes erreicht wird
oder
- `return;` erreicht wird