

17. Dynamic Programming II

Editierdistanz, Algorithmus von Bellman-Ford
[Cormen et al, Kap. 24.1]]

Minimale Editierdistanz

Editierdistanz von zwei Zeichenketten $A_n = (a_1, \dots, a_n)$, $B_m = (b_1, \dots, b_m)$.

Editieroperationen:

- Einfügen eines Zeichens
- Löschen eines Zeichens
- Änderung eines Zeichens

Frage: Wie viele Editieroperationen sind mindestens nötig, um eine gegebene Zeichenkette A in eine Zeichenkette B zu überführen.

TIGER ZIGER ZIEGER ZIEGE

Minimale Editierdistanz

Gesucht: Günstigste zeichenweise Transformation $A_n \rightarrow B_m$ mit Kosten

Operation	Levenshtein	LGT ²⁴	allgemein
c einfügen	1	1	ins(c)
c löschen	1	1	del(c)
Ersetzen $c \rightarrow c'$	$\mathbb{1}(c \neq c')$	$\infty \cdot \mathbb{1}(c \neq c')$	repl(c, c')

Beispiel

T	I	G	E	R	T	I	_	G	E	R	T \rightarrow Z	+E	-R
Z	I	E	G	E	Z	I	E	G	E	_	Z \rightarrow T	-E	+R

²⁴Längste gemeinsame Teilfolge – Spezialfall des Editierproblems

DP

0. $E(n, m)$ = minimale Anzahl Editieroperationen (ED Kosten) für
 $a_{1..n} \rightarrow b_{1..m}$

1. Teilprobleme $E(i, j)$ = ED von $a_{1..i}$ $b_{1..j}$.

#TP = $n \cdot m$

2. Raten/Probieren

Kosten $\Theta(1)$

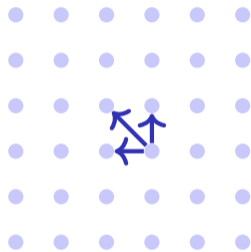
- $a_{1..i} \rightarrow a_{1..i-1}$ (löschen)
- $a_{1..i} \rightarrow a_{1..i}b_j$ (einfügen)
- $a_{1..i} \rightarrow a_{1..i-1}b_j$ (ersetzen)

3. Rekursion

$$E(i, j) = \min \begin{cases} \text{del}(a_i) + E(i - 1, j), \\ \text{ins}(b_j) + E(i, j - 1), \\ \text{repl}(a_i, b_j) + E(i - 1, j - 1) \end{cases}$$

DP

4. Abhängigkeiten



⇒ Berechnung von links oben nach rechts unten. Zeilen- oder Spaltenweise.

5. Lösung steht in $E(n, m)$

Beispiel (Levenshteinabstand)

$$E[i, j] \leftarrow \min \{ E[i-1, j] + 1, E[i, j-1] + 1, E[i-1, j-1] + \mathbb{1}(a_i \neq b_j) \}$$

	\emptyset	Z	I	E	G	E
\emptyset	0	1	2	3	4	5
T	1	1	2	3	4	5
I	2	2	1	2	3	4
G	3	3	2	2	1	2
E	4	4	3	2	2	1
R	5	5	4	3	3	3

Editierschritte: von rechts unten nach links oben, der Rekursion folgend.
Bottom-Up Beschreibung des Algorithmus: Übung

Bottom-Up DP Algorithmus ED

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Tabelle $E[0, \dots, m][0, \dots, n]$. $E[i, j]$: Minimaler Editierabstand der Zeichenketten (a_1, \dots, a_i) und (b_1, \dots, b_j)

Berechnung eines Eintrags

2. $E[0, i] \leftarrow i \forall 0 \leq i \leq m$, $E[j, 0] \leftarrow j \forall 0 \leq j \leq n$. Berechnung von $E[i, j]$ sonst mit $E[i, j] = \min\{\text{del}(a_i) + E(i-1, j), \text{ins}(b_j) + E(i, j-1), \text{repl}(a_i, b_j) + E(i-1, j-1)\}$

Bottom-Up DP Algorithmus ED

Berechnungsreihenfolge

3. Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.

Rekonstruktion einer Lösung?

4. Beginne bei $j = m, i = n$. Falls $E[i, j] = \text{repl}(a_i, b_j) + E(i - 1, j - 1)$ gilt, gib $a_i \rightarrow b_j$ aus und fahre fort mit $(j, i) \leftarrow (j - 1, i - 1)$; sonst, falls $E[i, j] = \text{del}(a_i) + E(i - 1, j)$ gib $\text{del}(a_i)$ aus fahre fort mit $j \leftarrow j - 1$; sonst, falls $E[i, j] = \text{ins}(b_j) + E(i, j - 1)$, gib $\text{ins}(b_j)$ aus und fahre fort mit $i \leftarrow i - 1$. Terminiere für $i = 0$ und $j = 0$.

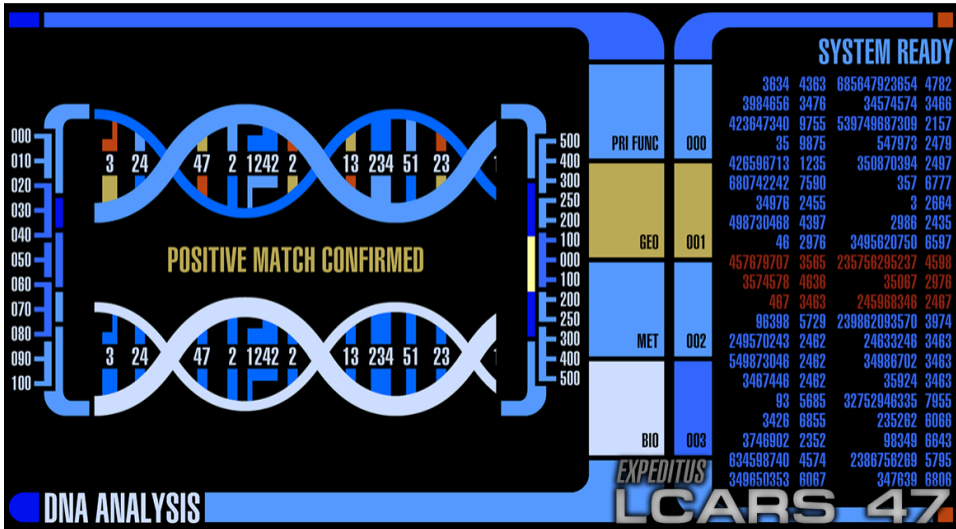
Analyse ED

- Anzahl Tabelleneinträge: $(m + 1) \cdot (n + 1)$.
- Berechnung jeweils mit konstanter Anzahl Zuweisungen und Vergleichen. Anzahl Schritte $\mathcal{O}(mn)$
- Bestimmen der Lösung: jeweils Verringerung von i oder j . Maximal $\mathcal{O}(n + m)$ Schritte.

Laufzeit insgesamt:

$$\mathcal{O}(mn).$$

DNA - Vergleich (Star Trek)



DNA - Vergleich

- DNA besteht aus Sequenzen von vier verschiedenen Nukleotiden **A**denin **G**uanin **T**hymine **C**ytosin
- DNA-Sequenzen (Gene) werden mit Zeichenketten aus A, G, T und C beschrieben.
- Ein möglicher Vergleich zweier Gene: Bestimme **Längste gemeinsame Teilfolge**

Das Problem, die längste gemeinsame Teilfolge zu finden ist ein Spezialfall der minimalen Editierdistanz.

Längste Gemeinsame Teilfolge

Teilfolgen einer Zeichenkette:

Teilfolgen(*KUH*): (), (*K*), (*U*), (*H*), (*KU*), (*KH*), (*UH*), (*KUH*)

Problem:

- **Eingabe:** Zwei Zeichenketten $A = (a_1, \dots, a_m)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ der Längen $m > 0$ und $n > 0$.
- **Gesucht:** Eine längste gemeinsame Teilfolge (LGT) von A und B .

Längste Gemeinsame Teilfolge

Beispiele:

$LGT(IGEL, KATZE) = E$, $LGT(TIGER, ZIEGE) = IGE$

Ideen zur Lösung?

T	I		G	E	R
Z	I	E	G	E	

Rekursives Vorgehen

Annahme: Lösungen $L(i, j)$ bekannt für $A[1, \dots, i]$ und $B[1, \dots, j]$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$, jedoch nicht für $i = m$ und $j = n$.

T I E G E R
Z I E G E

Betrachten Zeichen a_m, b_n . Drei Möglichkeiten:

1. A wird um ein Leerzeichen erweitert. $L(m, n) = L(m, n - 1)$
2. B wird um ein Leerzeichen erweitert. $L(m, n) = L(m - 1, n)$
3. $L(m, n) = L(m - 1, n - 1) + \delta_{mn}$ mit $\delta_{mn} = 1$ wenn $a_m = b_n$ und $\delta_{mn} = 0$ sonst

Rekursion

$$L(m, n) \leftarrow \max\{L(m-1, n-1) + \delta_{mn}, L(m, n-1), L(m-1, n)\}$$

für $m, n > 0$ und Randfälle $L(\cdot, 0) = 0, L(0, \cdot) = 0$.

	\emptyset	Z	I	E	G	E
\emptyset	0	0	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0
I	0	0	1	1	1	1
G	0	0	1	1	2	2
E	0	0	1	2	2	3
R	0	0	1	2	2	3

Dynamic Programming Algorithmus LGT

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Tabelle $L[0, \dots, m][0, \dots, n]$. $L[i, j]$: Länge einer LGT der Zeichenketten (a_1, \dots, a_i) und (b_1, \dots, b_j)

Berechnung eines Eintrags

2. $L[0, i] \leftarrow 0 \forall 0 \leq i \leq m$, $L[j, 0] \leftarrow 0 \forall 0 \leq j \leq n$. Berechnung von $L[i, j]$ sonst mit $L[i, j] = \max(L[i-1, j-1] + \delta_{ij}, L[i, j-1], L[i-1, j])$.

Dynamic Programming Algorithmus LGT

Berechnungsreihenfolge

3. Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.

Rekonstruktion einer Lösung?

4. Beginne bei $j = m, i = n$. Falls $a_i = b_j$ gilt, gib a_i aus und fahre fort mit $(j, i) \leftarrow (j - 1, i - 1)$; sonst, falls $L[i, j] = L[i, j - 1]$ fahre fort mit $j \leftarrow j - 1$; sonst, falls $L[i, j] = L[i - 1, j]$ fahre fort mit $i \leftarrow i - 1$. Terminiere für $i = 0$ oder $j = 0$.

Analyse LGT

- Anzahl Tabelleneinträge: $(m + 1) \cdot (n + 1)$.
- Berechnung jeweils mit konstanter Anzahl Zuweisungen und Vergleichen. Anzahl Schritte $\mathcal{O}(mn)$
- Bestimmen der Lösung: jeweils Verringerung von i oder j . Maximal $\mathcal{O}(n + m)$ Schritte.

Laufzeit insgesamt:

$$\mathcal{O}(mn).$$

Erinnerung Kürzeste Wege Algorithmus

1. Initialisiere d_s und π_s : $d_s[v] = \infty$, $\pi_s[v] = \text{null}$ für alle $v \in V$
2. Setze $d_s[s] \leftarrow 0$
3. Wähle eine Kante $(u, v) \in E$

Relaxiere (u, v) :

if $d_s[v] > d_s[u] + c(u, v)$ then

$d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u, v)$

$\pi_s[v] \leftarrow u$

4. Wiederhole 3 bis nichts mehr relaxiert werden kann.
(bis $d_s[v] \leq d_s[u] + c(u, v) \quad \forall (u, v) \in E$)

Dynamic Programming Ansatz (Bellman)

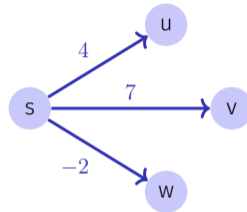
Induktion über Anzahl Kanten. $d_s[i, v]$: Kürzeste Weglänge von s nach v über maximal i Kanten.

$$d_s[i, v] = \min\{d_s[i - 1, v], \min_{(u,v) \in E} (d_s[i - 1, u] + c(u, v))\}$$

$$d_s[0, s] = 0, d_s[0, v] = \infty \quad \forall v \neq s.$$

Dynamic Programming Ansatz (Bellman)

	s	\dots	v	\dots	w
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	∞	7	∞	-2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$n - 1$	0	\dots	\dots	\dots	\dots



Algorithmus: Iteriere über letzte Zeile bis die Relaxationsschritte keine Änderung mehr ergeben, maximal aber $n - 1$ mal. Wenn dann noch Änderungen, dann gibt es keinen kürzesten Pfad.

Algorithmus Bellman-Ford(G, s)

Input: Graph $G = (V, E, c)$, Startpunkt $s \in V$

Output: Wenn Rückgabe true, Minimale Gewichte d der kürzesten Pfade zu jedem Knoten, sonst kein kürzester Pfad.

```
foreach  $u \in V$  do  
   $d_s[u] \leftarrow \infty; \pi_s[u] \leftarrow \text{null}$   
 $d_s[s] \leftarrow 0;$   
for  $i \leftarrow 1$  to  $|V|$  do  
   $f \leftarrow \text{false}$   
  foreach  $(u, v) \in E$  do  
     $f \leftarrow f \vee \text{Relax}(u, v)$   
  if  $f = \text{false}$  then return true  
return false;
```