

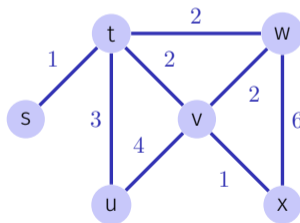
14. Minimale Spann­b­ume

Motivation, Greedy, Algorithmus von Kruskal, Allgemeine Regeln, Union-Find Struktur, Algorithmus von Jarnik, Prim, Dijkstra
[Ottman/Widmayer, Kap. 9.6, 6.2, 6.1, Cormen et al, Kap. 23, 19]

Problem

Gegeben: Ungerichteter, zusammenhängender, gewichteter Graph $G = (V, E, c)$.

Gesucht: Minimaler Spannbaum $T = (V, E')$: zusammenhängender, zyklensfreier Teilgraph $E' \subset E$, so dass $\sum_{e \in E'} c(e)$ minimal.



Beispiele von Anwendungen

- Netzwerk-Design: finde das billigste / kürzeste Netz oder Leitungssystem, welches alle Knoten miteinander verbindet.
- Approximation einer Lösung des Travelling-Salesman Problems: finde einen möglichst kurzen Rundweg, welcher jeden Knoten einmal besucht.

18

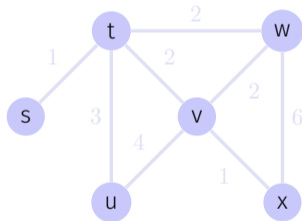
¹⁸Der beste bekannte Algorithmus zur exakten Lösung des TS Problems hat exponentielle Laufzeit

Greedy Verfahren

- Gierige Verfahren berechnen eine Lösung schrittweise, indem lokal beste Lösungen gewählt werden.
- Die meisten Probleme sind nicht mit einer greedy Strategie lösbar.
- Das Problem des Minimalen Spannbaumes kann mit einem gierigen Verfahren effizient gelöst werden.

Greedy Idee (Kruskal, 1956)

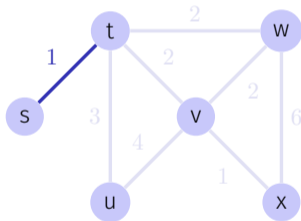
Konstruiere T indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

Greedy Idee (Kruskal, 1956)

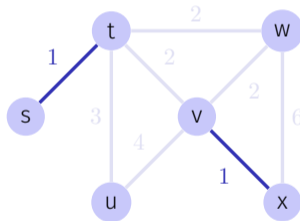
Konstruiere T indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

Greedy Idee (Kruskal, 1956)

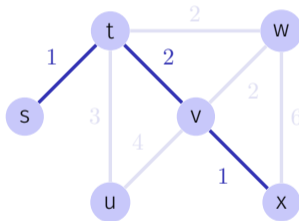
Konstruiere T indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

Greedy Idee (Kruskal, 1956)

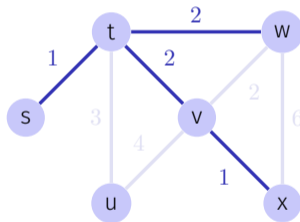
Konstruiere T indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

Greedy Idee (Kruskal, 1956)

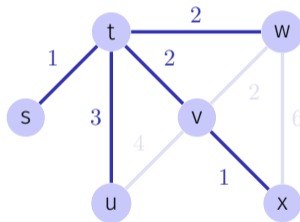
Konstruiere T indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

Greedy Idee (Kruskal, 1956)

Konstruiere T indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

Algorithmus MST-Kruskal(G)

Input: Gewichteter Graph $G = (V, E, c)$

Output: Minimaler Spannbaum mit Kanten A .

Sortiere Kanten nach Gewicht $c(e_1) \leq \dots \leq c(e_m)$

$A \leftarrow \emptyset$

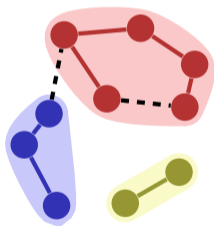
for $k = 1$ **to** $|E|$ **do**

if $(V, A \cup \{e_k\})$ kreisfrei **then**
 $A \leftarrow A \cup \{e_k\}$

return (V, A, c)

Zur Implementation

Gegeben eine Menge von Mengen $i \equiv A_i \subset V$. Zur Identifikation von Schnitten und Kreisen: Zugehörigkeit der beiden Endpunkte einer Kante zu einer der Mengen.



Zur Implementation

Allgemeines Problem: Partition (Menge von Teilmengen) z.B.

$\{\{1, 2, 3, 9\}, \{7, 6, 4\}, \{5, 8\}, \{10\}\}$

Benötigt: Abstrakter Datentyp „Union-Find“ mit folgenden Operationen

- $\text{Make-Set}(i)$: Hinzufügen einer neuen Menge i .
- $\text{Find}(e)$: Name i der Menge, welche e enthält.
- $\text{Union}(i, j)$: Vereinigung der Mengen mit Namen i und j .

Union-Find Algorithmus MST-Kruskal(G)

Input: Gewichteter Graph $G = (V, E, c)$

Output: Minimaler Spannbaum mit Kanten A .

Sortiere Kanten nach Gewicht $c(e_1) \leq \dots \leq c(e_m)$

$A \leftarrow \emptyset$

for $k = 1$ **to** $|V|$ **do**

\lfloor MakeSet(k)

for $k = 1$ **to** m **do**

$(u, v) \leftarrow e_k$

if Find(u) \neq Find(v) **then**

 Union(Find(u), Find(v))

$A \leftarrow A \cup e_k$

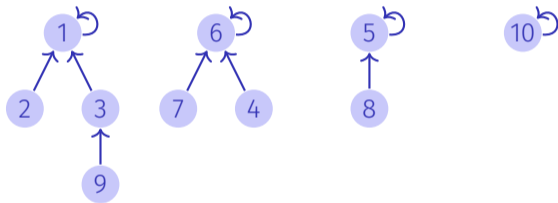
else

// konzeptuell: $R \leftarrow R \cup e_k$

return (V, A, c)

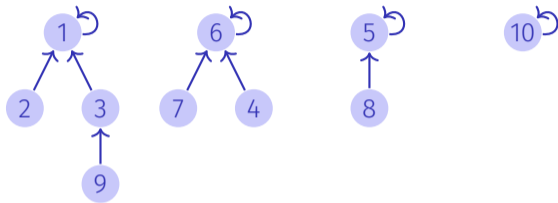
Implementation Union-Find

Idee: Baum für jede Teilmenge in der Partition, z.B.
 $\{\{1, 2, 3, 9\}, \{7, 6, 4\}, \{5, 8\}, \{10\}\}$



Baumwurzeln = Namen (Stellvertreter) der Mengen,
Bäume = Elemente der Mengen

Implementation Union-Find



Repräsentation als Array:

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parent	1	1	1	6	5	6	5	5	3	10

Implementation Union-Find

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parent	1	1	1	6	5	6	5	5	3	10

Make-Set(i) $p[i] \leftarrow i$; **return** i

Find(i) **while** ($p[i] \neq i$) **do** $i \leftarrow p[i]$
 return i

Union(i, j)¹⁹ $p[j] \leftarrow i$;

¹⁹ i und j müssen Namen (Wurzeln) der Mengen sein. Andernfalls verwende
Union(Find(i),Find(j))

Optimierung der Laufzeit für Find

Baum kann entarten: Beispiel Union(8, 7), Union(7, 6), Union(6, 5), ...

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	..
Parent	1	1	2	3	4	5	6	7	..

Laufzeit von Find im schlechtesten Fall in $\Theta(n)$.

Optimierung der Laufzeit für Find

Idee: Immer kleineren Baum unter grösseren Baum hängen. Benötigt zusätzliche Grösseninformation (Array) g

Make-Set(i) $p[i] \leftarrow i; g[i] \leftarrow 1; \mathbf{return} \ i$

Union(i, j) **if** $g[j] > g[i]$ **then** swap(i, j)
 $p[j] \leftarrow i$
 if $g[i] = g[j]$ **then** $g[i] \leftarrow g[i] + 1$

⇒ Baumtiefe (und schlechteste Laufzeit für Find) in $\Theta(\log n)$

Weitere Verbesserung

Bei jedem Find alle Knoten direkt an den Wurzelknoten hängen.

Find(i):

$j \leftarrow i$

while ($p[i] \neq i$) **do** $i \leftarrow p[i]$

while ($j \neq i$) **do**

$t \leftarrow j$
 $j \leftarrow p[j]$
 $p[t] \leftarrow i$

return i

Laufzeit: amortisiert *fast* konstant (Inverse der Ackermannfunktion).²⁰

²⁰Wird hier nicht vertieft.

Laufzeit des Kruskal Algorithmus

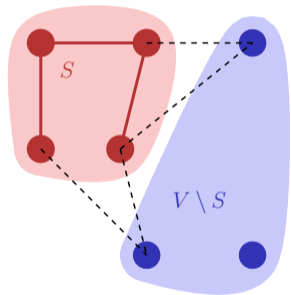
- Sortieren der Kanten: $\Theta(|E| \log |E|) = \Theta(|E| \log |V|)$.²¹
 - Initialisieren der Union-Find Datenstruktur $\Theta(|V|)$
 - $|E| \times \text{Union}(\text{Find}(x), \text{Find}(y))$: $\mathcal{O}(|E| \log |E|) = \mathcal{O}(|E| \log |V|)$.
- Insgesamt $\Theta(|E| \log |V|)$.

²¹da G zusammenhängend: $|V| \leq |E| \leq |V|^2$

Algorithmus von Jarnik (1930), Prim, Dijkstra (1959)

Idee: Starte mit einem $v \in V$ und lasse von dort unter Verwendung der Auswahlregel einen Spannbaum wachsen:

```
A ← ∅  
S ← {v0}  
for  $i \leftarrow 1$  to  $|V|$  do  
  Wähle billigste  $(u, v)$  mit  $u \in S, v \notin S$   
   $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$   
   $S \leftarrow S \cup \{v\}$  // (Färbung)
```



Anmerkung: man benötigt keine Union-Find Datenstruktur. Es genügt, Knoten zu färben, sobald sie zu S hinzugenommen werden.

Trivial $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.

Verbesserung (wie bei Dijkstras Kürzeste Pfade):

■ Mit Min-Heap, Kosten:

■ Initialisierung (Knotenfärbung) $\mathcal{O}(|V|)$

■ $|V| \times \text{ExtractMin} = \mathcal{O}(|V| \log |V|)$,

■ $|E| \times \text{Insert oder DecreaseKey} = \mathcal{O}(|E| \log |V|)$,

$\mathcal{O}(|E| \cdot \log |V|)$