15. Rekursion 2

Bau eines Taschenrechners, Ströme, Formale Grammatiken, Extended Backus Naur Form (EBNF), Parsen von Ausdrücken

Motivation: Taschenrechner

Ziel: Bau eines Kommandozeilenrechners

Beispiel

```
Eingabe: 3 + 5
Ausgabe: 8
Eingabe: 3 / 5
Ausgabe: 0.6
Eingabe: 3 + 5 * 20
Ausgabe: 103
Eingabe: (3 + 5) * 20
Ausgabe: 160
Eingabe: -(3 + 5) + 20
Ausgabe: 12
```

- Binäre Operatoren +, −, ∗, / und Zahlen
- Fliesskommaarithmetik
- Präzedenzen und Assoziativitäten wie in C++
- Klammerung
- Unärer Operator −

Naiver Versuch (ohne Klammern)

```
double lval;
std::cin >> lval;

char op;
while (std::cin >> op && op != '=') {
    double rval;
    std::cin >> rval;

    if (op == '+')
        lval += rval;
    else if (op == '*')
        lval *= rval;
    else ...
}
std::cout << "Ergebnis " << lval << "\n";
```

```
Eingabe 2 + 3 * 3 =
Ergebnis 15
```


Analyse des Problems

Beispiel

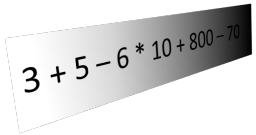
Eingabe:

$$\underbrace{13 + 4 * (15 - 7 * 3)}_{\text{Muss gespeichert bleiben, damit jetzt ausgewertet werden kann!}} =$$

Das “Verstehen” eines Ausdrucks erfordert Vorausschau auf kommende Symbole!

Als Vorbereitung: Ströme

Ein Programm verarbeitet Eingaben von einem konzeptuell unbegrenzten Eingabestrom.



Bisher: Eingabestrom der Kommandozeile `std::cin`

```
while (std::cin >> op && op != '=') { ... }
```

↑

Konsumiere `op` von `std::cin`, Leseposition schreitet fort.

Wir wollen zukünftig aber auch von Dateien lesen können!

Beispiel: BSD 16-bit Checksum

```
#include <iostream>


int main () {

  char c;
  int checksum = 0;
  while (std::cin >> c) {
    checksum = checksum / 2 + checksum % 2 * 0x8000 + c;
    checksum %= 0x10000;
  }
  std::cout << "checksum = " << std::hex << checksum << "\n";
}
```

Eingabe: Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Erfordert in der Konsole manuelles Ende der Eingabe [3]

Ausgabe: 67fd

[3] Ctrl-D(Unix) / Ctrl-Z(Windows) am Anfang einer Zeile, welche durch ENTER abgeschlossen wird

Beispiel: BSD 16-bit Checksum mit Datei

```
#include <iostream>
#include <fstream>

int main () {
  std::ifstream fileStream ("loremispum.txt");
  char c;
  int checksum = 0;
  while (fileStream >> c) {
    checksum = checksum / 2 + checksum % 2 * 0x8000 + c;
    checksum %= 0x10000;
  }
  std::cout << "checksum = " << std::hex << checksum << "\n";
}
```

Gibt am Dateiende `false` zurück.

Ausgabe: 67fd

Beispiel: BSD 16-bit Checksum

Wiederverwendung gemeinsam genutzter Funktionalität?

Richtig: mit einer Funktion. Aber wie?

Beispiel: BSD 16-bit Checksum generisch!

```
#include <iostream>
#include <fstream>

int checksum (std::istream& is)
{
  char c;
  int checksum = 0;
  while (is >> c) {
    checksum = checksum / 2 + checksum % 2 * 0x8000 + c;
    checksum %= 0x10000;
  }
  return checksum;
}
```

Referenz nötig: wir verändern den Strom!

Gleiches Recht für alle!

```
#include <iostream>
#include <fstream>

int checksum (std::istream& is) { ... }

int main () {
  std::ifstream fileStream("loremipsum.txt");

  if (checksum (fileStream) == checksum (std::cin))
       std::cout << "checksums match.\n";
  else
       std::cout << "checksums differ.\n";
}
```

Eingabe: Lorem Yps mit Gimmick
Ausgabe: checksums differ

Warum geht das ?

- `std::cin` ist eine Variable vom Typ `std::istream`. Sie repräsentiert einen Eingabestrom.
- Unsere Variable `fileStream` ist vom Typ `std::ifstream`. Sie repräsentiert einen Eingabestrom auf einer Datei.
- Ein `std::ifstream` *ist auch ein* `std::istream`, kann nur etwas mehr.
- Somit kann `fileStream` überall dort verwendet werden, wo ein `std::istream` verlangt ist.

Nochmal gleiches Recht für alle!

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <sstream>

int checksum (std::istream& is) { ... }

int main () {
  std::ifstream fileStream ("loremipsum.txt");
  std::stringstream stringStream ("Lorem Yps mit Gimmick");

  if (checksum (fileStream) == checksum (stringStream))
       std::cout << "checksums match.\n";
  else
       std::cout << "checksums differ.\n";
}
```

Eingabe aus `stringStream`
Ausgabe: checksums differ

Zurück zu den Ausdrücken

$$13 + 4 * (15 - 7 * 3)$$

Das “Verstehen” eines Ausdrucks erfordert Vorausschau auf kommende Symbole!

Wir werden die Symbole elegant mittels Rekursion zwischenspeichern.

Wir brauchen ein neues formales (von C++unabhängiges) Handwerkszeug.

Formale Grammatiken

- Alphabet: endliche Menge von Symbolen Σ
- Sätze: endlichen Folgen von Symbolen Σ^*

Eine formale Grammatik definiert, welche Sätze gültig sind.

Berge

- Alphabet: $\{/, \backslash\}$
- Berge: $\mathcal{M} \subset \{/, \backslash\}^*$ (gültige Sätze)

$m' =$ //\\///\\\

```
      /\
   /\   /  \
  /   \/    \
```


Falsche Berge

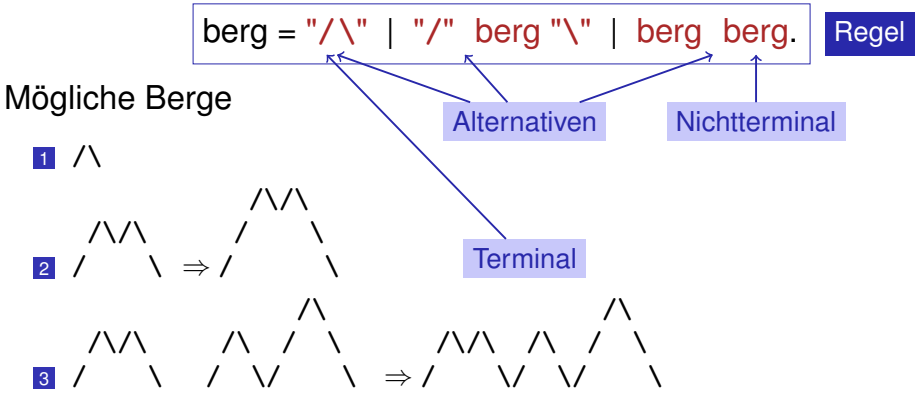
- Alphabet: $\{/, \backslash\}$
- Berge: $\mathcal{M} \subset \{/, \backslash\}^*$ (gültige Sätze)

$m''' =$ /\\//\ $\notin \mathcal{M}$

```
  /\   /\
    \/
```

Beide Seiten müssen gleiche Starthöhe haben. Ein Berg darf nicht unter seine Starthöhe fallen.

Berge in Backus-Naur-Form (BNF)



Man kann beweisen, dass diese BNF “unsere” Berge beschreibt, was a priori nicht ganz klar ist.

Ausdrücke

```
-(3-(4-5))*(3+4*5)/6
```

Was benötigen wir in einer BNF?

- Zahl , (Ausdruck)
  −Zahl, −(Ausdruck)
- Faktor ∗ Faktor, Faktor
  Faktor ∗ Faktor / Faktor , ...
- Term + Term, Term
  Term − Term, ...

Faktor

Term

Ausdruck

Die BNF für Ausdrücke

Ein Faktor ist

- eine Zahl,
- ein geklammerter Ausdruck oder
- ein negierter Faktor.

```
factor    = unsigned_number
          | "(" expression ")"
          | "−" factor.
```


Die BNF für Ausdrücke

Ein Term ist

- Faktor,
- Faktor ∗ Faktor, Faktor / Faktor,
- Faktor ∗ Faktor ∗ Faktor, Faktor / Faktor ∗ Faktor, ...
- ...

Wir brauchen Repetition!

EBNF

Extended Backus Naur Form: Erweiterung der BNF um

- Option `[]` und
- Optionale Repetition `{}`

```
term = factor { "*" factor | "/" factor }.
```

NB: die EBNF ist nicht reichhaltiger als die BNF. Sie erlaubt nur eine kompaktere Schreibweise. Obiges Konstrukt lässt sich mit BNF z.B. so schreiben:

```
term = factor | factor T.
T = "*" term | "+" term.
```


Die EBNF für Ausdrücke

```
factor     = unsigned_number
           | "(" expression ")"
           | "-" factor.

term       = factor { "*" factor | "/" factor }.

expression = term { "+" term | "-" term }.
```


Parsen

- **Parsen:** Feststellen, ob ein Satz nach der (E)BNF gültig ist.
- **Parser:** Programm zum Parsen
- **Praktisch:** Aus der (E)BNF kann (fast) automatisch ein Parser generiert werden:
  - Regeln werden zu Funktionen
  - Alternativen und Optionen werden zu `if`–Anweisungen
  - Nichtterminale Symbole auf der rechten Seite werden zu Funktionsaufrufen
  - Optionale Repetitionen werden zu `while`–Anweisungen

Funktionen (Parser mit Auswertung)

Ausdruck wird aus einem Eingabestrom gelesen.

```
// POST: extracts a factor from is
//       and returns its value
double factor (std::istream& is);

// POST: extracts a term from is
//       and returns its value
double term (std::istream& is);

// POST: extracts an expression from is
//       and returns its value
double expression (std::istream& is);
```

Vorausschau von einem Zeichen...

...um jeweils die richtige Alternative zu finden.

```
// POST: leading whitespace characters are extracted
//       from is, and the first non-whitespace character
//       is returned (0 if there is no such character)
char lookahead (std::istream& is)
{
  if (is.eof())
    return 0;
  is >> std::ws;          // skip whitespaces
  if (is.eof())
    return 0;             // end of stream
  return is.peek();     // next character in is
}
```


Rosinenpickerei

...um jeweils nur das gewünschte Zeichen zu extrahieren.

```
// POST: if ch matches the next lookahead then consume it
//       and return true; return false otherwise
bool consume (std::istream& is, char ch)
{
    if (lookahead(is) == ch){
        is >> ch;
        return true;
    }
    return false;
}
```


Faktoren auswerten

```
double factor (std::istream& is)
{
  double v;
  if (consume(is, '(')){
    v = expression (is);
    consume(is, ')');
  } else if (consume(is, '-'))
    v = -factor (is);
  else
    is >> v;
  return v;
}
```

```
factor = "(" expression ")"
       | "-" factor
       | unsigned_number.
```


Terme auswerten

```
double term (std::istream& is)
{
  double value = factor (is);
  while(true){
    if (consume(is, '*'))
      value *= factor (is);
    else if (consume(is, '/'))
      value /= factor(is)
    else
      return value;
  }
}
```

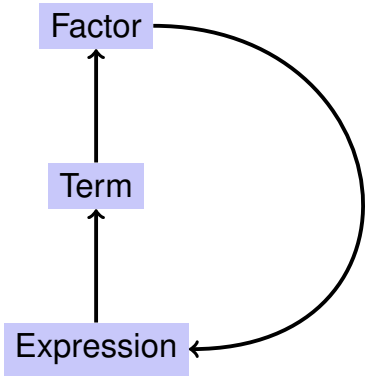
```
term = factor { "*" factor | "/" factor }
```

Ausdrücke auswerten

```
double expression (std::istream& is)
{
  double value = term(is);
  while(true){
    if (consume(is, '+'))
      value += term (is);
    else if (consume(is, '-'))
      value -= term(is)
    else
      return value;
  }
}
```

```
expression = term { "+" term | "-" term }
```


Rekursion!



EBNF — Und es funktioniert!

EBNF (`calculator.cpp`, Auswertung von links nach rechts):

```
factor     = unsigned_number
           | "(" expression ")"
           | "-" factor.

term       = factor { "*" factor | "/" factor }.

expression = term { "+" term | "-" term }.
```

```
std::stringstream input ("1-2-3");
std::cout << expression (input) << "\n"; // -4
```


BNF — Und es funktioniert nicht!

BNF (`calculator_r.cpp`, Auswertung von rechts nach links):

```
factor     = unsigned_number
           | "(" expression ")"
           | "-" factor.

term       = factor | factor "*" term | factor "/" term.

expression = term | term "+" expression | term "-" expression.
```

```
std::stringstream input ("1-2-3");
std::cout << expression (input) << "\n"; // 2
```

Analyse: Repetition vs. Rekursion

Vereinfachung: Summe / Differenz von Zahlen

Beispiele

$$3, \quad 3-5, \quad 3-7-1$$

EBNF:

```
sum = value {"−" value | "+" value}.
```

BNF:

```
sum = value | value "−" sum | value "+" sum.
```

Die beiden Gramatiken erlauben dieselben Ausdrücke.

value

```
double value (std::istream& is){
    double val;
    is >> val;
    return val;
}
```


EBNF Variante

```
// sum = value {"−" value | "+" value}.
double sum(std::istream& is) {
    double v = value(is);
    while(true){
        if (consume(is, '−'))
            v −= value(is);
        else if (consume(is, '+'))
            v += value(is);
        else
            return v;
    }
}
```


Wir testen: EBNF Variante

- Eingabe: 1-2
  Ausgabe: -1 ✓
- Eingabe: 1-2-3
  Ausgabe: -4 ✓

BNF Variante

```
// sum = value | value "−" sum | value "+" sum.
double sum(std::istream& is){
    double v = value(is);
    if (consume(is, '−'))
        return v − sum(is);
    else if(consume(is, '+'))
        return v + sum(is);
    return v;
}
```


Wir testen: BNF Variante

- Eingabe: 1-2
  Ausgabe: -1 ✓
- Eingabe: 1-2-3
  Ausgabe: 2 ☹

Wir testen

☹ Ist die BNF falsch ?

```
sum = value
      | value "−" sum
      | value "+" sum.
```

- Nein, denn sie spricht nur über die Gültigkeit von Ausdrücken, nicht über deren Werte!
- Die Auswertung haben wir naiv “obendrauf” gesetzt.

Dem Problem auf den Grund gehen

```
double sum (std::istream& is){
   double v = value (is);
   if (consume (is,'−'))
      v -= sum (is);
   else if (consume (is,'+'))
    v += sum(is);
   return v;
}
...
std::stringstream input ("1−2−3");
std::cout << sum (input) << "\n"; // 4
```

3	3
2 - "3"	-1
1 - "2 - 3"	2
"1 - 2 - 3"	2

Was ist denn falsch gelaufen?

Die BNF

- spricht offiziell zwar nicht über Werte,
- legt uns aber trotzdem die falsche Klammerung (von rechts nach links) nahe.

```
sum = value | value "−" sum | value "+" sum.
```

führt sehr natürlich zu

$1 - 2 - 3 = 1 - (2 - 3)$

Eine Lösung: Linksrekursion

```
sum = value | sum "−" value | sum "+" value.
```

Implementationsmuster von vorher funktioniert nicht mehr.
Linksrekursion muss wieder zu Rechtsrekursion aufgelöst werden.

Das sähe dann so aus:

```
sum = value | value s.
s = "−" sum | "+" sum.
```

Siehe `calculator_l.cpp`