16. Dynamische Programmierung

Memoisieren, Optimale Substruktur, Überlappende Teilprobleme, Abhängigkeiten, Allgemeines Vorgehen. Beispiele: Schneiden von Eisenstangen, Kaninchen

[Ottman/Widmayer, Kap. 7.1, 7.4, Cormen et al, Kap. 15]

Fibonacci Zahlen


(schon wieder)

$$F_n := \begin{cases} n & \text{wenn } n < 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{wenn } n \geq 2. \end{cases}$$

Analyse: warum ist der rekursive Algorithmus so langsam.

Algorithmus FibonacciRecursive(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

if $n < 2$ **then**
    $f \leftarrow n$
else
    $f \leftarrow \text{FibonacciRecursive}(n-1) + \text{FibonacciRecursive}(n-2)$
return f

Analyse

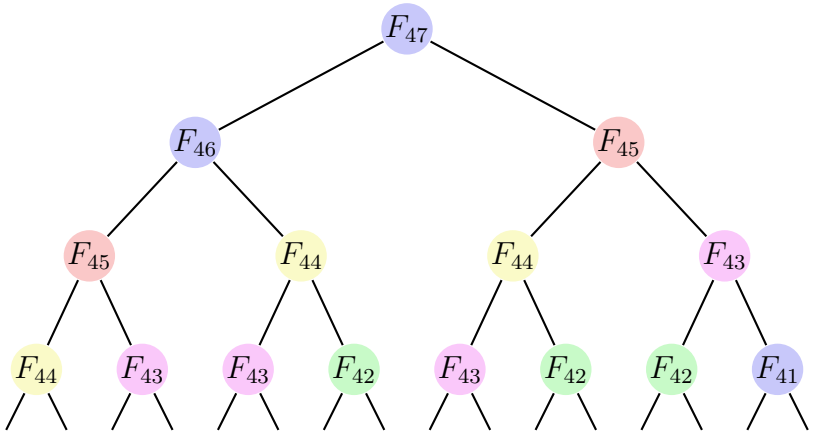
$T(n)$: Anzahl der ausgeführten Operationen.

- $n = 0, 1$: $T(n) = \Theta(1)$
- $n \geq 2$: $T(n) = T(n-2) + T(n-1) + c$.

$$T(n) = T(n-2) + T(n-1) + c \geq 2T(n-2) + c \geq 2^{n/2}c' = (\sqrt{2})^n c'$$

Algorithmus ist **exponentiell (!)** in n.

Grund, visualisiert



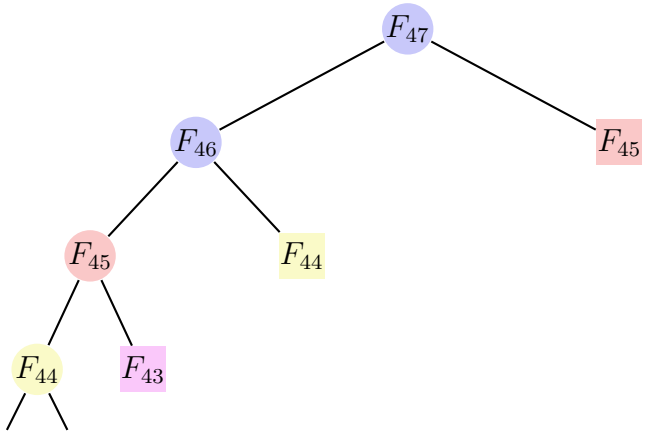
Knoten mit denselben Werten werden (zu) oft ausgewertet.

Memoization

Memoization (sic) Abspeichern von Zwischenergebnissen.

- Bevor ein Teilproblem gelöst wird, wird Existenz eines entsprechenden Zwischenergebnis geprüft.
- Existiert ein gespeichertes Zwischenergebnis bereits, so wird dieses verwendet.
- Andernfalls wird der Algorithmus ausgeführt und das Ergebnis wird entsprechend gespeichert.

Memoization bei Fibonacci



Rechteckige Knoten wurden bereits ausgewertet.

Algorithmus FibonacciMemoization(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

if $n \leq 2$ **then**
  $f \leftarrow 1$
else if $\exists$memo$[n]$ **then**
  $f \leftarrow$ memo$[n]$
else
  $f \leftarrow$ FibonacciMemoization$(n-1)$ + FibonacciMemoization$(n-2)$
  memo$[n] \leftarrow f$
return f

Analyse

Berechnungsaufwand:

$$T(n) = T(n-1) + c = ... = \mathcal{O}(n).$$

denn nach dem Aufruf von $f(n-1)$ wurde $f(n-2)$ bereits berechnet.
Das lässt sich auch so sehen: Für jedes n wird $f(n)$ maximal einmal rekursiv berechnet. Laufzeitkosten: n Aufrufe mal $\Theta(1)$ Kosten pro Aufruf $n \cdot c \in \Theta(n)$. Die Rekursion verschwindet aus der Berechnung der Laufzeit. Algorithmus benötigt $\Theta(n)$ Speicher.[22]

[22] Allerdings benötigt der naive Algorithmus auch $\Theta(n)$ Speicher für die Rekursionsverwaltung.

Genauer hingesehen ...

... berechnet der Algorithmus der Reihe nach die Werte F_1, F_2, F_3, ... verkleidet im **Top-Down** Ansatz der Rekursion.

Man kann den Algorithmus auch gleich **Bottom-Up** hinschreiben. Das ist charakteristisch für die **dynamische Programmierung**.

Algorithmus FibonacciBottomUp(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

$F[1] \leftarrow 1$
$F[2] \leftarrow 1$
for $i \leftarrow 3, \ldots, n$ **do**
  $F[i] \leftarrow F[i-1] + F[i-2]$
return $F[n]$

Dynamische Programmierung: Idee

- Aufteilen eines komplexen Problems in eine vernünftige Anzahl kleinerer Teilprobleme
- Die Lösung der Teilprobleme wird zur Lösung des komplexeren Problems verwendet
- Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

Dynamische Programmierung: Konsequenz

Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

$\Rightarrow$ Resultate werden zwischengespeichert

Wir tauschen Laufzeit gegen Speicherplatz

Dynamic Programming: Beschreibung

1. Verwalte **DP-Tabelle** mit Information zu den Teilproblemen.
   Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?
2. Berechnung der **Randfälle**.
   Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?
3. **Berechnungsreihenfolge** bestimen.
   In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?
4. Auslesen der **Lösung**.
   Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

Laufzeit (typisch) = Anzahl Einträge der Tabelle mal Aufwand pro Eintrag.

Dynamic Programming: Beschreibung am Beispiel

1. Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält n-te Fibonacci Zahl.

2. Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?

   Werte F_1 und F_2 sind unabhängig einfach “berechenbar”.

3. Berechnungsreihenfolge?

   F_i mit aufsteigenden i.

4. Rekonstruktion einer Lösung?

   F_n ist die n-te Fibonacci-Zahl.

Dynamic Programming = Divide-And-Conquer ?

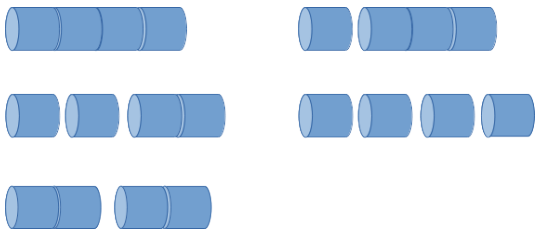
- In beiden Fällen ist das Ursprungsproblem (einfacher) lösbar, indem Lösungen von Teilproblemen herangezogen werden können. Das Problem hat **optimale Substruktur**.
- Bei Divide-And-Conquer Algorithmen (z.B. Mergesort) sind Teilprobleme unabhängig; deren Lösungen werden im Algorithmus nur einmal benötigt.
- Beim DP sind Teilprobleme nicht unabhängig. Das Problem hat **überlappende Teilprobleme**, welche im Algorithmus mehrfach gebraucht werden.
- Damit sie nur einmal gerechnet werden müssen, werden Resultate tabelliert. Dafür darf es **zwischen Teilproblemen keine zirkulären Abhängigkeiten** geben.

Schneiden von Eisenstäben

- Metallstäbe werden zerschnitten und verkauft.
- Metallstäbe der Länge $n \in \mathbb{N}$ verfügbar. Zerschneiden kostet nichts.
- Für jede Länge $l \in \mathbb{N}$, $l \leq n$ bekannt: Wert $v_l \in \mathbb{R}^+$
- Ziel: Zerschneide die Stange so (in $k \in \mathbb{N}$ Stücke), dass

$$\sum_{i=1}^{k} v_{l_i} \text{ maximal unter } \sum_{i=1}^{k} l_i = n.$$

Schneiden von Eisenstäben: Beispiel



Arten, einen Stab der Länge 4 zu zerschneiden (ohne Permutationen)

Länge	0	1	2	3	4
Preis	0	2	3	8	9

$\Rightarrow$ Bester Schnitt: 3 + 1 mit Wert 10.

Wie findet man den DP Algorithmus

0. Genaue Formulierung der gesuchten Lösung
1. Definiere Teilprobleme (und bestimme deren Anzahl)
2. Raten / Aufzählen (und bestimme die Laufzeit für das Raten)
3. Rekursion: verbinde die Teilprobleme
4. Memoisieren / Tabellieren. Bestimme die Abhängigkeiten der Teilprobleme
5. Lösung des Problems
   Laufzeit = #Teilprobleme $\times$ Zeit/Teilproblem

Struktur des Problems

0. **Gesucht:** r_n = maximal erreichbarer Wert von (ganzem oder geschnittenem) Stab mit Länge n.
1. **Teilprobleme:** maximal erreichbarer Wert r_k für alle $0 \leq k < n$
2. **Rate** Länge des ersten Stückes
3. **Rekursion**

$$r_k = \max\{v_i + r_{k-i} : 0 < i \leq k\}, \quad k > 0$$
$$r_0 = 0$$

4. **Abhängigkeit:** r_k hängt (nur) ab von den Werten v_i, $l \leq i \leq k$ und den optimalen Schnitten r_i, $i < k$
5. **Lösung** in r_n

Algorithmus RodCut(v,n)

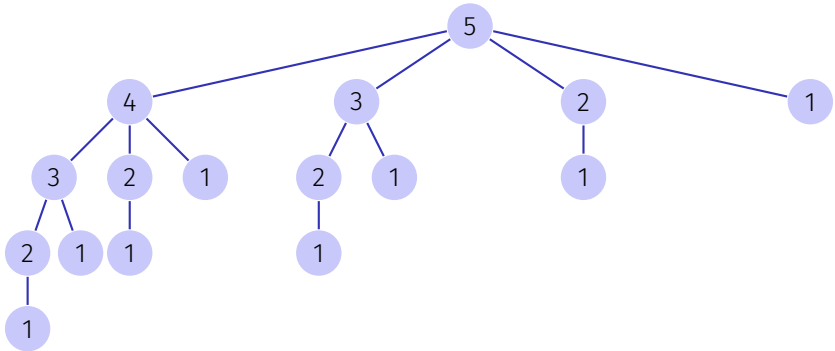
Input: $n \geq 0$, Preise v
Output: bester Wert

$q \leftarrow 0$
if $n > 0$ **then**
  for $i \leftarrow 1, \ldots, n$ **do**
    $q \leftarrow \max\{q, v_i + \mathsf{RodCut}(v, n-i)\}$;
return q

Laufzeit $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + c \quad \Rightarrow^{23} \quad T(n) \in \Theta(2^n)$

[23] $T(n) = T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + c = T(n-1) + (T(n-1) - c) + c = 2T(n-1) \quad (n > 0)$

Rekursionsbaum



Algorithmus RodCutMemoized(m, v, n)

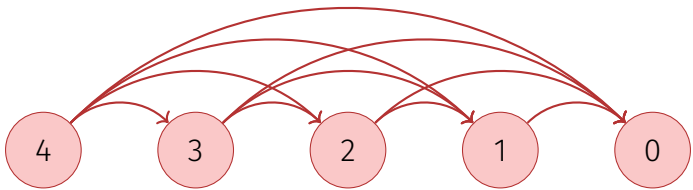
Input: $n \geq 0$, Preise v, Memoization Tabelle m
Output: bester Wert

$q \leftarrow 0$
if $n > 0$ **then**
  if $\exists\, m[n]$ **then**
    $q \leftarrow m[n]$
  else
    for $i \leftarrow 1, \ldots, n$ **do**
      $q \leftarrow \max\{q, v_i + \text{RodCutMemoized}(m, v, n-i)\}$;
    $m[n] \leftarrow q$
return q

Laufzeit $\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$

Teilproblem-Graph

beschreibt die Abhängigkeiten der Teilprobleme untereinander



und darf keine Zyklen enthalten

Konstruktion des optimalen Schnittes

- Während der (rekursiven) Berechnung der optimalen Lösung für jedes $k \leq n$ bestimmt der rekursive Algorithmus die optimale Länge des ersten Stabes
- Speichere die Länge des ersten Stabes für jedes $k \leq n$ in einer Tabelle mit n Einträgen.

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1. Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält besten Wert eines Stabes der Länge n.

2. Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?

   Wert r_0 ist 0.

3. Berechnungsreihenfolge?

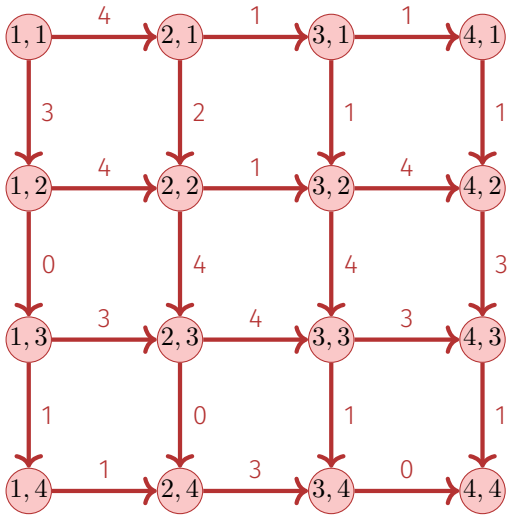
   r_i, $i = 1, \ldots, n$.

4. Rekonstruktion einer Lösung?

   r_n ist der beste Wert für eine Stange der Länge n

Kaninchen!

Ein Kaninchen sitzt auf Platz $(1,1)$ eines $n \times n$ Gitters. Es kann nur nach Osten oder nach Süden gehen. Auf jedem Wegstück liegt eine Anzahl Rüben. Wie viele Rüben sammelt das Kaninchen maximal ein?

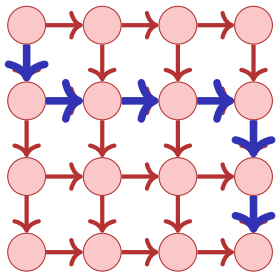


Kaninchen!

Anzahl mögliche Pfade?

- Auswahl von $n-1$ Wegen nach Süden aus $2n-2$ Wegen insgesamt.
- $$\binom{2n-2}{n-1} \in \Omega(2^n)$$

$\Rightarrow$ Naiver Algorithmus hat keine Chance



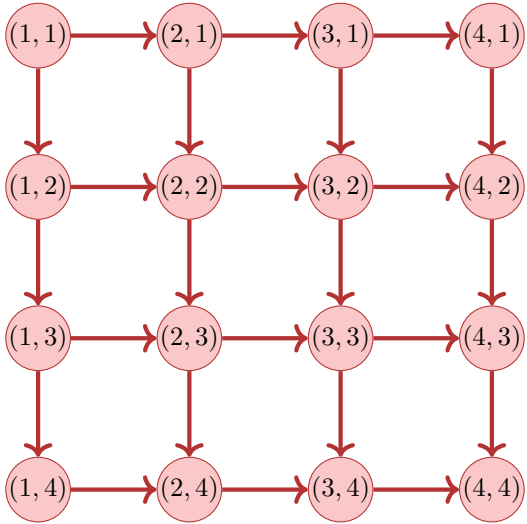
Der Weg 100011
(1:nach Süden, 0:nach Osten)

Rekursion

Gesucht: $T_{0,0}$ **= Maximale Anzahl Rüben von** $(0,0)$ **nach** (n,n)**.**
Sei $w_{(i,j)-(i',j')}$ Anzahl Rüben auf Kante von (i,j) nach (i',j').
Rekursion (maximale Anzahl Rüben von (i,j) nach (n,n))

$$T_{ij} = \begin{cases} \max\{w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}\}, & i < n, j < n \\ w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, & i = n, j < n \\ w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}, & i < n, j = n \\ 0 & i = j = n \end{cases}$$

Teilproblemabhängigkeitsgraph



Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Tabelle T der Grösse $n \times n$. Eintrag bei i, j enthält die maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n).

Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?

2. Wert $T_{n,n}$ ist 0.

Berechnungsreihenfolge?

3. $T_{i,j}$ mit $i = n \searrow 1$ und für jedes i: $j = n \searrow 1$, (oder umgekehrt: $j = n \searrow 1$ und für jedes j: $i = n \searrow 1$).

Rekonstruktion einer Lösung?

4. $T_{1,1}$ enthält die maximale Anzahl Rüben