ETH zürich

Felix Friedrich & Hermann Lehner

Informatik II

Vorlesung am D-BAUG der ETH Zürich

Frühjahr 2020

Willkommen!

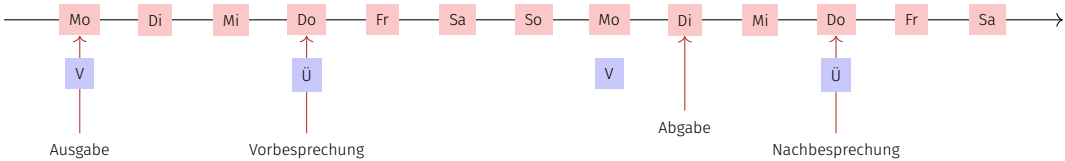
Vorlesungshomepage:

`http://lec.inf.ethz.ch/baug/informatik2`

Das Team:

Dozenten	Felix Friedrich
	Hermann Lehner
Assistenten	Prashanth Chandran
	Sverrir Thorgeirsson
	Vu Nguyen
	Jan Osusky
	Michael Seeber
Back-Office	Katja Wolff

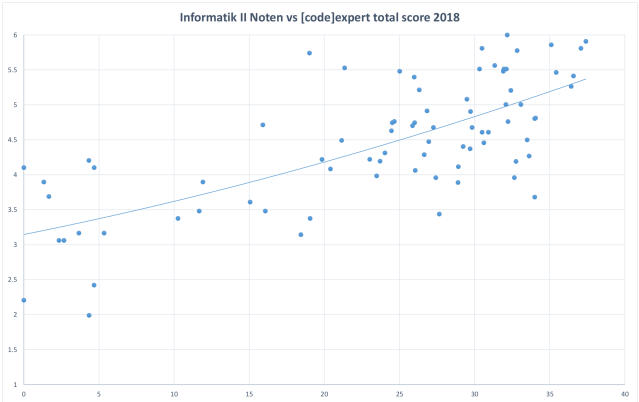
Übungsbetrieb



- Übungsblattausgabe zur Vorlesung (online).
- Vorbesprechung in der folgenden Übung.
- Bearbeitung der Übung bis spätestens 2 Tage vor der nächsten Übungsstunde (23:59h).
- Nachbesprechung der Übung in der nächsten Übungsstunde. Feeback zu den Abgaben innerhalb einer Woche nach Nachbesprechung.

Zu den Übungen

- Bearbeitung der wöchentlichen Übungsserien ist freiwillig, wird aber **dringend** empfohlen!



Es ist so einfach!

Für die Übungen verwenden wir eine Online-Entwicklungsumgebung, benötigt lediglich einen Browser, Internetverbindung und Ihr ETH Login.

Falls Sie keinen Zugang zu einem Computer haben: in der ETH stehen an vielen Orten öffentlich Computer bereit.

Literatur

Algorithmen und Datenstrukturen, *T. Ottmann, P. Widmayer*, Spektrum-Verlag, 5. Auflage, 2011

Algorithmen - Eine Einführung, *T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein*, Oldenbourg, 2010

Introduction to Algorithms, *T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein* , 3rd ed., MIT Press, 2009

Algorithmen Kapieren, *Aditya Y. Bhargava*, MITP, 2019.

Relevantes für die Prüfung

Prüfungsstoff für die Endprüfung schliesst ein

- Vorlesungsinhalt (Vorlesung, Handout) und
- Übungsinhalte (Übungsstunden, Übungsaufgaben).

Prüfung ist schriftlich
Es wird sowohl praktisches Wissen (Kenntnis von Algorithmen, Programmierfähigkeit) als auch theoretisches Wissen (Hintergründe, Systematik) geprüft.

Unser Angebot

- Bearbeitung der wöchentlichen Übungsserien $\rightarrow$ Bonus von maximal 0.25 Notenpunkten für die Prüfung.
- Bonus proportional zur erreichten Punktzahl von **speziell markierten Bonus-Aufgaben**. Volle Punktzahl $\widehat{=}$ 0.25.
- **Zulassung** zu speziell markierten Bonusaufgaben kann von der erfolgreichen Absolvierung anderer Übungsaufgaben abhängen.

Unser Angebot (konkret)

- Insgesamt 3 Bonusaufgaben; 2/3 der Punkte reichen für 0.25 Bonuspunkte für die Prüfung
- Sie können also z.B. 2 Bonusaufgaben zu 100% lösen, oder 3 Bonusaufgaben zu je 66%, oder ...
- Bonusaufgaben müssen durch erfolgreich gelöste Übungsserien freigeschaltet ($\rightarrow$ Experience Points) werden
- Es müssen wiederum nicht alle Übungsserien vollständig gelöst werden, um eine Bonusaufgabe freizuschalten
- Details: Übungsstunden, Online-Übungssystem (Code Expert)

Akademische Lauterkeit

Regel: Sie geben nur eigene Lösungen ab, welche Sie selbst verfasst und verstanden haben.

Wir prüfen das (zum Teil automatisiert) nach und behalten uns disziplinarische Massnahmen vor.

Wenn es Probleme gibt ...

- mit dem Kursinhalt
  - unbedingt alle Übungen besuchen
  - dort Fragen stellen
  - und/oder Übungsleiter kontaktieren
- alle weiteren Probleme
  - Email an Dozenten (Felix Friedrich, Hermann Lehner)
- Wir helfen gerne!

1. Einführung

Ziele der Vorlesung

Ziele der Vorlesung

- Verständnis des Entwurfs und der Analyse grundlegender Algorithmen und Datenstrukturen.
- Fähigkeit, korrekte und ausreichend effiziente Programme entwickeln, um eine klar formulierte Problemstellung zu lösen.

Inhalte der Vorlesung

Software Engineering

Java To Python Introduction

Python Datastructures

Datenstrukturen / Algorithmen

Begriff der Invariante, Kostenmodell, Landau Symbole

Algorithmenentwurf, Induktion, Divide & Conquer

Suchen, Sortieren

Wörterbücher: Hashing und Suchbäume, Balancierte Bäume

Dynamische Programmierung

Fundamentale Graphenalgorithmen

Kürzeste Wege, Maximaler Fluss

2. Von Java nach Python

Erstes Python Programm, Transfer Java → Python, Dynamische Datenstrukturen in Python

Lernziele

- Erlernen einer neuen Programmiersprache (Python). Lernen, wie man von einer Programmiersprache zur anderen wechselt.
- Kennenlernen der wichtigsten Unterschiede zwischen Java und Python, sowohl aus syntaktischer wie auch aus semantischer Sicht.
- Erlernen der fundamentalen Datentypen von Python (list, set, dict und tuple) und der darauf anwendbaren Operationen.
- Gewöhnen an die neue Programmierprache und Umgebung (Python), indem bekannte Algorithmen erneut implementiert werden.

Erstes Java Programm

```
public class Hello {
  public static void main (String[] args) {
    System.out.print("Hello World!");
  }
}
```

Erstes Python Programm

```
print("Hello World!")
```

Kommentare

Kommentaren wird ein **#** vorangestellt:

```
# prints 'Hello World!' to the console
print("Hello World!")
```

Formattierung ist relevant: Anweisungen

- Whitespace (Space, Enter, Tab) ist relevant!
- Jede Zeile steht für eine Anweisung
- Also **genau eine** Anweisung pro Zeile
- Kommentare starten mit einem **#**

Beispiel-Program mit zwei Anweisungen:

```
# two print-statements
print("Hurray, finally ...")
print("... no Semicolons!")
```

Formattierung ist Relevant: Blöcke

- Blöcke müssen eingerückt werden!
- Alle eingerückten Anweisungen gehören zum Block, Block endet, wo die Einrückung endet.
- Start eines Blocks ist markiert durch ein Doppelpunkt “:”

```python
# in Python
while i > 0:
    x = x + 1 / i
    i = i - 1

print(x)
```

```java
// in Java
while (i > 0) {
    x = x + 1.0 / i;
    i = i - 1;
}
System.out.print(x)
```

Literale: Zahlen

- **integer**: `42, -5, 0x1b, 0o33, 772968476231357893257893`
  Beliebig genaue Ganzzahlen
- **float**: `-0.1, 34.567e-4`
  Wie **`double`** in Java, aber Präzission ist abghängig von der Platform (CPU/Betriebssystem)
- **complex**: 2 + 3j, (0.21 - 1.2j)
  Komplexe Zahlen in der Form a**+**b**`j`**. Optional mit runden Klammern.

Literale: Wahrheitswerte

- `True`
- `False`

Literale: Zeichenketten

- `'a single quoted string\nand a second line'`
- `"a doube quoted string\nand a second line"`
- Multi-line strings (tripple double quotes):

```
"""a multiline string
and a second line"""
```

Literale: Sequenzen

- **arrays**: Es gibt keine Arrays in Python
- **lists**: `[ 17, True, "abc"]` , `[]`
  Mutierbare geordnete Sequenz von 0 oder mehr Werten mit beliebigen Typen.
- **tuples**: `(17, True, "abc")` , `(42, )`
  Nicht-änderbare geordnete Sequenz von 1 oder mehr Werten mit beliebigen Typen.

Literale: Kollektionen

- **dicts**: `{ "a": 42, "b": 27, False: 0 }`, `{}`
  Mutierbarer Key-Wert Store. Keys und Werte mit beliebigen Typen.
- **sets**: `{17, True, "abc"}`, `{42}`
  Mutierbare ungeordnete Sequenz von 0 oder mehr Werten mit beliebigen Typen. Keine Duplikate.

Variablen

- Variablen werden automatisch erstellt bei der ersten Zuweisung
- Der Typ einer Variable wird bei Wertzuweisungen nicht geprüft. D.h. es können Werte von unterschiedlichen Typen einer Variable zugewiesen werden über Zeit.
- Zuweisung von Werten mittels Zuweisungsoperator: `=`
- Zuweisung an mehrere Variablen gleichzeitig mit Tupeln

```
a = "Ein Text"
print(a) # prints: Ein Text
a = 42
print(a) # prints: 42
```

```
x, y = 4, 5
print(x) # prints: 4
print(y) # prints: 5
```

Variablen

- Variablen müssen immer erst zugewiesen werden, bevor diese ausgelesen werden können.

Angenommen, b wurde noch nie ein Wert zugewiesen.

```
a = b
```

Gibt folgenden Fehler

NameError: name 'b' is not defined

Numerische und Boolean Operatoren

- Numerische Operatoren wie bei Java: **`+, -, *, /, %, **, //`**
- Achtung: “ **`/`** ” resultiert immer in einer Fliesskomma-Zahl
- **`**`**: Potenzierung, **`a**b`** = a^b.
- **`//`**: Ganzzahl-Division, **`5//2`** ergibt **`2`**.
- Vergleichsoperatoren wie bei Java: **`==, >=, <=, >, <, !=`**
- Logische Operatoren: **`and, or, not`**
- Membership Operator: “ **`in`** ” Gibt an, ob ein Wert in einer Liste, einem Set oder einer Zeichenkette ist.
- Identitäts Operator: “ **`is`** ” Prüft, ob zwei Variablen auf das gleiche Objekt zeigen.

Eingabe/Ausgabe

- Lesen von Eingaben mittels **`input()`**
- Uebergabe eines Prompts möglich.
- Ausgabe mittels **`print(...)`**
- **`print`** nimmt eine oder mehrere Argumente entgegen und druckt diese mit einem Leerschlag dazwischen

```
name = input("What is your name: ")
print("Hello", name)
```

Eingabe/Ausgabe

- Eingabe wird immer als Zeichenkette gelesen.
- Um eine Zahl einzulesen, muss die Eingabe in eine Zahl konvertiert werden
- Es finden keine impliziten Konvertierungen statt
- Explizite Konvertierung mittels: **`int(), float(), complex(), list()`**, ...

```
i = int(input("Enter a number: "))
print("The", i,"th power of two is", 2**i)
```

Bedingungen

- Keine Klammern nötig um den Test
- **`elif`** um einen weiteren Fall zu testen
- Einrückung beachten!

```
a = int(input("Enter a number: "))
if a == 42:
  print("Naturally, the answer")
elif a == 28:
  print("A perfect number, good choice")
else:
  print(a, "is just some boring number")
```

While-Schleifen

Die bekannte Collaz-Folge

```
a = int(input("Enter a number: "))
while a != 1:
  if a % 2 == 0:
    a = a // 2
  else:
    a = a * 3 + 1
  print(a, end=' ')
```

For-Schleifen

- For-Schleifen funktionieren anders als in Java
- Iteriert über die Elemente der angegebenen Menge

```
some_list = [14, 'lala', 22, True, 6]
total = 0;
for item in some_list:
  if type(item) == int:
    total += item
print("Total of the numbers is", total)
```

For-Schleifen über einen Wertebereich

- Die Funktion **`range(start, end, step)`** erstellt eine Liste von Werten, beginnend mit **`start`**, bis zu **`end`** - exklusive. Schrittgrösse **`step`**.
- Schrittgrösse ist **`1`**, wenn das dritte Argument weggelassen wird.

```
# the following loop prints "1 2 3 4"
for i in range(1,5):
    print(i, end=' ')

# the following loop prints "10 8 6 4 2"
for i in range(10, 0, -2):
    print(i, end=' ')
```

Methoden

- Der Keks-Rechner revisited

```
def readInt(prompt, atleast = 1):
  """Prompt for a number greater 0 (or min, if specified)"""
  number = 0;
  while number < atleast:
    number = int(input(prompt))
    if (number < atleast):
      print("Too small, pick a number larger than", atleast)
  return number

kids = readInt("Kids: ")
cookies = readInt("Cookies: ", atleast=kids)
print("Each Kid gets", cookies // kids, "cookies.")
print("Papa gets", cookies % kids, "cookies.")
```

Listen: Basisoperationen

- Elementzugriff (0-basiert): `a[2]` zeigt auf das dritte Element.
- Negative Indizes zählen von hinten!

```
a = [ 3, 7, 4]
print(a[-1]) # prints '4'
```

- Wert hinten hinzufügen: `a.append(12)`
- Test ob ein Element in einer Collection ist:

```
if 12 in a:
    print('12 is in the list, we just added it before')
```

- Anzahl Elemente in einer Collection: `len(a)`

Listen: Slicing

- Slicing: Teilbereiche addressieren: **`a[start:end]`**
- **`a`** und/oder **`b`** sind positive oder negative Indizes.
- **`end`** ist nicht inklusive

```
a = [ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
print(a[2:4])     # [3, 4]
print(a[3:-3])    # [4, 5, 6]
print(a[-3:-1]) # [7, 8]
print(a[5:])      # [6, 7, 8, 9]
print(a[:3])      # [1, 2, 3]
```

Dictionaries

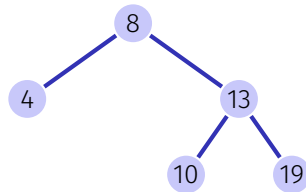
Dictionaries sind sehr wichtige primitive Datenstrukturen in Python

- Einfache und effiziente möglichkeit, mehrere Datenfelder zu benennen und zusammenzufassen
- Aufbau von hierarchischen Datenstrukturen durch Verschachtelung
- Zugriff auf Elemente mittels `[]` Operator

```
record = { 'Firstname': 'Hermann', 'Lastname':'Lehner',
                                'Salary': 420000, 'Mac User': True }
record['Salary'] = 450000
if record['Mac User']:
    print('... one more thing!')
```

Dynamische Datenstrukturen mit Dicts

```
tree = {
    'key': 8,
    'left' : {
        'key': 4, 'left' : None, 'right': None
    },
    'right': {
        'key': 13,
        'left' : {
            'key': 10, 'left' : None, 'right': None
        },
        'right': {
            'key': 19, 'left' : None, 'right': None
        }
    }
}
```



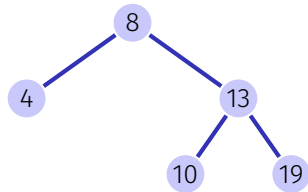
Dynamische Datenstrukturen mit Dicts

- Arbeiten mit Dicts (Beispiele)

```
l = tree['left'] # assign left subtree to variable l
l['key'] = 6    # changes key from 4 to 6

if l['left'] is None: # proper way to test against None
    print("There is no left child here...")
else:
    print("Value of left subtree is", l['left']['key']
```

Dynamische Datenstrukturen mit Klassen

```
class Node:
    def __init__(self, k, l=None, r=None):
        self.key, self.left, self.right = k, l, r
```




```
# create the tree depicted on the right
rightSubtree = Node(13, l=Node(10), r=Node(19))
tree = Node(8, l=Node(4), r=rightSubtree)

# an example query
print(tree.right.right.key) # prints: 19
```

Module

Python hat eine extrem grosse Anzahl Libraries in Form von Modulen, die importiert werden können.

- Importieren eines ganzen Modules:

```
import math
x = math.sqrt(4)
```

```
from math import *
x = sqrt(4)
```

- Importieren von Teilen eines Modules:

```
from datetime import date
t = date.today()
```

3. Weiterführende Python Konzepte

Eingebaute Funktionen, Bedingte Ausdrücke, List und Dict Comprehension, File IO, Fehlerbehandlung

Eingebaute Funktionen: Aufzählungen mit Index

Manchmal möchte man durch Listen iterieren, inklusive Index für jedes Element. Dies geht mit **`enumerate( ... )`**

```
data = [ 'Spam', 'Eggs', 'Ham' ]

for index, value in enumerate(data):
  print(index, ":", value)
```

Output:

```
0 : Spam
1 : Eggs
2 : Ham
```

Eingebaute Funktionen: Listen kombinieren

Es gibt eine einfache Möglichkeit, Listen element-weise zusammenzuführen (wie ein Reissverschluss!): **`zip( ... )`**

```
places = [ 'Zurich', 'Basel', 'Bern']
plz = [ 8000, 4000, 3000, ]

list(zip(places, plz)
# [('Zurich', 8000), ('Basel', 4000), ('Bern', 3000)]

dict(zip(places, plz)
# {'Zurich': 8000, 'Basel': 4000, 'Bern': 3000}
```

Bedingte Ausdrücke

In Python kann der Wert eines Ausdrucks von einer Bedingung abhaengen (als Teil des Ausdrucks!)

Beispiel: Collaz Folge

```
while a != 1:
    a = a // 2 if a % 2 == 0 else a * 3 +1
```

Beispiel: Textformatierung

```
print('I see', n, 'mouse' if n ==1 else 'mice')
```

List Comprehension

- Python bietet eine sehr angenehme Möglichkeit an, Listen deklarativ zu erstellen
- Ähnliche Denkweise wie bei ‘map’ und ‘filter’ bei funktionalen Sprachen

Beispiel: Eine Sequenz von Zahlen einlesen

```
line = input('Enter some numbers: ')
s_list = line.split()
n_list = [ int(x) for x in s_list ]
```

Das selbe kombiniert in einem Ausdruck

```
n_list = [ int(x) for x in input('Enter some numbers: ').split() ]
```

List Comprehension

Beispiel: Leerschläge vorne und hinten eliminieren

```
line = [ ' some eggs  ', ' slice of ham ', ' a lot of spam ' ]
cleaned = [ item.strip() for item in line ]

# cleaned == [ 'some eggs', 'slice of ham', 'a lot of spam' ]
```

Dict Comprehension

- Wie bei Listen, aber mit key/value Paaren

Beispiel: Daten extrahieren aus einem Dict

```
data = {
    'Spam' : { 'Amount' : 12, 'Price': 0.45 },
    'Eggs' : { 'Price': 0.8 },
    'Ham'  : { 'Amount': 5, 'Price': 1.20 }
}

total_prices = { item : record['Amount'] * record['Price']
    for item, record in data.items()
    if 'Amount' in record }

# total_prices == {'Spam': 5.4, 'Ham': 6.0}
```

File IO

- Files können mit dem Befehl **`open`** geöffnet werden.
- Damit Files automatisch wieder geschlossen werden, muss das innerhalb eines **`with`** Blocks geschehen.

Beispiel: CSV File einlesen

```
import csv

with open('times.csv', mode='r') as csv_file:
    csv_lines = csv.reader(csv_file)
    for line in csv_lines:
      # do something for each record
```

Schreiben geht ähnlich. Siehe Python Doku.

Ausnahmebehandlung

Gegeben folgender Code:

```
x = int(input('A number please: '))
```

Wenn keine Zahl eingegeben wird, stürzt das Programm ab:

```
Traceback (most recent call last):
  File "main.py", line 1, in <module>
    x = int(input('A number please: '))
ValueError: invalid literal for int() with base 10: 'a'
```

Wir können diesen Fehler auffangen und entsprechend reagieren.

Ausnahmebehandlung

```
try:
  x = int(input('A number please: '))
except ValueError:
  print('Oh boy, that was no number...')
  x = 0
print('x:', x)
```

Ausgabe, wenn **'spam'** eingegeben wird statt einer Zahl:

```
Oh boy, that was no number...
x: 0
```

4. Algorithmen und Datenstrukturen

Algorithmen und Datenstrukturen, Übersicht
[Cormen et al, Kap. 1; Ottman/Widmayer, Kap. 1.1]

Algorithmus

Algorithmus

Wohldefinierte Berechnungsvorschrift, welche aus Eingabedaten (**input**) Ausgabedaten (**output**) berechnet.

Beispielproblem: Sortieren

Input: Eine Folge von n Zahlen (vergleichbaren Objekten) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Output: Eine Permutation $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ der Folge $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n$

Mögliche Eingaben

$(1, 7, 3)$, $(15, 13, 12, -0.5)$, $(999, 998, 997, 996, \ldots, 2, 1)$, (1), $()$ …

Jedes Beispiel erzeugt eine **Probleminstanz**.

Die Performanz (Geschwindigkeit) des Algorithmus hängt üblicherweise ab von der Probleminstanz. Es gibt oft „gute" und "schlechte" Instanzen.

Daher betrachten wir Algorithmen manchmal **„im Durchschnitt"** und meist **„im schlechtesten Fall"**.

Beispiele für Probleme in der Algorithmik

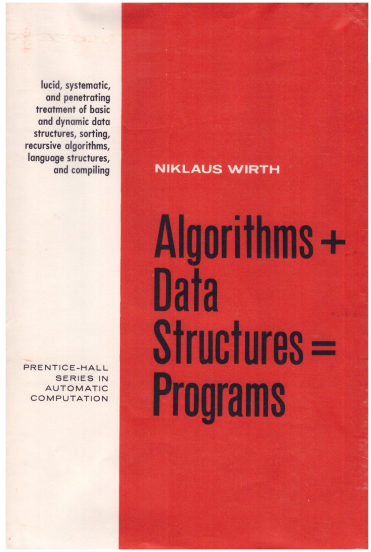
- Tabellen und Statistiken: Suchen, Auswählen und Sortieren
- Routenplanung: Kürzeste Wege Algorithmus, Heap Datenstruktur
- DNA Matching: Dynamic Programming
- Auswertungsreihenfolge: Topologische Sortierung
- Autovervollständigung: Wörterbücher/Bäume
- Schnelles Nachschlagen : Hash-Tabellen
- Der Handlungsreisende: Dynamische Programmierung, Minimal aufspannender Baum, Simulated Annealing,

Charakteristik

- Extrem grosse Anzahl potentieller Lösungen
- Praktische Anwendung

Datenstrukturen

- Eine Datenstruktur **organisiert Daten** so in einem Computer, dass man sie (in den darauf operierenden Algorithmen) **effizient nutzen** kann.
- Programme = Algorithmen + Datenstrukturen.



Effizienz

- Wären Rechner unendlich schnell und hätten unendlich viel Speicher ...
- ... dann bräuchten wir die Theorie der Algorithmen (nur) für Aussagen über Korrektheit (incl. Terminierung).

Realität: Ressourcen sind beschränkt und nicht umsonst:

- Rechenzeit $\rightarrow$ Effizienz
- Speicherplatz $\rightarrow$ Effizienz

Eigentlich geht es in diesem Kurs nur um Effizienz.

Schwierige Probleme

- NP-vollständige Probleme: Keine bekannte effiziente Lösung (Existenz einer effizienten Lösung ist zwar sehr unwahrscheinlich – es ist aber unbewiesen, dass es keine gibt!)
- Beispiel: Travelling Salesman Problem

In diesem Kurs beschäftigen wir uns *hauptsächlich* mit Problemen, die effizient (in Polynomialzeit) lösbar sind.

5. Effizienz von Algorithmen

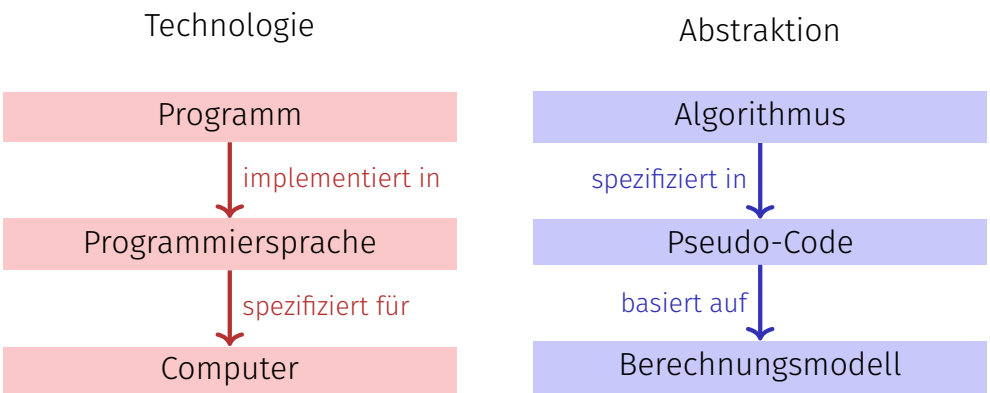
Effizienz von Algorithmen, Random Access Machine Modell, Funktionenwachstum, Asymptotik [Cormen et al, Kap. 2.2,3,4.2-4.4 | Ottman/Widmayer, Kap. 1.1]

Effizienz von Algorithmen

Ziele

- Laufzeitverhalten eines Algorithmus maschinenunabhängig quantifizieren.
- Effizienz von Algorithmen vergleichen.
- Abhängigkeit von der Eingabegrösse verstehen.

Programme und Algorithmen



Technologiemodell

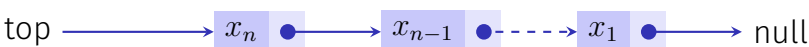
Random Access Machine (RAM) Model

- Ausführungsmodell: Instruktionen werden der Reihe nach (auf einem Prozessorkern) ausgeführt.
- Speichermodell: Konstante Zugriffszeit (grosses Array)
- Elementare Operationen: Rechenoperation ($+,-,\cdot,\ldots$) , Vergleichsoperationen, Zuweisung / Kopieroperation auf Maschinenworten (Registern), Flusskontrolle (Sprünge)
- Einheitskostenmodell: elementare Operation hat Kosten 1.
- Datentypen: Fundamentaltypen wie grössenbeschränkte Ganzzahl oder Fliesskommazahl.

Für dynamische Datenstrukturen

Pointer Machine Modell

- Objekte beschränkter Grösse können dynamisch erzeugt werden in konstanter Zeit 1.
- Auf Felder (mit Wortgrösse) der Objekte kann in konstanter Zeit 1 zugegriffen werden.



Asymptotisches Verhalten

Genaue Laufzeit eines Algorithmus lässt sich selbst für kleine Eingabedaten kaum voraussagen.

- Betrachten das asymptotische Verhalten eines Algorithmus.
- Ignorieren alle konstanten Faktoren.

Eine Operation mit Kosten 20 ist genauso gut wie eine mit Kosten 1. Lineares Wachstum mit Steigung 5 ist genauso gut wie lineares Wachstum mit Steigung 1.

Algorithmen, Programme und Laufzeit

Programm: Konkrete Implementation eines Algorithmus.

Laufzeit des Programmes: messbarer Wert auf einer konkreten Maschine. Kann sowohl nach oben, wie auch nach unten abgeschätzt werden.

Example 1

Rechner mit 3 GHz. Maximale Anzahl Operationen pro Taktzyklus (z.B. 8). $\Rightarrow$ untere Schranke.

Einzelne Operation dauert mit Sicherheit nie länger als ein Tag $\Rightarrow$ obere Schranke.

Hinsichtlich des *asymptotischen Verhaltens* des Programmes spielen die Schranken keine Rolle.

5.2 Funktionenwachstum

$\mathcal{O}$, Θ, Ω [Cormen et al, Kap. 3; Ottman/Widmayer, Kap. 1.1]

Oberflächlich

Verwende die asymptotische Notation zur Kennzeichnung der Laufzeit von Algorithmen

Wir schreiben $\Theta(n^2)$ und meinen, dass der Algorithmus sich für grosse n wie n^2 verhält: verdoppelt sich die Problemgrösse, so vervierfacht sich die Laufzeit.

Genauer: Asymptotische obere Schranke

Gegeben: Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Definition:[1]

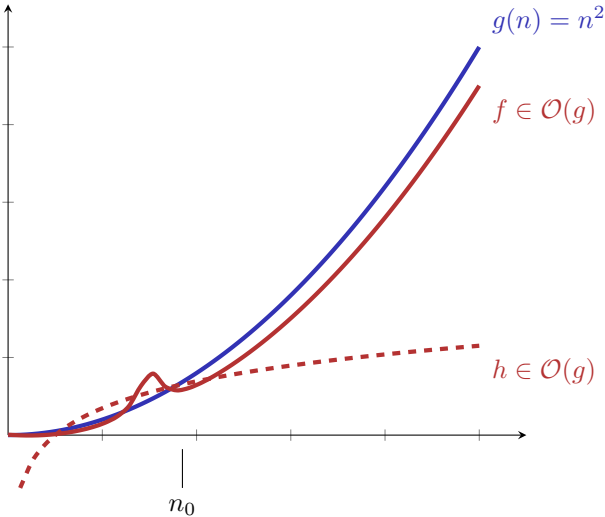
$$\begin{aligned}\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \\ \exists\, c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \\ \forall\, n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}\end{aligned}$$

Schreibweise:

$$\mathcal{O}(g(n)) := \mathcal{O}(g(\cdot)) = \mathcal{O}(g).$$

[1] Ausgesprochen: Menge aller reellwertiger Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ für die gilt: es gibt ein (reellwertiges) $c > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $0 \leq f(n) \leq n \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Anschauung

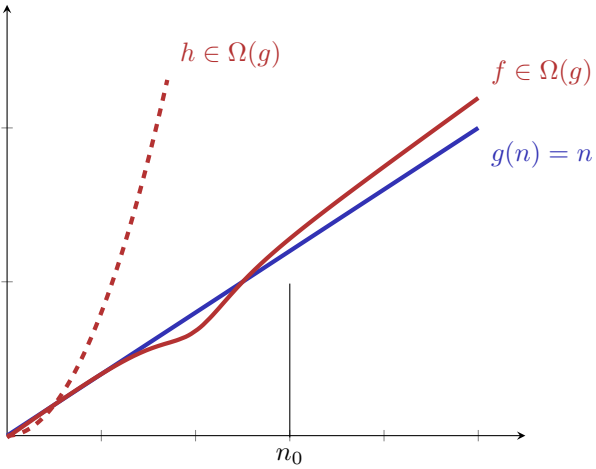


Umkehrung: Asymptotische untere Schranke

Gegeben: Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Definition:

$$\begin{aligned}\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \\ \exists\, c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \\ \forall\, n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}\end{aligned}$$

Beispiel



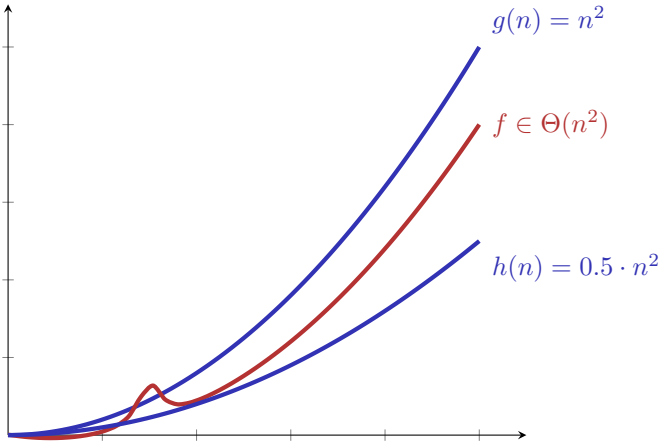
Asymptotisch scharfe Schranke

Gegeben Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Definition:

$$\Theta(g) := \Omega(g) \cap \mathcal{O}(g).$$

Einfache, geschlossene Form: Übung.

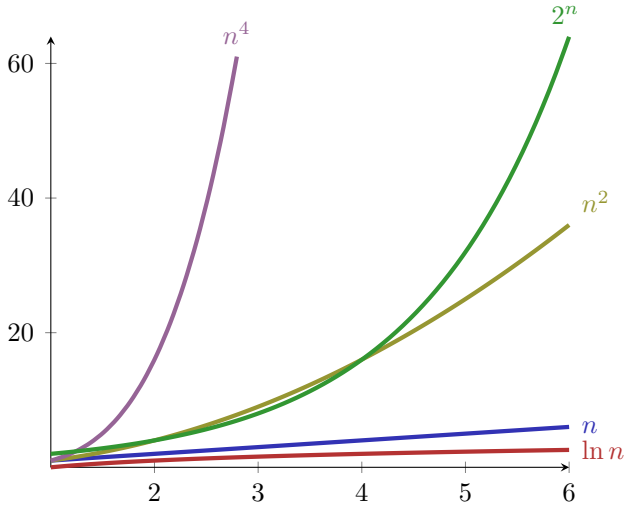
Beispiel



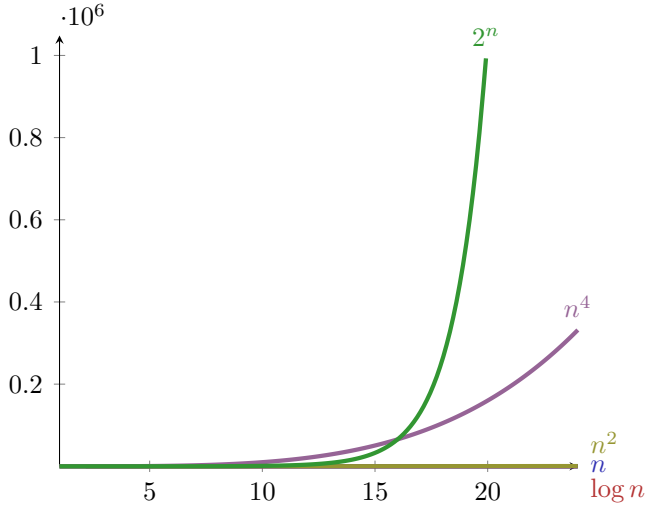
Wachstumsbezeichnungen

$\mathcal{O}(1)$	beschränkt	Array-Zugriff
$\mathcal{O}(\log \log n)$	doppelt logarithmisch	Binäre sortierte Suche interpoliert
$\mathcal{O}(\log n)$	logarithmisch	Binäre sortierte Suche
$\mathcal{O}(\sqrt{n})$	wie die Wurzelfunktion	Primzahltest (naiv)
$\mathcal{O}(n)$	linear	Unsortierte naive Suche
$\mathcal{O}(n \log n)$	superlinear / loglinear	Gute Sortieralgorithmen
$\mathcal{O}(n^2)$	quadratisch	Einfache Sortieralgorithmen
$\mathcal{O}(n^c)$	polynomial	Matrixmultiplikation
$\mathcal{O}(2^n)$	exponentiell	Travelling Salesman Dynamic Programming
$\mathcal{O}(n!)$	faktoriell	Travelling Salesman naiv

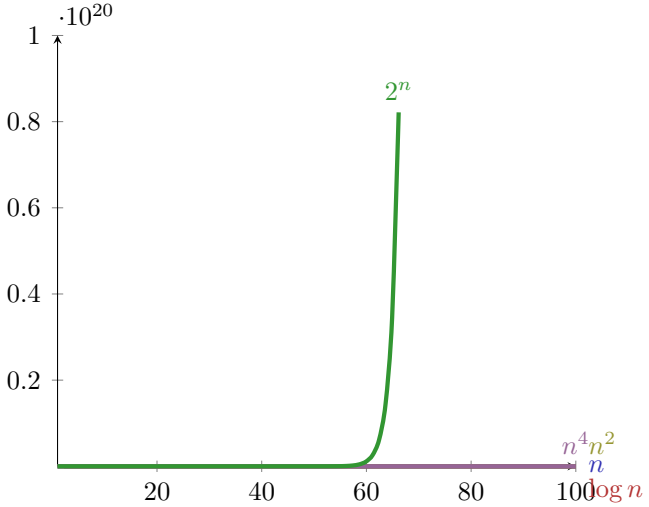
Kleine n



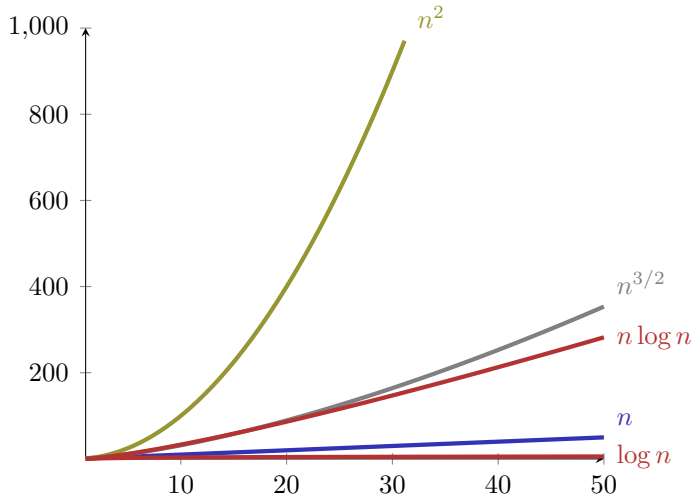
Grössere n



“Grosse” n



Logarithmen!



Zeitbedarf

Annahme: 1 Operation = $1\mu s$.

Problemgrösse	1	100	10000	10^6	10^9
$\log_2 n$	$1\mu s$	$7\mu s$	$13\mu s$	$20\mu s$	$30\mu s$
n	$1\mu s$	$100\mu s$	$1/100s$	$1s$	17 Minuten
$n \log_2 n$	$1\mu s$	$700\mu s$	$13/100\mu s$	$20s$	8.5 Stunden
n^2	$1\mu s$	$1/100s$	1.7 Minuten	11.5 Tage	317 Jahrhund.
2^n	$1\mu s$	10^{14} Jahrh.	$\approx \infty$	$\approx \infty$	$\approx \infty$

Nützliches

Theorem 2

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ zwei Funktionen. Dann gilt:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{O}(g)$, $\mathcal{O}(f) \subsetneq \mathcal{O}(g)$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C > 0$ (C *konstant*) $\Rightarrow f \in \Theta(g)$.
3. $\frac{f(n)}{g(n)} \underset{n\to\infty}{\to} \infty \Rightarrow g \in \mathcal{O}(f)$, $\mathcal{O}(g) \subsetneq \mathcal{O}(f)$.

Zur Notation

Übliche informelle Schreibweise

$$f = \mathcal{O}(g)$$

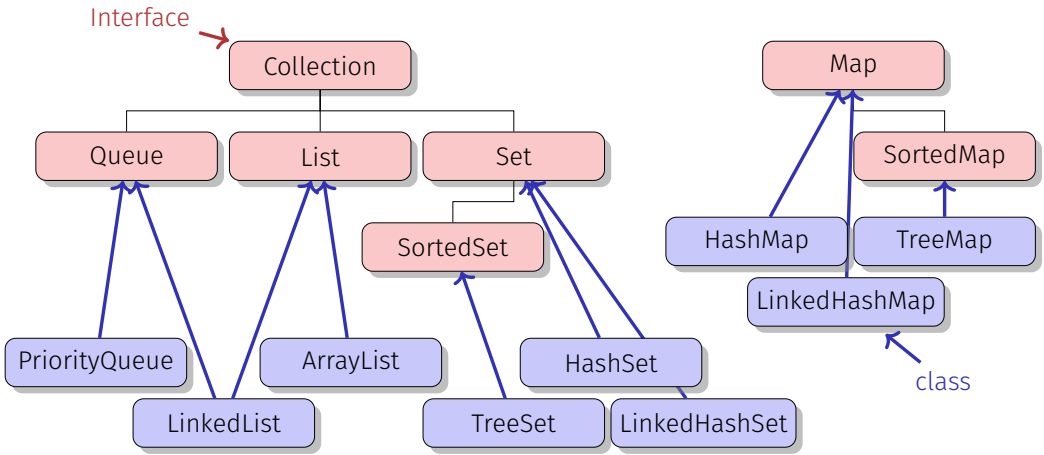
ist zu verstehen als $f \in \mathcal{O}(g)$.
Es gilt nämlich

$$f_1 = \mathcal{O}(g), f_2 = \mathcal{O}(g) \not\Rightarrow f_1 = f_2!$$

$n = \mathcal{O}(n^2), n^2 = \mathcal{O}(n^2)$ aber natürlich $n \neq n^2$.

Wir vermeiden die informelle „=" Schreibweise, wo sie zu Mehrdeutigkeiten führen könnte.

Erinnerung: Java Collections / Maps

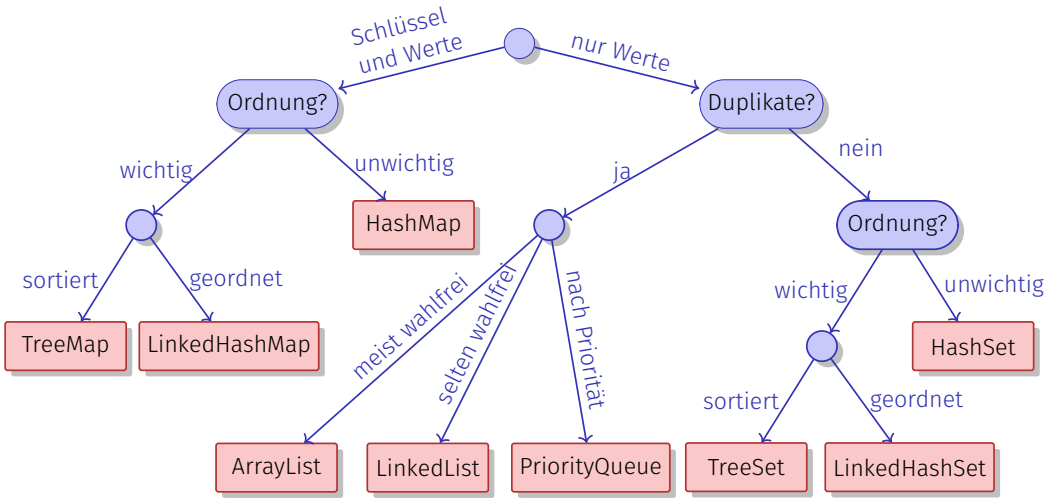


`ArrayList` versus `LinkedList`

Laufzeitmessungen für 10000 Operationen (auf [code]expert)

	`ArrayList`	`LinkedList`
Einfügen am Ende	$469\mu s$	$1787\mu s$
Einfügen am Anfang	$37900\mu s$	$761\mu s$
Iterieren	$1840\mu s$	$2050\mu s$
Wahlfreier Zugriff	$426\mu s$	$110600\mu s$
Einfügen in der Mitte	31ms	301ms
Enthält (erfolgreich)	38ms	141ms
Enthält (erfolglos)	228ms	1080ms
Entfernen am Ende	$648\mu s$	$757\mu s$
Entfernen am Anfang	$58075\mu s$	$609\mu s$

Erinnerung: Entscheidungshilfe



Asymptotische Laufzeiten (Java)

Mit unserer neuen Sprache $(\Omega, \mathcal{O}, \Theta)$ können wir das **Verhalten der Datenstrukturen und ihrer Algorithmen präzisieren.**

Asymptotische Laufzeiten (Vorgriff!)

Datenstruktur	Wahlfreier Zugriff	Einfügen	Nächstes	Einfügen nach Element	Suchen
`ArrayList`	$\Theta(1)$	$\Theta(1)\,A$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
`LinkedList`	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$
`TreeSet`	–	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	–	$\Theta(\log n)$
`HashSet`	–	$\Theta(1)\,P$	–	–	$\Theta(1)\,P$

A= amortisiert, P= erwartet, sonst schlechtester Fall („worst case”)

Asymptotische Laufzeiten (Python)

Asymptotische Laufzeiten

Datenstruktur	Wahlfreier Zugriff	Einfügen	Iteration	Einfügen nach Element	Suchen `x in S`
`list`	$\Theta(1)$	$\Theta(1)\,A$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
`set`	–	$\Theta(1)\,P$	$\Theta(n)$	–	$\Theta(1)\,P$
`dict`	–	$\Theta(1)\,P$	$\Theta(n)$	–	$\Theta(1)\,P$

A= amortisiert, P= erwartet, sonst schlechtester Fall („worst case”)

6. Suchen

Lineare Suche, Binäre Suche [Ottman/Widmayer, Kap. 3.2, Cormen et al, Kap. 2: Problems 2.1-3,2.2-3,2.3-5]

Das Suchproblem

Gegeben

- Menge von Datensätzen.

  Telefonverzeichnis, Wörterbuch, Symboltabelle

- Jeder Datensatz hat einen Schlüssel k.
- Schlüssel sind vergleichbar: eindeutige Antwort auf Frage $k_1 \leq k_2$ für Schlüssel k_1, k_2.

Aufgabe: finde Datensatz nach Schlüssel k.

Suche in Array

Gegeben

- Array A mit n Elementen $(A[1], \ldots, A[n])$.
- Schlüssel b

Gesucht: Index k, $1 \leq k \leq n$ mit $A[k] = b$ oder "nicht gefunden".

22	20	32	10	35	24	42	38	28	41
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

- **Bestenfalls** 1 Vergleich.
- **Schlimmstenfalls** n Vergleiche.

Suche im sortierten Array

Gegeben

- Sortiertes Array A mit n Elementen $(A[1], \ldots, A[n])$ mit $A[1] \leq A[2] \leq \cdots \leq A[n]$.
- Schlüssel b

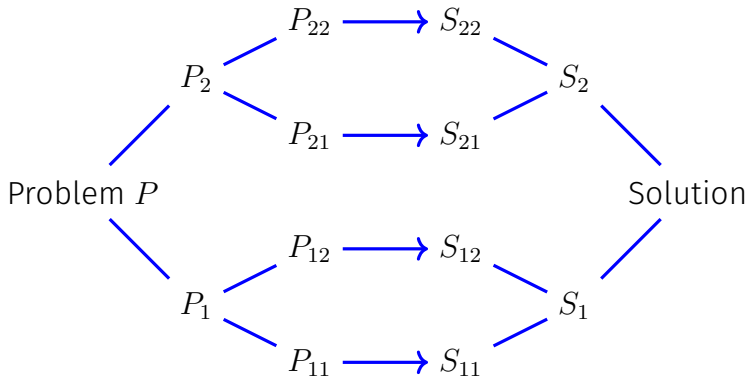
Gesucht: Index k, $1 \leq k \leq n$ mit $A[k] = b$ oder "nicht gefunden".

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

divide et impera

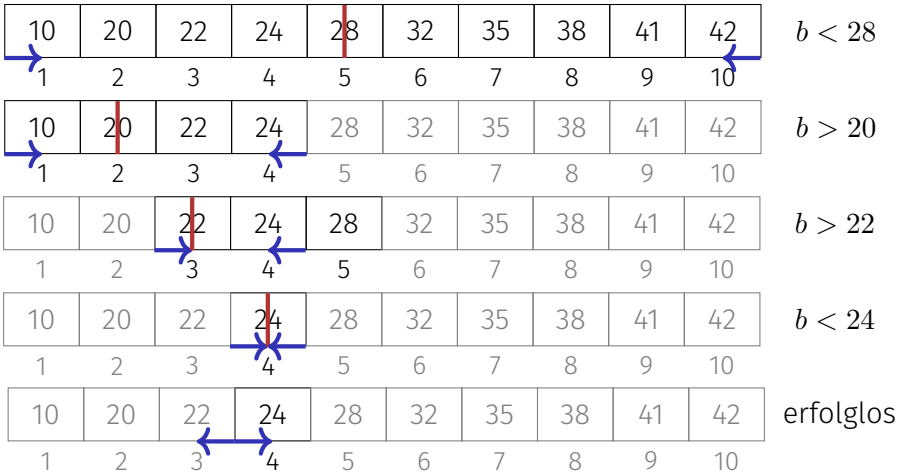
Teile und (be)herrsche (engl. divide and conquer)

Zerlege das Problem in Teilprobleme, deren Lösung zur vereinfachten Lösung des Gesamtproblems beitragen.



Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.



Binärer Suchalgorithmus BSearch(A, l, r, b)

Input: Sortiertes Array A von n Schlüsseln. Schlüssel b. Bereichsgrenzen $1 \leq l, r \leq n$ mit $l \leq r$ oder $l = r + 1$.

Output: Index $m \in [l, \ldots, r + 1]$, so dass $A[i] \leq b$ für alle $l \leq i < m$ und $A[i] \geq b$ für alle $m < i \leq r$.

$m \leftarrow \lfloor (l + r)/2 \rfloor$
if $l > r$ **then** // erfolglose Suche
  return I
else if $b = A[m]$ **then**// gefunden
  return m
else if $b < A[m]$ **then**// Element liegt links
  return BSearch$(A, l, m - 1, b)$
else // $b > A[m]$: Element liegt rechts
  return BSearch$(A, m + 1, r, b)$

Analyse (schlechtester Fall)

Rekurrenz ($n = 2^k$)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Teleskopieren: [2]

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + c = T\left(\frac{n}{4}\right) + 2c = ... \\ &= T\left(\frac{n}{2^i}\right) + i \cdot c \\ &= T\left(\frac{n}{n}\right) + \log_2 n \cdot c = d + c \cdot \log_2 n \in \Theta(\log n) \end{aligned}$$

[2] Versuche eine geschlossene Form zu finden, indem die Rekurrenz, ausgehend von $T(n)$, wiederholt eingesetzt wird.

Resultat

Theorem 3

Der Algorithmus zur binären sortierten Suche benötigt $\Theta(\log n)$ Elementarschritte.

Iterativer binärer Suchalgorithmus

Input: Sortiertes Array A von n Schlüsseln. Schlüssel b.
Output: Index des gefundenen Elements. 0, wenn erfolglos.

$l \leftarrow 1$; $r \leftarrow n$
while $l \leq r$ **do**
    $m \leftarrow \lfloor (l + r)/2 \rfloor$
    if $A[m] = b$ **then**
        return m
    else if $A[m] < b$ **then**
        $l \leftarrow m + 1$
    else
        $r \leftarrow m - 1$
return *NotFound*;

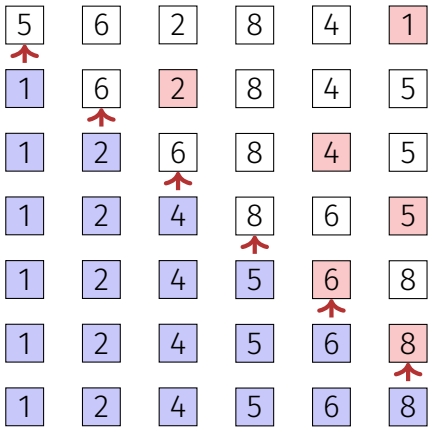
7. Sortieren

Einfache Sortierverfahren, Quicksort, Mergesort

Problemstellung

Eingabe: Ein Array $A = (A[1], ..., A[n])$ der Länge n.
Ausgabe: Eine Permutation A' von A, die sortiert ist: $A'[i] \leq A'[j]$ für alle $1 \leq i \leq j \leq n$.

Sortieren durch Auswahl



- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.
- Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.
- Unsortierter Teil wird ein Element kleiner ($i \to i+1$). Wiederhole bis alles sortiert. ($i = n$)

Algorithmus: Sortieren durch Auswahl

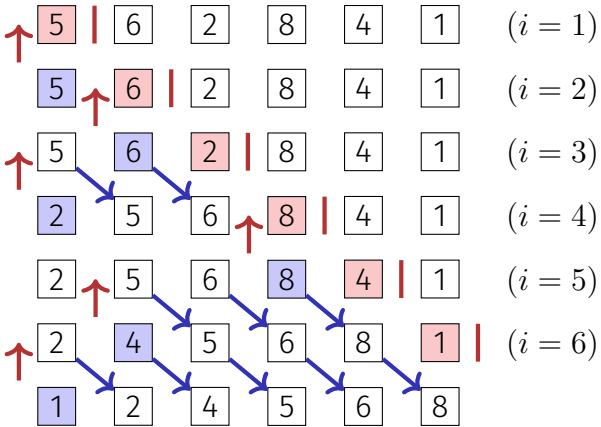
Input: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
Output: Sortiertes Array A

```
for i ← 1 to n − 1 do
    p ← i
    for j ← i + 1 to n do
        if A[j] < A[p] then
            p ← j;
    swap(A[i], A[p])
```

Analyse

Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall: $\Theta(n^2)$.
Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall: $n - 1 = \Theta(n)$

Sortieren durch Einfügen



- Iteratives Vorgehen: $i = 1...n$
- Einfügeposition für Element i bestimmen.
- Element i einfügen, ggfs. Verschiebung nötig.

Sortieren durch Einfügen

Welchen Nachteil hat der Algorithmus im Vergleich zum Sortieren durch Auswahl?

Im schlechtesten Fall viele Elementverschiebungen.

Welchen Vorteil hat der Algorithmus im Vergleich zum Sortieren durch Auswahl?

Der Suchbereich (Einfügebereich) ist bereits sortiert. Konsequenz: binäre Suche möglich.

Algorithmus: Sortieren durch Einfügen

Input: Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
Output: Sortiertes Array A

```
for i ← 2 to n do
    x ← A[i]
    p ← BinarySearch(A, 1, i − 1, x); // Kleinstes p ∈ [1, i] mit A[p] ≥ x
    for j ← i − 1 downto p do
        A[j + 1] ← A[j]
    A[p] ← x
```

7.1 Mergesort

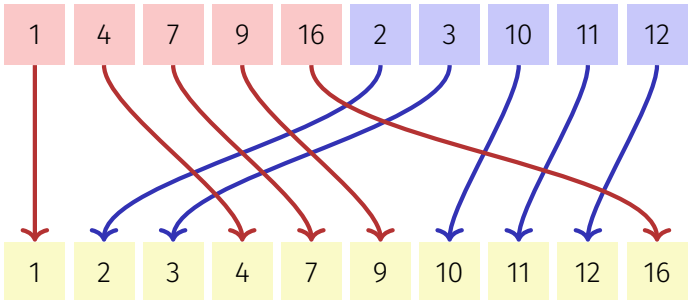
[Ottman/Widmayer, Kap. 2.4, Cormen et al, Kap. 2.3],

Mergesort (Sortieren durch Verschmelzen)

Divide and Conquer!

- Annahme: Zwei Hälften eines Arrays A bereits sortiert.
- Folgerung: Minimum von A kann mit 2 Vergleichen ermittelt werden.
- Iterativ: Füge die beiden vorsortierten Hälften von A zusammen in $\mathcal{O}(n)$.

Merge

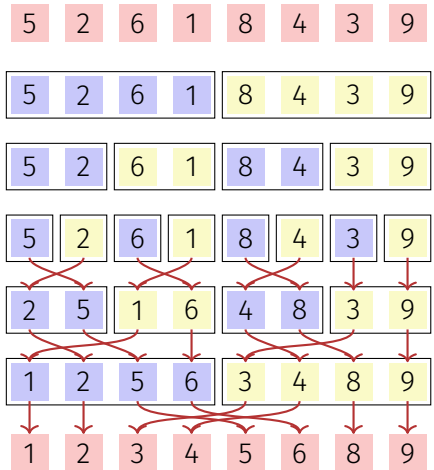


Algorithmus `Merge`(A, l, m, r)

Input: Array A der Länge n, Indizes $1 \leq l \leq m \leq r \leq n$.
$A[l, \ldots, m]$, $A[m+1, \ldots, r]$ sortiert
Output: $A[l, \ldots, r]$ sortiert

```
1 B ← new Array(r − l + 1)
2 i ← l; j ← m + 1; k ← 1
3 while i ≤ m and j ≤ r do
4     if A[i] ≤ A[j] then B[k] ← A[i]; i ← i + 1
5     else B[k] ← A[j]; j ← j + 1
6     k ← k + 1;
7 while i ≤ m do B[k] ← A[i]; i ← i + 1; k ← k + 1
8 while j ≤ r do B[k] ← A[j]; j ← j + 1; k ← k + 1
9 for k ← l to r do A[k] ← B[k − l + 1]
```

Mergesort



Split

Split

Split

Merge

Merge

Merge

Algorithmus (Rekursives 2-Wege) `Mergesort`(A, l, r)

Input: Array A der Länge n. $1 \leq l \leq r \leq n$
Output: $A[l, \ldots, r]$ sortiert.

if $l < r$ **then**

```
m ← ⌊(l + r)/2⌋          // Mittlere Position
Mergesort(A, l, m)       // Sortiere vordere Hälfte
Mergesort(A, m + 1, r)   // Sortiere hintere Hälfte
Merge(A, l, m, r)        // Verschmelzen der Teilfolgen
```

Analyse

Rekursionsgleichung für die Anzahl Vergleiche und Schlüsselbewegungen:

$$T(n) = T(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) + T(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + \Theta(n) \in \Theta(n \log n)$$

Herleitung für $n = 2^k$

Sei $n = 2^k$, $k > 0$. Rekurrenz

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

Teleskopieren

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + cn = 2(2T(n/4) + cn/2) + cn \\ &= 2(2(T(n/8) + cn/4) + cn/2) + cn = ... \\ &= 2(2(...(2(2T(n/2^k) + cn/2^{k-1})...) + cn/2^2) + cn/2^1) + cn \\ &= 2^k T(1) + \underbrace{2^{k-1}cn/2^{k-1} + 2^{k-2}cn/2^{k-2} + ... + 2^{k-k}cn/2^{k-k}}_{k\text{Terme}} \\ &= nd + cnk = nd + cn\log_2 n \in \Theta(n \log n). \end{aligned}$$

7.2 Quicksort

[Ottman/Widmayer, Kap. 2.2, Cormen et al, Kap. 7]

Quicksort

Was ist der Nachteil von Mergesort?

Benötigt zusätzlich $\Theta(n)$ Speicherplatz für das Verschmelzen.

Wie könnte man das Verschmelzen einsparen?

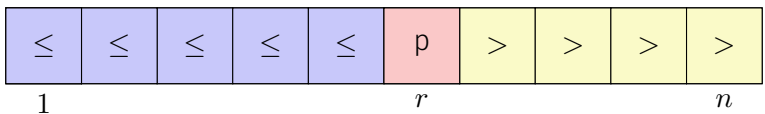
Sorge dafür, dass jedes Element im linken Teil kleiner ist als im rechten Teil.

Wie?

Pivotieren und Aufteilen!

Pivotieren

1. Wähle ein (beliebiges) Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf: einen Teil L der Elemente mit $A[i] \leq p$ und einen Teil R der Elemente mit $A[i] > p$.
3. Quicksort: Rekursion auf Teilen L und R



Algorithmus `Partition`(A, l, r, p)

Input: Array A, welches den Pivot p in $A[l, \ldots, r]$ mindestens einmal enthält.
Output: Array A partitioniert in $A[l, \ldots, r]$ um p. Rückgabe der Position von p.

while $l \leq r$ **do**
    while $A[l] < p$ **do**
        $l \leftarrow l + 1$
    while $A[r] > p$ **do**
        $r \leftarrow r - 1$
    swap$(A[l], A[r])$
    if $A[l] = A[r]$ **then**
        $l \leftarrow l + 1$

return l-1

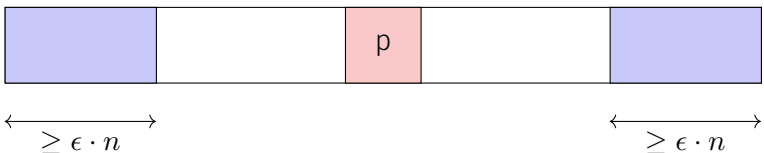
Algorithmus `Quicksort`(A, l, r)

Input: Array A der Länge n. $1 \leq l \leq r \leq n$.
Output: Array A, sortiert in $A[l, \ldots, r]$.
if $l < r$ **then**
    Wähle Pivot $p \in A[l, \ldots, r]$
    $k \leftarrow$ `Partition`(A, l, r, p)
    `Quicksort`$(A, l, k-1)$
    `Quicksort`$(A, k+1, r)$

Wahl des Pivots

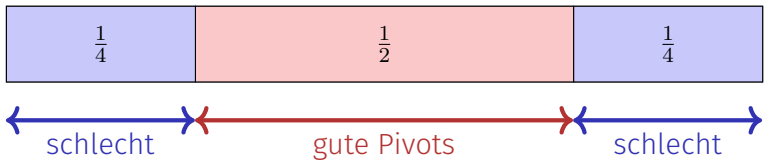
Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(n^2)$

Ein guter Pivot hat linear viele Elemente auf beiden Seiten.



Wahl des Pivots?

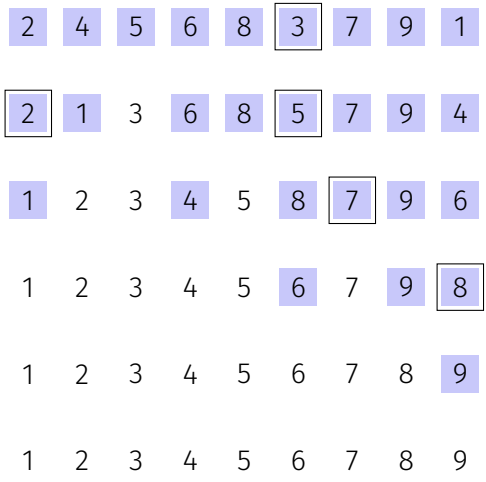
Der Zufall hilft uns (Tony Hoare, 1961). Wähle in jedem Schritt einen zufälligen Pivot.



Wahrscheinlichkeit für guten Pivot nach einem Versuch: $\frac{1}{2} =: \rho$.
Wahrscheinlichkeit für guten Pivot nach k Versuchen: $(1-\rho)^{k-1} \cdot \rho$.
Erwartete Anzahl Versuche[3]: $1/\rho = 2$

[3] Erwartungswert der geometrischen Verteilung:

Quicksort (willkürlicher Pivot)



Analyse: Anzahl Vergleiche

Schlechtester Fall. Pivotelement = Minimum oder Maximum; Anzahl Vergleiche:

$$T(n) = T(n-1) + c \cdot n,\ T(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(n) \in \Theta(n^2)$$

Analyse (Randomisiertes Quicksort)

Theorem 4

Im Mittel benötigt randomisiertes Quicksort $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ Vergleiche.

(ohne Beweis.)

Praktische Anmerkungen

- Für den Pivot wird in der Praxis oft der Median von drei Elementen genommen. Beispiel: Median3$(A[l], A[r], A[\lfloor l + r/2 \rfloor])$.

8. Natürliche Suchbäume

[Ottman/Widmayer, Kap. 5.1, Cormen et al, Kap. 12.1 - 12.3]

Bäume

Bäume sind

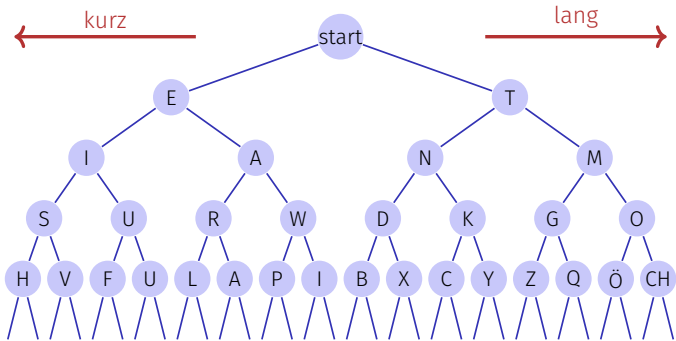
- Verallgemeinerte Listen: Knoten können mehrere Nachfolger haben
- Spezielle Graphen: Graphen bestehen aus Knoten und Kanten. Ein Baum ist ein zusammenhängender, gerichteter, azyklischer Graph.

Bäume

Verwendung

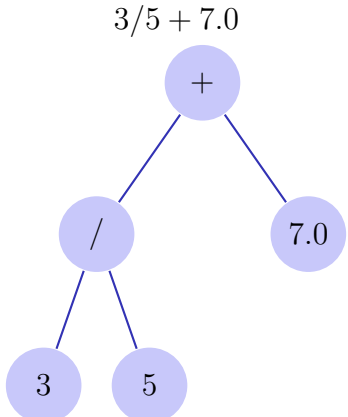
- Entscheidungsbäume: Hierarchische Darstellung von Entscheidungsregeln
- Syntaxbäume: Parsen und Traversieren von Ausdrücken, z.B. in einem Compiler
- Codebäume: Darstellung eines Codes, z.B. Morsealphabet, Huffmann Code
- Suchbäume: ermöglichen effizientes Suchen eines Elementes

Beispiele



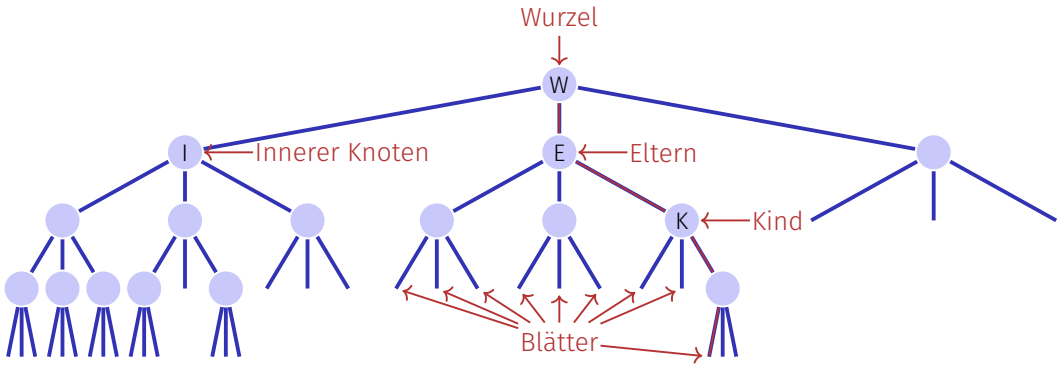
Morsealphabet

Beispiele



Ausdrucksbaum

Nomenklatur



- Ordnung des Baumes: Maximale Anzahl Kindknoten, hier: 3
- Höhe des Baumes: maximale Pfadlänge Wurzel – Blatt (hier: 4)

Binäre Bäume

Ein binärer Baum ist

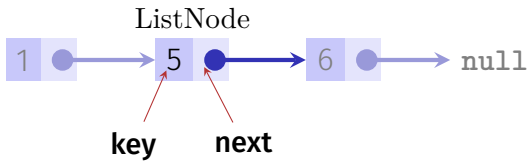
- entweder ein Blatt, d.h. ein leerer Baum,
- oder ein innerer Knoten mit zwei Bäumen T_l (linker Teilbaum) und T_r (rechter Teilbaum) als linken und rechten Nachfolger.

In jedem inneren Knoten **v** wird gespeichert

- ein Schlüssel **v.key** und
- zwei Zeiger **v.left** und **v.right** auf die Wurzeln der linken und rechten Teilbäume.

Ein Blatt wird durch den **null**-Zeiger repräsentiert

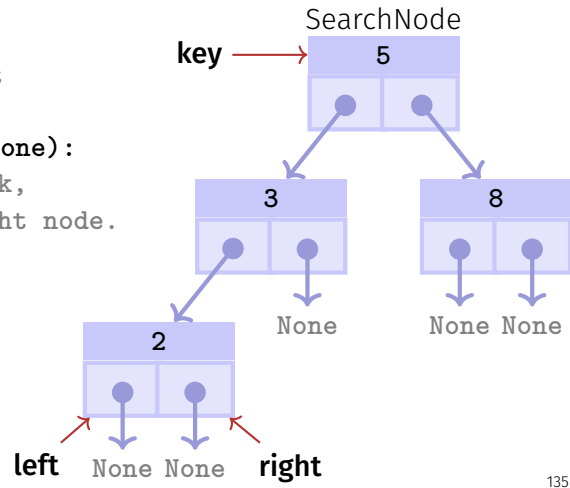
Listknoten in Python




```
class ListNode:
   # entries key, next implicit via constructor

  def __init__(self, key , next = None):
    """Constructor that takes a key and, optionally, next."""
    self.key = key
    self.next = next
}
```

Jetzt: Baumknoten in Python

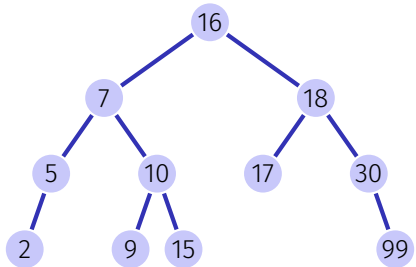
```
class SearchNode:
# implicit entries key, left, right

  def __init__(self, k, l=None, r=None):
    # Constructor that takes a key k,
    # and optionally a left and right node.
    self.key = k
    self.left, self.right = l, r
```



Binärer Suchbaum

Ein **binärer Suchbaum** ist ein binärer Baum, der die **Suchbaumeigenschaft** erfüllt:

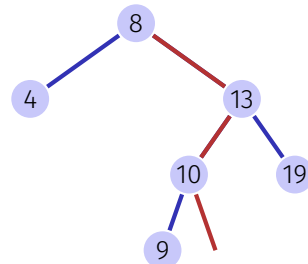
- Jeder Knoten `v` speichert einen Schlüssel
- Schlüssel im linken Teilbaum `v.left` kleiner als `v.key`
- Schlüssel im rechten Teilbaum `v.right` grösser als `v.key`



Suchen

Input: Binärer Suchbaum mit Wurzel r,
Schlüssel k
Output: Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

$v \leftarrow r$
while $v \neq$ **null do**
  if $k = v.\text{key}$ **then**
    return v
  else if $k < v.\text{key}$ **then**
    $v \leftarrow v.\text{left}$
  else
    $v \leftarrow v.\text{right}$
return null



Search (12) → **null**

Suchen in Python

```
def findNode(root, key):
    n = root
    while n != None and n.key != key:
        if key < n.key:
            n = n.left
        else:
            n = n.right
    return n
```

Höhe eines Baumes

Die Höhe $h(T)$ eines binären Baumes T mit Wurzel r ist gegeben als

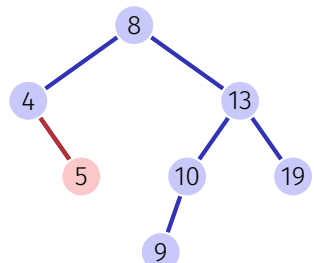
$$h(r) = \begin{cases} 0 & \text{falls } r = \textbf{null} \\ 1 + \max\{h(r.\text{left}), h(r.\text{right})\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Laufzeit der Suche ist somit im schlechtesten Fall $\mathcal{O}(h(T))$

Einfügen eines Schlüssels

Einfügen des Schlüssels k

- Suche nach k.
- Wenn erfolgreich: z.B. Fehlerausgabe
- Wenn erfolglos: Einfügen des Schlüssels am erreichten Blatt.



Knoten Einfügen in Python

```
def addNode(root, key):
  n = root
  if n == None:
    root = Node(key)
  while n.key != key:
    if key < n.key:
      if n.left == None:
        n.left = Node(key)
      n = n.left
    else:
      if n.right == None:
        n.right = Node(key)
      n = n.right
  return root
```

Tree in Python

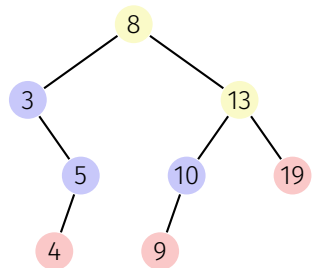
```
class Tree:
    def __init__(self):
        self.root = None

    def find(self,key):
        return findNode(self.root, key)

    def has(self,key):
        return self.find(key) != None

    def add(self,key):
        self.root = addNode(self.root, key)

    # ....
```

Knoten entfernen

Drei Fälle möglich

- Knoten hat keine Kinder
- Knoten hat ein Kind
- Knoten hat zwei Kinder

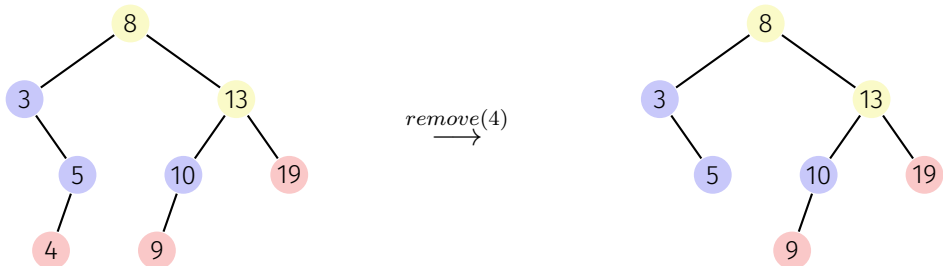
[Blätter zählen hier nicht]



Knoten entfernen

Knoten hat keine Kinder

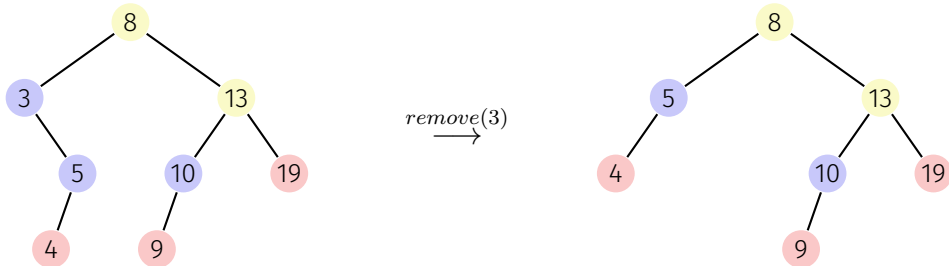
Einfacher Fall: Knoten durch Blatt ersetzen.



Knoten entfernen

Knoten hat ein Kind

Auch einfach: Knoten durch das einzige Kind ersetzen.



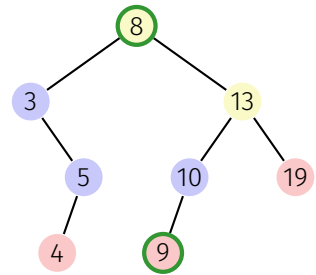
Knoten entfernen

Knoten `v` hat zwei Kinder

Beobachtung: Der kleinste Schlüssel im rechten Teilbaum `v.right` (der **symmetrische Nachfolger** von `v`)

- ist kleiner als alle Schlüssel in `v.right`
- ist grösser als alle Schlüssel in `v.left`
- und hat kein linkes Kind.

Lösung: ersetze `v` durch seinen symmetrischen Nachfolger

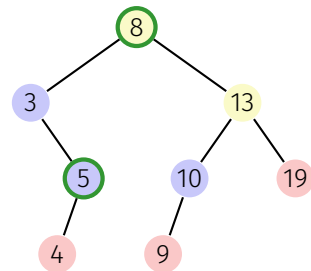


Aus Symmetriegründen...

Knoten $\mathbf{v}$ hat zwei Kinder

Auch möglich: ersetze $\mathbf{v}$ durch seinen symmetrischen Vorgänger

Implementation: der Teufel steckt im Detail!

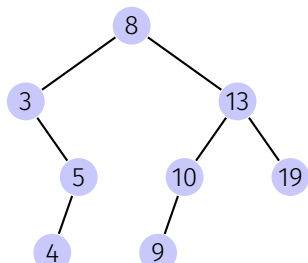


Algorithmus SymmetricSuccessor(v)

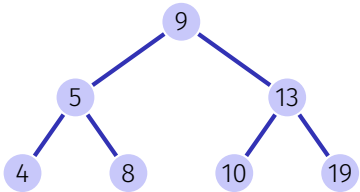
Input: Knoten v eines binären Suchbaumes
Output: Symmetrischer Nachfolger von v
$w \leftarrow v.\text{right}$
$x \leftarrow w.\text{left}$
while $x \neq$ **null do**
    $w \leftarrow x$
    $x \leftarrow x.\text{left}$
return w

Traversierungsarten

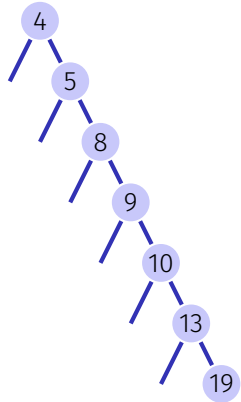
- Hauptreihenfolge (preorder): v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- Nebenreihenfolge (postorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v.
  4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8
- Symmetrische Reihenfolge (inorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann v, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 19



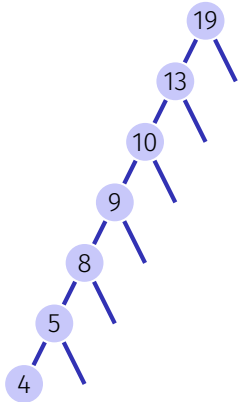
Degenerierte Suchbäume



Insert 9,5,13,4,8,10,19
bestmöglich
balanciert



Insert 4,5,8,9,10,13,19
Lineare Liste



Insert 19,13,10,9,8,5,4
Lineare Liste

Probabilistisch

Ein Suchbaum, welcher aus einer zufälligen Sequenz von Zahlen erstellt wird hat erwartete Pfadlänge von $\mathcal{O}(\log n)$.

Achtung: das gilt nur für Einfügeoperation. Wird der Baum zufällig durch Einfügen und Entfernen gebildet, ist die erwartete Pfadlänge $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.

Balancierte Bäume stellen beim Einfügen und Entfernen (z.B. durch *Rotationen*) sicher, dass der Baum balanciert bleibt und liefern eine $\mathcal{O}(\log n)$ Worst-Case-Garantie.

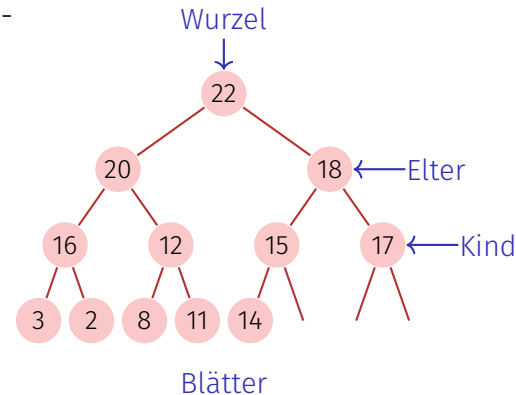
9. Heaps

Datenstruktur optimiert zum schnellen Extrahieren von Minimum oder Maximum und Sortieren. [Ottman/Widmayer, Kap. 2.3, Cormen et al, Kap. 6]

[Max-]Heap*

Binärer Baum mit folgenden Eigenschaften

1. vollständig, bis auf die letzte Ebene
2. Lücken des Baumes in der letzten Ebene höchstens rechts.
3. **Heap-Bedingung:**
   Max-(Min-)Heap: Schlüssel eines Kindes kleiner (grösser) als der des Elternknotens

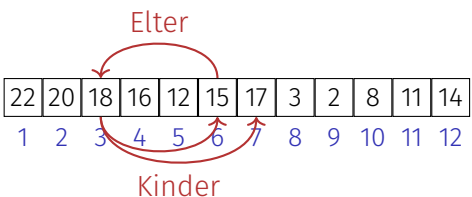


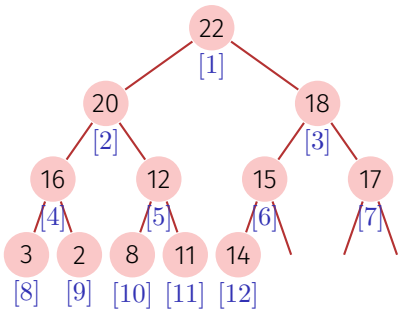
*Heap (Datenstruktur), nicht: wie in “Heap und Stack” (Speicherallokation)

Heap als Array

Baum → Array:

- Kinder$(i) = \{2i, 2i+1\}$
- Elter$(i) = \lfloor i/2 \rfloor$





Abhängig von Startindex![4]

[4] **Für Arrays, die bei 0 beginnen:** $\{2i, 2i+1\} \to \{2i+1, 2i+2\}$, $\lfloor i/2 \rfloor \to \lfloor (i-1)/2 \rfloor$

Höhe eines Heaps

Welche Höhe $H(n)$ hat ein Heap mit n Knoten? Auf der i-ten Ebene eines Binären Baumes befinden sich höchstens 2^i Knoten. Bis auf die letzte Ebene sind alle Ebenen eines Heaps aufgefüllt.

$$H(n) = \min\{h \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{h-1} 2^i \geq n\}$$

Mit $\sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1$:

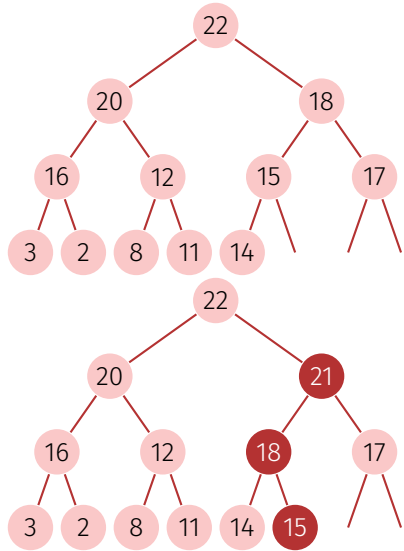
$$H(n) = \min\{h \in \mathbb{N} : 2^h \geq n + 1\},$$

also

$$H(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil.$$

Einfügen

- Füge neues Element an erste freie Stelle ein. Verletzt Heap Eigenschaft potentiell.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Aufsteigen.
- Anzahl Operationen im schlechtesten Fall: $\mathcal{O}(\log n)$



Algorithmus Aufsteigen(A, m)

Input: Array A mit mindestens m Elementen und Max-Heap-Struktur auf $A[1, \ldots, m-1]$

Output: Array A mit Max-Heap-Struktur auf $A[1, \ldots, m]$.

$v \leftarrow A[m]$ // Wert

$c \leftarrow m$ // derzeitiger Knoten (child)

$p \leftarrow \lfloor c/2 \rfloor$ // Elternknoten (parent)

while $c > 1$ and $v > A[p]$ **do**

    $A[c] \leftarrow A[p]$ // Wert Elternknoten $\rightarrow$ derzeitiger Knoten

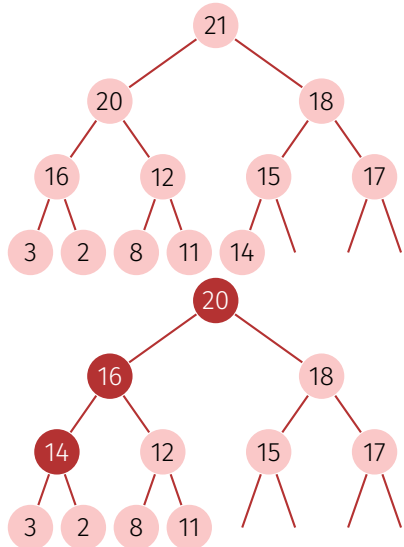
    $c \leftarrow p$ // Elternknoten $\rightarrow$ derzeitiger Knoten

    $p \leftarrow \lfloor c/2 \rfloor$

$A[c] \leftarrow v$ // Wert $\rightarrow$ Wurzel des (Teil-)Baumes

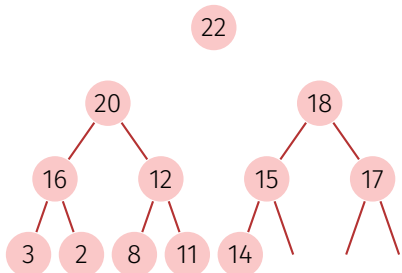
Maximum entfernen

- Ersetze das Maximum durch das unterste rechte Element.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Absinken (in Richtung des grösseren Kindes).
- Anzahl Operationen im schlechtesten Fall: $\mathcal{O}(\log n)$



Warum das korrekt ist: Rekursive Heap-Struktur

Ein Heap besteht aus zwei Teilheaps:



Algorithmus Versickern(A, i, m)

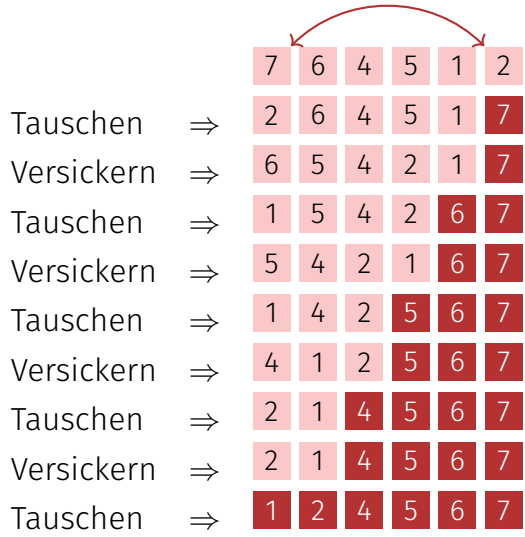
Input: Array A mit Heapstruktur für die Kinder von i. Letztes Element m.
Output: Array A mit Heapstruktur für i mit letztem Element m.

```
while 2i ≤ m do
    j ← 2i; // j linkes Kind
    if j < m and A[j] < A[j + 1] then
        j ← j + 1; // j rechtes Kind mit grösserem Schlüssel
    if A[i] < A[j] then
        swap(A[i], A[j])
        i ← j; // weiter versickern
    else
        i ← m; // versickern beendet
```

Heap Sortieren

$A[1, ..., n]$ ist Heap.
Solange $n > 1$

- swap($A[1]$, $A[n]$)
- Versickere($A, 1, n-1$);
- $n \leftarrow n - 1$



Heap erstellen

Beobachtung: Jedes Blatt eines Heaps ist für sich schon ein korrekter Heap.

Folgerung: Induktion von unten!

Algorithmus HeapSort(A, n)

Input: Array A der Länge n.
Output: A sortiert.

```
// Heap Bauen.
for i ← n/2 downto 1 do
    Versickere(A, i, n);
// Nun ist A ein Heap.
for i ← n downto 2 do
    swap(A[1], A[i])
    Versickere(A, 1, i − 1)
// Nun ist A sortiert.
```

Analyse: Sortieren eines Heaps

Versickere durchläuft maximal $\log n$ Knoten. An jedem Knoten 2 Schlüsselvergleiche. $\Rightarrow$ Heap Sortieren kostet im schlechtesten Fall $2n \log n$ Vergleiche.

Anzahl der Bewegungen vom Heap Sortieren auch $\mathcal{O}(n \log n)$.

Analyse: Heap bauen

Aufrufe an Versickern: $n/2$.
Also Anzahl Vergleiche und Bewegungen $v(n) \in \mathcal{O}(n \log n)$.
Versickerpfade sind aber im Mittel viel kürzer:
Wir verwenden, dass $h(n) = \lceil \log_2 n + 1 \rceil = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ für $n > 0$

$$v(n) = \sum_{l=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \underbrace{2^l}_{\text{Anzahl Heaps auf Level l}} \cdot (\underbrace{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 - l}_{\text{Höhe Heaps auf Level l}} - 1) = \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor - k} \cdot k$$

$$= 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{k}{2^k} \leq n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} \leq n \cdot 2 \in \mathcal{O}(n)$$

mit $s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (0 < x < 1)$ und $s(\frac{1}{2}) = 2$

10. AVL Bäume

Balancierte Bäume [Ottman/Widmayer, Kap. 5.2-5.2.1, Cormen et al, Kap. Problem 13-3]

Ziel

Suchen, Einfügen und Entfernen eines Schlüssels in Baum mit n Schlüsseln, welche in zufälliger Reihenfolge eingefügt wurden im Mittel in $\mathcal{O}(\log_2 n)$ Schritten.

Schlechtester Fall jedoch: $\Theta(n)$ (degenerierter Baum).

Ziel: Verhinderung der Degenerierung. Künstliches, bei jeder Update-Operation erfolgtes Balancieren eines Baumes

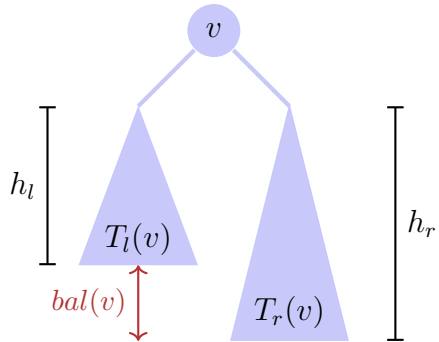
Balancierung: garantiere, dass ein Baum mit n Knoten stets eine Höhe von $\mathcal{O}(\log n)$ hat.

Adelson-Venskii und Landis (1962): AVL-Bäume

Balance eines Knotens

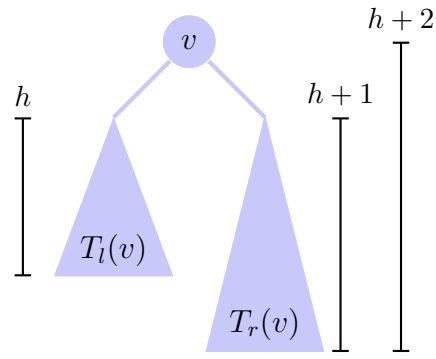
Die **Balance** eines Knotens v ist definiert als die Höhendifferenz seiner beiden Teilbäume $T_l(v)$ und $T_r(v)$

$$\text{bal}(v) := h(T_r(v)) - h(T_l(v))$$

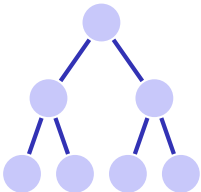


AVL Bedingung

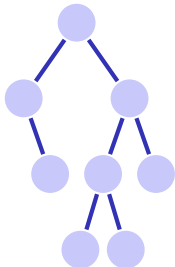
AVL Bedingung: für jeden Knoten v eines Baumes gilt $\mathrm{bal}(v) \in \{-1, 0, 1\}$



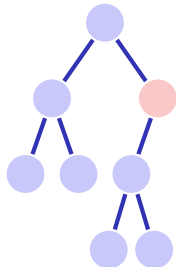
(Gegen-)Beispiele



AVL Baum der Höhe 2



AVL Baum der Höhe 3

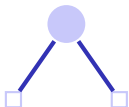


Kein AVL Baum

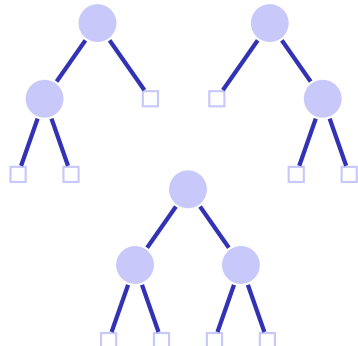
Anzahl Blätter

- 1. Beobachtung: Ein Suchbaum mit n Schlüsseln hat genau $n + 1$ Blätter. Einfaches Induktionsargument.
  - Der Suchbaum mit $n = 0$ Schlüsseln hat $m = 1$ Blätter
  - Wird ein Schlüssel (Knoten) hinzugefügt ($n \to n + 1$), so ersetzt er ein Blatt und fügt zwei Blätter hinzu ($m \to m - 1 + 2 = m + 1$).
- 2. Beobachtung: untere Grenze für Anzahl Blätter eines Suchbaums zu gegebener Höhe erlaubt Abschätzung der maximalen Höhe eines Suchbaums zu gegebener Anzahl Schlüssel.

Untere Grenze Blätter



AVL Baum der Höhe 1 hat
$N(1) := 2$ Blätter



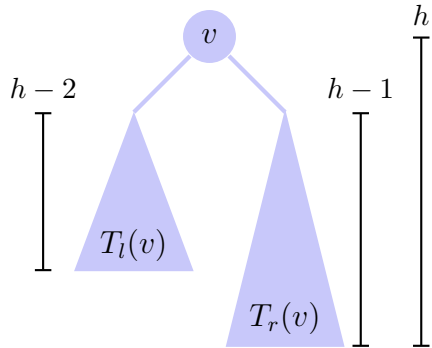
AVL Baum der Höhe 2 hat
mindestens $N(2) := 3$ Blätter

Untere Grenze Blätter für $h > 2$

- Höhe eines Teilbaums $\geq h - 1$.
- Höhe des anderen Teilbaums $\geq h - 2$.

Minimale Anzahl Blätter $N(h)$ ist

$$N(h) = N(h-1) + N(h-2)$$



Insgesamt gilt $N(h) = F_{h+2}$ mit **Fibonacci-Zahlen** $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n > 1$.

Fibonacci Zahlen, geschlossene Form

Es gilt

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i)$$

mit den Wurzeln $\phi, \hat{\phi}$ der Gleichung vom goldenen Schnitt $x^2 - x - 1 = 0$:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$
$$\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$$

Fibonacci Zahlen, Induktiver Beweis

$F_i \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i) \qquad [*]$ $\qquad \left(\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$

1. Klar für $i = 0, i = 1$.
2. Sei $i > 2$ und Behauptung $[*]$ wahr für alle F_j, $j < i$.

$$F_i \stackrel{def}{=} F_{i-1} + F_{i-2} \stackrel{[*]}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{i-1} - \hat{\phi}^{i-1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{i-2} - \hat{\phi}^{i-2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{i-1} + \phi^{i-2}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{\phi}^{i-1} + \hat{\phi}^{i-2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{i-2}(\phi + 1) - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\phi}^{i-2}(\hat{\phi} + 1)$$

($\phi, \hat{\phi}$ erfüllen $x + 1 = x^2$)

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{i-2}(\phi^2) - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\phi}^{i-2}(\hat{\phi}^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i).$$

Baumhöhe

Da $|\hat{\phi}| < 1$, gilt insgesamt

$$N(h) \in \Theta\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^h\right) \subseteq \Omega(1.618^h)$$

und somit

$$\begin{aligned} N(h) &\geq c \cdot 1.618^h \\ \Rightarrow \quad h &\leq 1.44 \log_2 n + c'. \end{aligned}$$

Ein AVL Baum ist asymptotisch nicht mehr als 44% höher als ein perfekt balancierter Baum.[5]

[5] Ein perfekt balancierter Baum hat Höhe $\lceil \log_2 n + 1 \rceil$

Einfügen

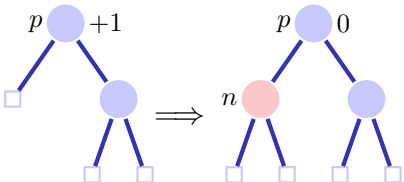
Balancieren

- Speichern der Balance für jeden Knoten
- Baum rebalancieren bei jeder Update-Operation

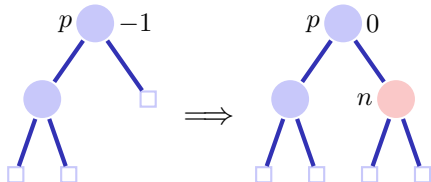
Neuer Knoten n wird eingefügt:

- Zuerst einfügen wie bei Suchbaum.
- Prüfe die Balance-Bedingung für alle Knoten aufsteigend von n zur Wurzel.

Balance am Einfügeort



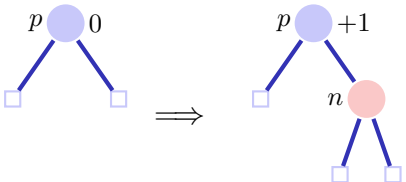
Fall 1: $\mathrm{bal}(p) = +1$



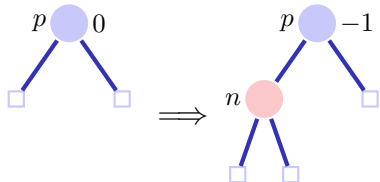
Fall 2: $\mathrm{bal}(p) = -1$

Fertig in beiden Fällen, denn der Teilbaum ist nicht gewachsen.

Balance am Einfügeort



Fall 3.1: $\mathrm{bal}(p) = 0$ rechts



Fall 3.2: $\mathrm{bal}(p) = 0$, links

In beiden Fällen noch nicht fertig. Aufruf von **`upin(p)`**.

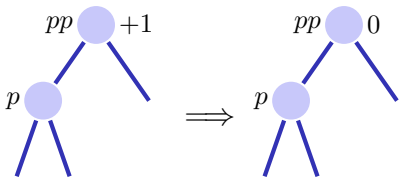
upin(p) - Invariante

Beim Aufruf von **`upin(p)`** gilt, dass

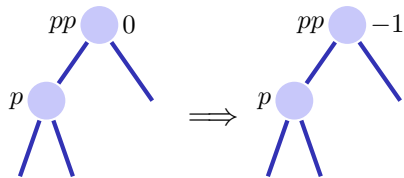
- der Teilbaum ab p gewachsen ist und
- $\mathrm{bal}(p) \in \{-1, +1\}$

upin(p)

Annahme: p ist linker Sohn von pp[6]



Fall 1: $\mathrm{bal}(pp) = +1$, fertig.



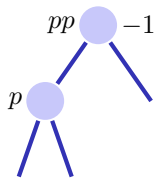
Fall 2: $\mathrm{bal}(pp) = 0$, **`upin(pp)`**

In beiden Fällen gilt nach der Operation die AVL-Bedingung für den Teilbaum ab pp

[6] Ist p rechter Sohn: symmetrische Fälle unter Vertauschung von $+1$ und -1

upin(p)

Annahme: p ist linker Sohn von pp



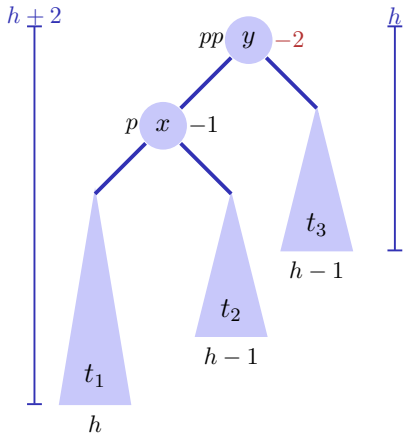
Fall 3: $\mathrm{bal}(pp) = -1$,

Dieser Fall ist problematisch: das Hinzufügen von n im Teilbaum ab pp hat die AVL-Bedingung verletzt. Rebalancieren!

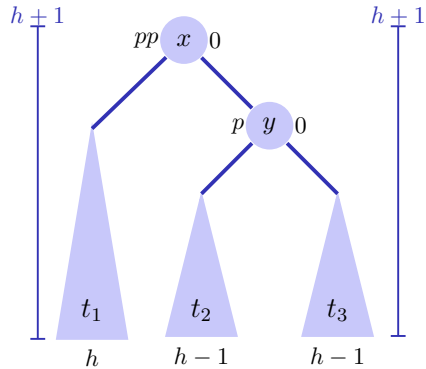
Zwei Fälle $\mathrm{bal}(p) = -1$, $\mathrm{bal}(p) = +1$

Rotationen

Fall 1.1 $\mathrm{bal}(p) = -1$. [7]



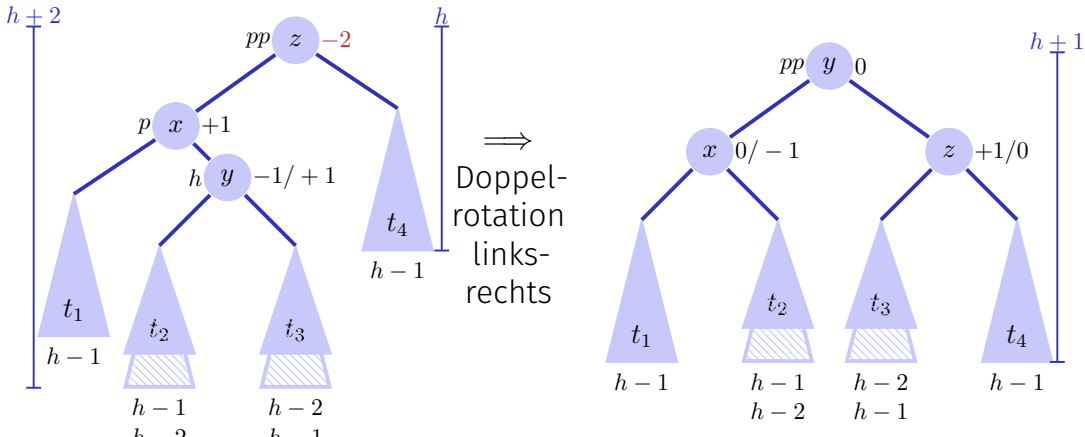
$\Longrightarrow$ Rotation nach rechts



[7] p rechter Sohn $\Rightarrow \mathrm{bal}(pp) = \mathrm{bal}(p) = +1$, Linksrotation

Rotationen

Fall 1.2 $\mathrm{bal}(p) = +1$. [8]



[8] p rechter Sohn $\Rightarrow \mathrm{bal}(pp) = +1$, $\mathrm{bal}(p) = -1$, Doppelrotation rechts links

Analyse

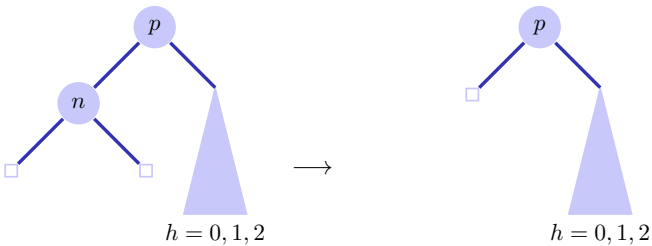
- Höhe des Baumes: $\mathcal{O}(\log n)$.
- Einfügen wie beim binären Suchbaum.
- Balancieren durch Rekursion vom Knoten zur Wurzel. Maximale Pfadlänge $\mathcal{O}(\log n)$.

Das Einfügen im AVL-Baum hat Laufzeitkosten von $\mathcal{O}(\log n)$.

Löschen

Fall 1: Knoten n hat zwei Blätter als Kinder Sei p Elternknoten von n. $\Rightarrow$ Anderer Teilbaum hat Höhe $h' = 0$, 1 oder 2

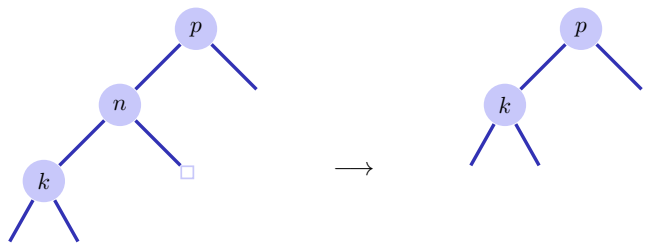
- $h' = 1$: $\mathrm{bal}(p)$ anpassen.
- $h' = 0$: $\mathrm{bal}(p)$ anpassen. Aufruf **`upout(p)`**.
- $h' = 2$: Rebalancieren des Teilbaumes. Aufruf **`upout(p)`**.



Löschen

Fall 2: Knoten n hat einen inneren Knoten k als Kind

- Ersetze n durch k. **`upout(k)`**



Löschen

Fall 3: Knoten n hat zwei inneren Knoten als Kinder

- Ersetze n durch symmetrischen Nachfolger. **`upout(k)`**
- Löschen des symmetrischen Nachfolgers wie in Fall 1 oder 2.

upout(p)

Sei pp der Elternknoten von p

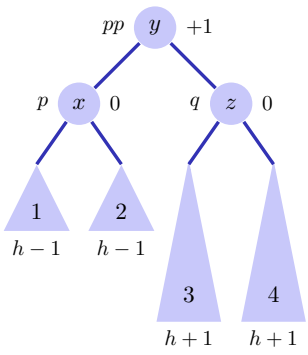
(a) p linkes Kind von pp

1. $\mathrm{bal}(pp) = -1 \;\Rightarrow\; \mathrm{bal}(pp) \leftarrow 0$. **upout(pp)**
2. $\mathrm{bal}(pp) = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{bal}(pp) \leftarrow +1$.
3. $\mathrm{bal}(pp) = +1 \Rightarrow$ nächste Folien.

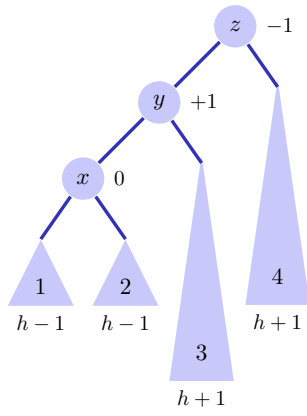
(b) p rechtes Kind von pp: Symmetrische Fälle unter Vertauschung von $+1$ und -1.

upout(p)

Fall (a).3: $\mathrm{bal}(pp) = +1$. Sei q Bruder von p
(a).3.1: $\mathrm{bal}(q) = 0$.[9]



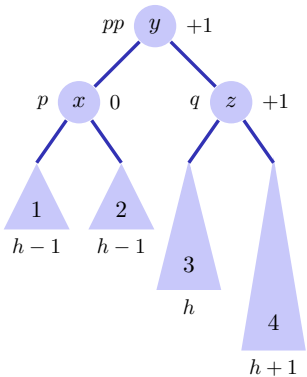
$\Longrightarrow$
Linksrotation
(y)



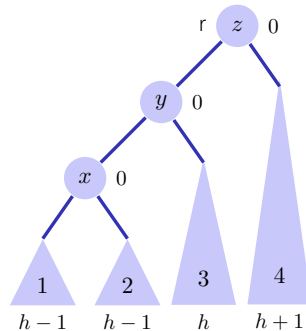
[9] (b).3.1: $\mathrm{bal}(pp) = -1$, $\mathrm{bal}(q) = -1$, Rechtsrotation.

upout(p)

Fall (a).3: $\mathrm{bal}(pp) = +1$. (a).3.2: $\mathrm{bal}(q) = +1$.[10]



$\Longrightarrow$
Linksrotation
(y)

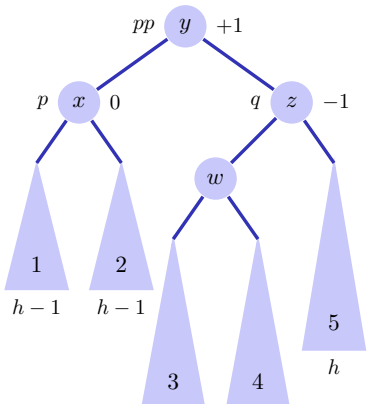


plus **upout(r)**.

[10] **(b).3.2:** $\mathrm{bal}(pp) = -1$, $\mathrm{bal}(q) = +1$, **Rechtsrotation+upout**

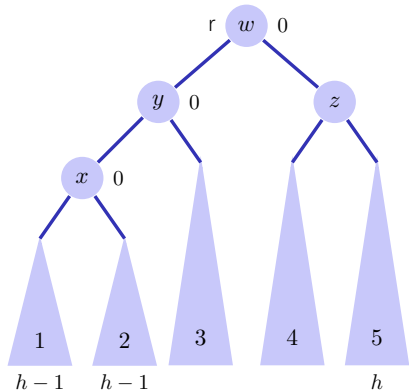
upout(p)

Fall (a).3: $\mathrm{bal}(pp) = +1$. (a).3.3: $\mathrm{bal}(q) = -1$.[11]



$\Longrightarrow$

Doppelrotation rechts (z) links (y)



plus **upout(r)**.

[11](b).3.3: $\mathrm{bal}(pp) = -1$, $\mathrm{bal}(q) = -1$, Links-Rechts-Rotation + upout

Zusammenfassung

- AVL-Bäume haben asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(\log n)$ (schlechtester Fall) für das Suchen, Einfügen und Löschen von Schlüsseln
- Einfügen und Löschen ist verhältnismässig aufwändig und für kleine Probleme relativ langsam.

11. Hashing

Hashtabellen, Pre-Hashing, Hashing, Kollisionsauflösung durch Verketten, Einfaches gleichmässiges Hashing, Gebräuchliche Hashfunktionen, Tabellenvergrösserung, offene Addressierung: Sondieren
[Ottman/Widmayer, Kap. 4.1-4.3.2, 4.3.4, Cormen et al, Kap. 11-11.4]

Motivierendes Beispiel

Ziel: Effiziente Verwaltung einer Tabelle aller n ETH-Studenten

Mögliche Anforderung: Schneller Zugriff (Einfügen, Löschen, Finden) von Datensätzen nach Name.

Wörterbuch (Dictionary)

Abstrakter Datentyp (ADT) D zur Verwaltung einer Menge von Einträgen[12] i mit Schlüsseln $k \in \mathcal{K}$. Operationen

- **`D.insert`**(i): Hinzufügen oder Überschreiben von i im Wörterbuch D.
- **`D.delete`**(i): Löschen von i aus dem Wörterbuch D. Nicht vorhanden $\Rightarrow$ Fehlermeldung.
- **`D.search`**(k): Liefert Eintrag mit Schlüssel k, wenn er existiert.

[12] Schlüssel-Wert Paare (k, v), im Folgenden betrachten wir hauptsächlich die Schlüssel.

Wörterbücher in Python

Wörterbuch →

```
fruits = {
  "banana": 2.95, "kiwi": 0.70,
  "pear": 4.20, "apple": 3.95
}
```

Einfügen →

```
fruits["melon"] = 3.95
```

Verändern →

```
fruits["banana"] = 1.90
```

Suchen →

```
print("banana", fruits["banana"])
print("melon in fruits", "melon" in
fruits)print("onion in fruits"
, "onion" in fruits)
```

Löschen →

```
del fruits["strawberry"]
```

Iterieren →

```
for name,price in fruits.items():
  print(name,"->",price)
```

Wörterbücher in Java

Wörterbuch →
```
Map<String,Double> fruits =
  new HashMap<String,Double>();
```

Einfügen →
```
fruits.put("banana", 2.95);
fruits.put("kiwi", 0.70);
fruits.put("strawberry", 9.95);
fruits.put("pear", 4.20);
fruits.put("apple", 3.95);
```

Verändern →
```
fruits.put("banana", 2.90);
```

Suchen →
```
Out.println("banana " + fruits.get("banana"));
```

Löschen →
```
fruits.remove("banana");
```

Iterieren →
```
for (String s: fruits.keySet())
  Out.println(s+" " + fruits.get(s));
```

Motivation / Verwendung

Wahrscheinlich **die** gängigste Datenstruktur

- Unterstützt in vielen Programmiersprachen (C++, Java, Python, Ruby, Javascript, C# ...)
- Offensichtliche Verwendung
  - Datenbanken / Tabellenkalkulation
  - Symboltabellen in Compilern und Interpretern
- Weniger offensichtlich
  - Substring Suche (Google, grep)
  - Ähnlichkeit von Texten (Dokumentenvergleich, DNA)
  - Dateisynchronisation
  - Kryptographie: Filetransfer / Identifikation

1. Idee: Direkter Zugriff (Array)

Index	Eintrag
0	-
1	-
2	-
3	[3,wert(3)]
4	-
5	-
⋮	⋮
k	[k,wert(k)]
⋮	⋮

Probleme

1. Schlüssel müssen nichtnegative ganze Zahlen sein
2. Grosser Schlüsselbereich $\Rightarrow$ grosses Array

Lösung zum ersten Problem: Pre-hashing

Prehashing: Bilde Schlüssel ab auf positive Ganzzahlen mit einer Funktion $ph : \mathcal{K} \to \mathbb{N}$

- Theoretisch immer möglich, denn jeder Schlüssel ist als Bitsequenz im Computer gespeichert
- Theoretisch auch: $x = y \Leftrightarrow ph(x) = ph(y)$
- In der Praxis: APIs bieten Funktionen zum pre-hashing an. (Java: **`object.hashCode()`**, C++: **`std::hash<>`**, Python: **`hash(object)`**)
- APIs bilden einen Schlüssel aus der Schlüsselmenge ab auf eine Ganzzahl mit beschränkter Grösse.[13]

[13] Somit gilt die Implikation $ph(x) = ph(y) \Rightarrow x = y$ **nicht** mehr für alle x,y.

Prehashing Beispiel: String

Zuordnung Name $s = s_1 s_2 \dots s_{l_s}$ zu Schlüssel

$$ph(s) = \left(\sum_{i=0}^{l_s - 1} s_{l_s - i} \cdot b^i \right) \bmod 2^w$$

b so, dass verschiedene Namen möglichst verschiedene Schlüssel erhalten.
w Wortgrösse des Systems (z.B. 32 oder 64).

Beispiel (Java), mit $b = 31$, $w = 32$ Ascii-Werte s_i.

Anna $\mapsto 2045632$
Jacqueline $\mapsto 2042089953442505 \bmod 2^{32} = 507919049$

Implementation Prehashing (String) in Java

$$ph_{b,m}(s) = \left(\sum_{i=0}^{l-1} s_{l-i+1} \cdot b^i \right) \bmod m$$

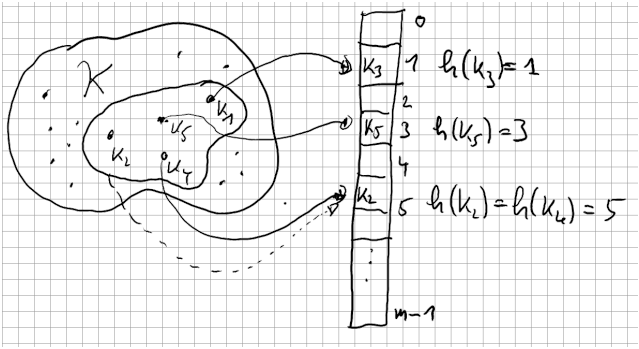
Mit $b = 31$ und $m = 2^{32}$ erhält man in Java[14]

```
int prehash(String s){
  int h = 0;
  for (int k = 0; k < s.length(); ++k){
    h = h * b + s.charAt(k);
  }
  return h;
}
```

[14] Machen Sie sich klar, warum das funktioniert

Lösung zum zweiten Problem: Hashing

Reduziere des Schlüsseluniversum: Abbildung (Hash-Funktion)
$h : \mathcal{K} \to \{0, ..., m-1\}$ ($m \approx n =$ Anzahl Einträge in der Tabelle)



Kollision: $h(k_i) = h(k_j)$.

Nomenklatur

Hashfunktion h: Abbildung aus der Menge der Schlüssel $\mathcal{K}$ auf die Indexmenge $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ eines Arrays (**Hashtabelle**).

$$h : \mathcal{K} \to \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

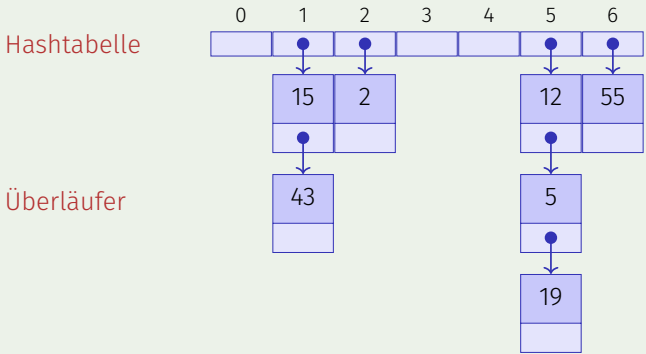
Meist $|\mathcal{K}| \gg m$. Es gibt also $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$ mit $h(k_1) = h(k_2)$ (**Kollision**).
Eine Hashfunktion sollte die Menge der Schlüssel möglichst gleichmässig auf die Positionen der Hashtabelle verteilen.

Behandlung von Kollisionen: Verkettung

$m = 7, \mathcal{K} = \{0, \ldots, 500\}, h(k) = k \bmod m.$

Schlüssel 12 , 55 , 5 , 15 , 2 , 19 , 43

Direkte Verkettung der Überläufer



Algorithmen zum Hashing mit Verkettung

- **`insert`**(i) Prüfe ob Schlüssel k vom Eintrag i in Liste an Position $h(k)$. Falls nein, füge i am Ende der Liste ein; andernfalls ersetze das Element durch i.
- **`find`**(k) Prüfe ob Schlüssel k in Liste an Position $h(k)$. Falls ja, gib die Daten zum Schlüssel k zurück. Andernfalls Rückgabe eines leeren Elements **`null`**.
- **`delete`**(k) Durchsuche die Liste an Position $h(k)$ nach k. Wenn Suche erfolgreich, entferne das entsprechende Listenelement.

Worst-case Analyse

Schlechtester Fall: alle Schlüssel werden auf den gleichen Index abgebildet.

$\Rightarrow \Theta(n)$ pro Operation im schlechtesten Fall. ☹

Einfaches Gleichmässiges Hashing

Starke Annahmen: Jeder beliebige Schlüssel wird

- mit gleicher Wahrscheinlichkeit (Uniformität)
- und unabhängig von den anderen Schlüsseln (Unabhängigkeit)

auf einen der m verfügbaren Slots abgebildet.

Einfaches Gleichmässiges Hashing

Unter der Voraussetzung von einfachem gleichmässigen Hashing:
Erwartete Länge einer Kette, wenn n Elemente in eine Hashtabelle mit m Elementen eingefügt werden

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\text{Länge Kette j}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}(k_i = j)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(k_i = j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m} = \frac{n}{m}\end{aligned}$$

$\alpha = n/m$ heisst **Belegungsfaktor** oder **Füllgrad** der Hashtabelle.

Einfaches Gleichmässiges Hashing

Theorem 5

Sei eine Hashtabelle Verkettung gefüllt mit Füllgrad $\alpha = \frac{n}{m} < 1$. Unter der Annahme vom einfachen gleichmässigen Hashing hat die nächste Operation erwartete Laufzeitkosten von $\leq 1 + \alpha$.

Folgerung: ist die Anzahl der Slots m der Hashtabelle immer mindestens proportional zur Anzahl Elemente n in der Hashtabelle, $n \in \mathcal{O}(m) \Rightarrow$ Erwartete Laufzeit der Operationen Suchen, Einfügen und Löschen ist $\mathcal{O}(1)$.

Vor und Nachteile der Verkettung

Vorteile der Strategie:

- Belegungsfaktoren $\alpha > 1$ möglich
- Entfernen von Schlüsseln einfach

Nachteile

- Speicherverbrauch der Verkettung

Ein Beispiel einer gebräuchlichen Hashfunktion

Divisionsmethode

$$h(k) = k \bmod m$$

Ideal: m Primzahl, nicht zu nahe bei Potenzen von 2 oder 10
Aber oft: $m = 2^k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$)
Andere Methode: Multiplikationsmethode (siehe Cormen et al, Kap. 11.3).

Tabellenvergrösserung

- Wissen nicht a priori, wie gross n sein wird.
- Benötigen $m = \Theta(n)$ zu jeder Zeit.

Grösse der Tabelle muss angepasst werden. Hash-Funktion ändert sich $\Rightarrow$ **Rehashing**

- Alloziere Array A' mit Grösse $m' > m$
- Füge jeden Eintrag von A erneut in A' ein (mit erneutem Hashing)
- Setze $A \leftarrow A'$.
- Kosten: $\mathcal{O}(n + m + m')$.

Wie wählt man m'?

Tabellenvergrösserung

- 1.Idee $n = m \Rightarrow m' \leftarrow m + 1$
  Bei jedem Einfügen vergrössern. Kosten $\Theta(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \Theta(n^2)$ ☹
- 2.Idee $n = m \Rightarrow m' \leftarrow 2m$ Vergrössern nur wenn $m = 2^i$:
  $\Theta(1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + n) = \Theta(n)$
  Einige Einfügeoperationen kosten lineare Zeit, aber im Durchschnitt kosten sie $\Theta(1)$ ☺

Jede Operation vom Hashing mit Verketten hat erwartet amortisierte Kosten $\Theta(1)$.

($\Rightarrow$ Amortisierte Analyse)

Amortisierte Analyse

Generelles Vorgehen bei dynamischen Arrays (z.B. Java: **`ArrayList`**, Python: **`List`**)

- Die Datenstruktur speichert neben dem Datenarray zwei Grössen: Grösse des Arrays (Kapazität m) und Anzahl verwendete Einträge (Grösse n).
- Grösse verdoppeln und Einträge kopieren, wenn die Liste voll ist $n = m \Rightarrow m \leftarrow 2n$. Kosten $\Theta(m)$.
- Laufzeitkosten bei $n = 2^k$ Einfügeoperationen: $\Theta(1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^k) = \Theta(2^{k+1} - 1) = \Theta(n)$.

Kosten pro Operation **gemittelt über alle Operationen** = **amortisierte Kosten** = $\Theta(1)$ pro Einfügeoperation.

Offene Addressierung

Speichere die Überläufer direkt in der Hashtabelle mit einer **Sondierungsfunktion** $s : \mathcal{K} \times \{0, 1, \ldots, m-1\} \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$
Tabellenposition des Schlüssels entlang der **Sondierungsfolge**

$$S(k) := (s(k, 0), s(k, 1), \ldots, s(k, m-1)) \mod m$$

Sondierungsfolge muss für jedes $k \in \mathcal{K}$ eine Permutation sein von $\{0, 1, \ldots, m-1\}$

Begriffsklärung: Dieses Verfahren nutzt **offene Addressierung** (Positionen in der Hashtabelle nicht fixiert), ist aber **ein geschlossenes Hashverfahren** (Einträge bleiben in der Hashtabelle)

Algorithmen zur offenen Addressierung

- **`insert`**(i) Suche Schlüssel k von i in der Tabelle gemäss Sondierungssequenz $S(k)$. Ist k nicht vorhanden, füge k an die erste freie Position in der Sondierungsfolge ein. Andernfalls Fehlermeldung.
- **`find`**(k) Durchlaufe Tabelleneinträge gemäss $S(k)$. Wird k gefunden, gib die zu k gehörenden Daten zurück. Andernfalls Rückgabe eines leeres Elements **`null`**.
- **`delete`**(k) Suche k in der Tabelle gemäss $S(k)$. Wenn k gefunden, ersetze k durch den speziellen Schlüssel **`removed`**.

Lineares Sondieren

$$s(k,j) = h(k) + j \Rightarrow S(k) = (h(k), h(k)+1, \ldots, h(k)+m-1) \mod m$$

$m = 7$, $\mathcal{K} = \{0, \ldots, 500\}$, $h(k) = k \bmod m$.

Schlüssel 12 , 55 , 5 , 15 , 2 , 19

Diskussion

Beispiel $\alpha = 0.95$

Erfolglose Suche betrachtet im Durchschnitt 200 Tabelleneinträge! (hier ohne Herleitung).

Grund für die schlechte Performance?

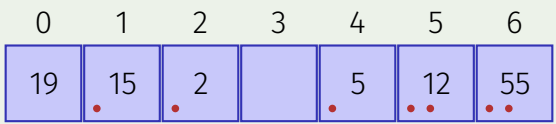
Primäre Häufung: Ähnliche Hashaddressen haben ähnliche Sondierungsfolgen $\Rightarrow$ lange zusammenhängende belegte Bereiche.

Quadratisches Sondieren

$$s(k,j) = h(k) + \lceil j/2 \rceil^2 (-1)^{j+1}$$
$$S(k) = (h(k), h(k)+1, h(k)-1, h(k)+4, h(k)-4, \dots) \mod m$$

$m = 7$, $\mathcal{K} = \{0, \dots, 500\}$, $h(k) = k \bmod m$.

Schlüssel 12 , 55 , 5 , 15 , 2 , 19



Diskussion

Beispiel $\alpha = 0.95$

Erfolglose Suche betrachtet im Durchschnitt 22 Tabelleneinträge (hier ohne Herleitung)

Grund für die schlechte Performance?

Sekundäre Häufung: Synonyme k und k' (mit $h(k) = h(k')$) durchlaufen dieselbe Sondierungsfolge.

Double Hashing

Zwei Hashfunktionen $h(k)$ und $h'(k)$. $s(k,j) = h(k) + j \cdot h'(k)$.
$S(k) = (h(k), h(k) + h'(k), h(k) + 2h'(k), \ldots, h(k) + (m-1)h'(k)) \mod m$

$m = 7$, $\mathcal{K} = \{0, \ldots, 500\}$, $h(k) = k \bmod 7$, $h'(k) = 1 + k \bmod 5$.

Schlüssel 12 , 55 , 5 , 15 , 2 , 19

Double Hashing

- Sondierungsreihenfolge muss Permutation aller Hashadressen bilden. Also $h'(k) \neq 0$ und $h'(k)$ darf m nicht teilen, z.B. garantiert mit m prim.
- h' sollte möglichst unabhängig von h sein (Vermeidung sekundärer Häufung).

  Unabhängigkeit weitgehend erfüllt von $h(k) = k \bmod m$ und $h'(k) = 1 + k \bmod (m-2)$ (m prim).

Gleichmässiges Hashing

Starke Annahme: Die Sondierungssequenz $S(k)$ eines Schlüssels k ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der $m!$ vielen Permutationssequenzen von $\{0, 1, \ldots, m-1\}$.

(Double Hashing kommt dem am ehesten nahe)

Analyse gleichmässiges Hashing mit offener Addressierung

Theorem 6

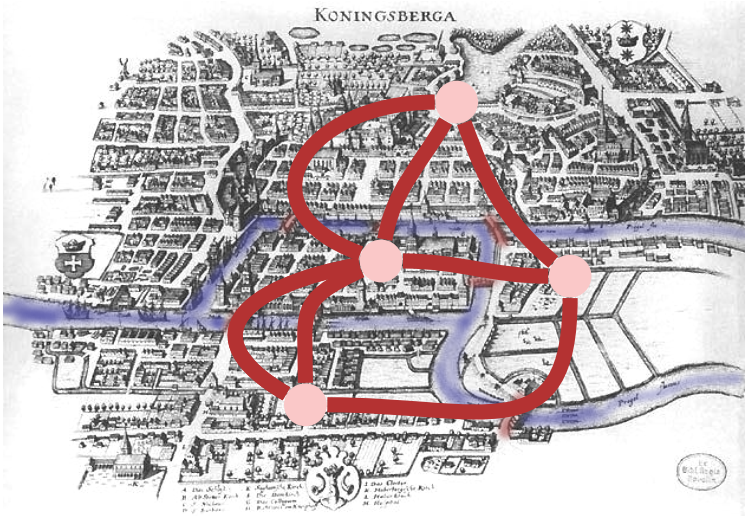
Sei eine Hashtabelle mit offener Addressierung gefüllt mit Füllgrad $\alpha = \frac{n}{m} < 1$. *Unter der Annahme vom gleichmässigen Hashing hat die nächste Operation erwartete Laufzeitkosten von* $\leq \frac{1}{1-\alpha}$.

Ohne Beweis, siehe z.B. Cormen et al, Kap. 11.4

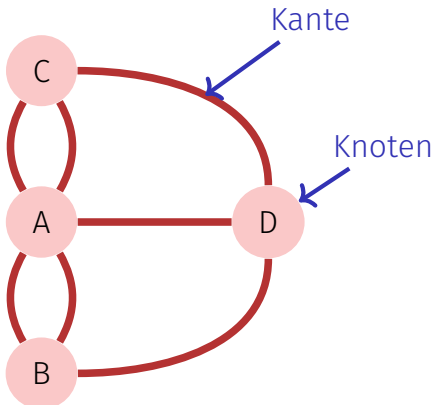
12. Graphen

Notation, Repräsentation, Traversieren (DFS, BFS), Topologisches Sortieren
[Ottman/Widmayer, Kap. 9.1 - 9.4,Cormen et al, Kap. 22]

Königsberg 1736



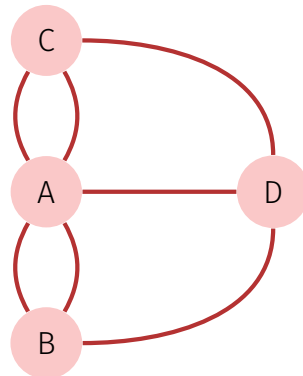
[Multi]Graph



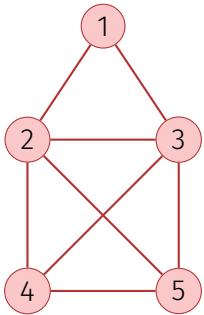
Zyklen

- Gibt es einen Rundweg durch die Stadt (den Graphen), welcher jede Brücke (jede Kante) genau einmal benutzt?
- Euler (1736): nein.
- Solcher Rundweg (*Zyklus*) heisst **Eulerscher Kreis**.
- Eulerzyklus $\Leftrightarrow$ jeder Knoten hat gerade Anzahl Kanten (jeder Knoten hat einen *geraden Grad*).

  "$\Rightarrow$" ist sofort klar, "$\Leftarrow$" ist etwas schwieriger, aber auch elementar.

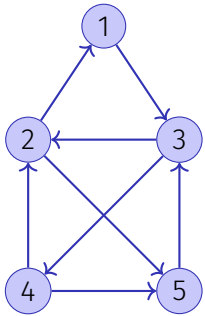


Notation



ungerichtet

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$$

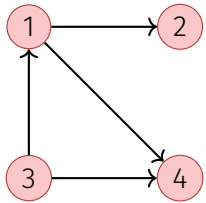


gerichtet

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$E = \{(1, 3), (2, 1), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 3)\}$$

Notation

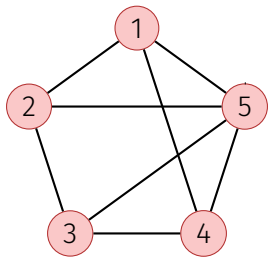
Ein **gerichteter Graph** besteht aus einer Menge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von Knoten (*Vertices*) und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von Kanten (*Edges*). Gleiche Kanten dürfen nicht mehrfach enthalten sein.



Schleife

Notation

Ein **ungerichteter Graph** besteht aus einer Menge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von Knoten und einer Menge $E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V\}$ von Kanten. Kanten dürfen nicht mehrfach enthalten sein.[15]

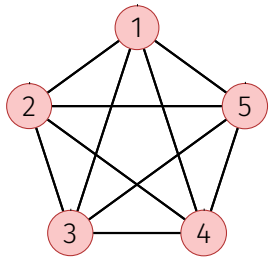


ungerichter Graph

[15] Im Gegensatz zum Eingangsbeispiel – dann Multigraph genannt.

Notation

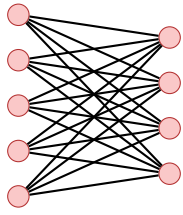
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ohne Schleifen in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist, heisst **vollständig**.



ein vollständiger ungerichter Graph

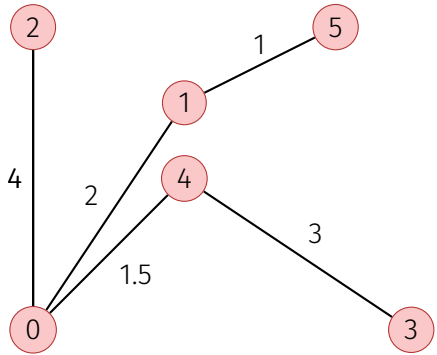
Notation

Ein Graph, bei dem V so in disjunkte U und W aufgeteilt werden kann, dass alle $e \in E$ einen Knoten in U und einen in W haben heisst **bipartit**.



Notation

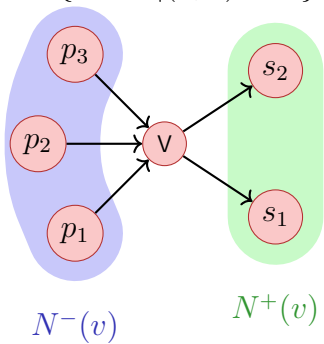
Ein **gewichteter Graph** $G = (V, E, c)$ ist ein Graph $G = (V, E)$ mit einer **Kantengewichtsfunktion** $c : E \to \mathbb{R}$. $c(e)$ heisst **Gewicht** der Kante e.



Notation

Für gerichtete Graphen $G = (V, E)$

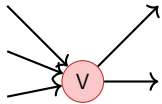
- $w \in V$ heisst **adjazent** zu $v \in V$, falls $(v, w) \in E$
- **Vorgängermenge** von $v \in V$: $N^-(v) := \{u \in V | (u, v) \in E\}$.
  Nachfolgermenge: $N^+(v) := \{u \in V | (v, u) \in E\}$



Notation

Für gerichtete Graphen $G = (V, E)$

- **Eingangsgrad**: $\deg^-(v) = |N^-(v)|$,
  Ausgangsgrad: $\deg^+(v) = |N^+(v)|$



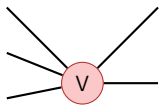
$\deg^-(v) = 3, \deg^+(v) = 2$

$\deg^-(w) = 1, \deg^+(w) = 1$

Notation

Für ungerichtete Graphen $G = (V, E)$:

- $w \in V$ heisst **adjazent** zu $v \in V$, falls $\{v, w\} \in E$
- **Nachbarschaft** von $v \in V$: $N(v) = \{w \in V | \{v, w\} \in E\}$
- **Grad** von v: $\deg(v) = |N(v)|$ mit Spezialfall Schleifen: erhöhen Grad um 2.



$\deg(v) = 5$

$\deg(w) = 2$

Beziehung zwischen Knotengraden und Kantenzahl

In jedem Graphen $G = (V, E)$ gilt

1. $\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$, falls G gerichtet
2. $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, falls G ungerichtet.

Wege

- **Weg**: Sequenz von Knoten $\langle v_1, \ldots, v_{k+1} \rangle$ so dass für jedes $i \in \{1 \ldots k\}$ eine Kante von v_i nach v_{i+1} existiert.
- **Länge** des Weges: Anzahl enthaltene Kanten k.
- **Gewicht** des Weges (in gewichteten Graphen): $\sum_{i=1}^{k} c((v_i, v_{i+1}))$ (bzw. $\sum_{i=1}^{k} c(\{v_i, v_{i+1}\})$)
- **Pfad** (auch: einfacher Pfad): Weg der keinen Knoten mehrfach verwendet.

Zusammenhang

- Ungerichteter Graph heisst **zusammenhängend**, wenn für jedes Paar $v, w \in V$ ein verbindender Weg existiert.
- Gerichteter Graph heisst **stark zusammenhängend**, wenn für jedes Paar $v, w \in V$ ein verbindender Weg existiert.
- Gerichteter Graph heisst **schwach zusammenhängend**, wenn der entsprechende ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

Einfache Beobachtungen

- Allgemein: $0 \leq |E| \in \mathcal{O}(|V|^2)$
- Zusammenhängender Graph: $|E| \in \Omega(|V|)$
- Vollständiger Graph: $|E| = \frac{|V| \cdot (|V|-1)}{2}$ (ungerichtet)
- Maximal $|E| = |V|^2$ (gerichtet),$|E| = \frac{|V| \cdot (|V|+1)}{2}$ (ungerichtet)

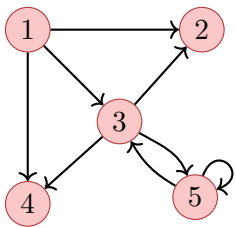
Zyklen

- **Zyklus**: Weg $\langle v_1, \ldots, v_{k+1} \rangle$ mit $v_1 = v_{k+1}$
- **Kreis**: Zyklus mit paarweise verschiedenen $v_1, \ldots, v_k$, welcher keine Kante mehrfach verwendet.
- **Kreisfrei (azyklisch)**: Graph ohne jegliche Kreise.

Eine Folgerung: Ungerichtete Graphen können keinen Kreis der Länge 2 enthalten (Schleifen haben Länge 1).

Repräsentation mit Matrix

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $v_1, \ldots, v_n$ gespeichert als **Adjazenzmatrix** $A_G = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit Einträgen aus $\{0, 1\}$. $a_{ij} = 1$ genau dann wenn Kante von v_i nach v_j.

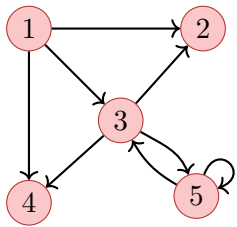


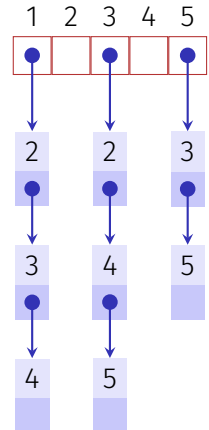
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Speicherbedarf $\Theta(|V|^2)$. A_G ist symmetrisch, wenn G ungerichtet.

Repräsentation mit Liste

Viele Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $v_1, \ldots, v_n$ haben deutlich weniger als n^2 Kanten. Repräsentation mit **Adjazenzliste**: Array $A[1], \ldots, A[n]$, A_i enthält verkettete Liste aller Knoten in $N^+(v_i)$.



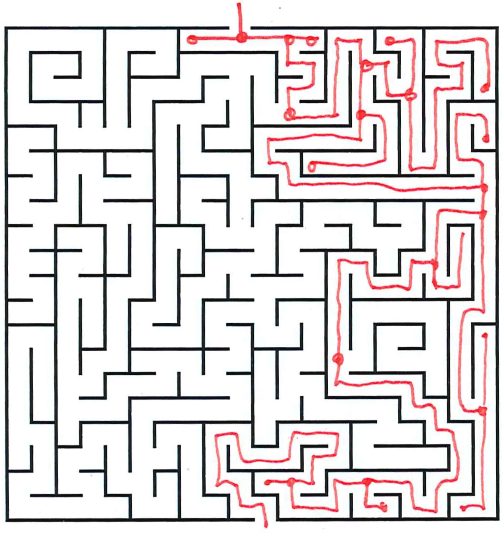


Speicherbedarf $\Theta(|V| + |E|)$.

Laufzeiten einfacher Operationen

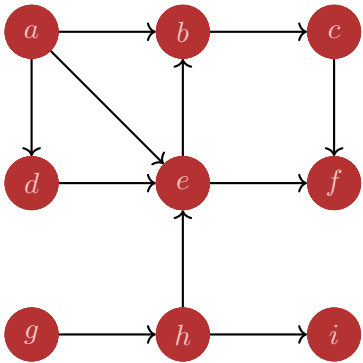
Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+ v)$
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
$(u, v) \in E$?	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+ v)$
Kante einfügen	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Kante löschen	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+ v)$

Tiefensuche



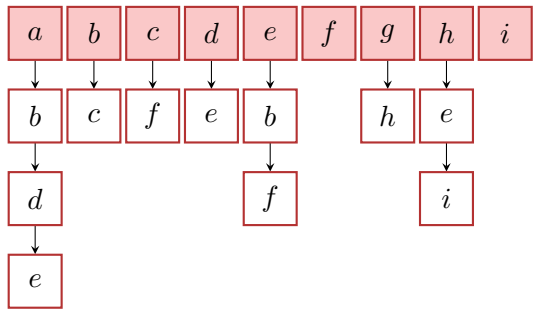
Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.



Reihenfolge $a, b, c, f, d, e, g, h, i$

Adjazenzliste



Farben

Konzeptuelle Färbung der Knoten

- **Weiss:** Knoten wurde noch nicht entdeckt.
- **Grau:** Knoten wurde entdeckt und zur Traversierung vorgemerkt / in Bearbeitung.
- **Schwarz:** Knoten wurde entdeckt und vollständig bearbeitet

Algorithmus Tiefensuche DFS-Visit(G, v)

Input: Graph $G = (V, E)$, Knoten v.

$v.color \leftarrow$ grey
foreach $w \in N^+(v)$ **do**
    if $w.color =$ white **then**
        DFS-Visit(G, w)
$v.color \leftarrow$ black

Tiefensuche ab Knoten v. Laufzeit (ohne Rekursion): $\Theta(\deg^+ v)$

Algorithmus Tiefensuche DFS-Visit(G)

Input: Graph $G = (V, E)$

foreach $v \in V$ **do**
    $v.color \leftarrow$ white

foreach $v \in V$ **do**
    if $v.color =$ white **then**
        DFS-Visit(G,v)

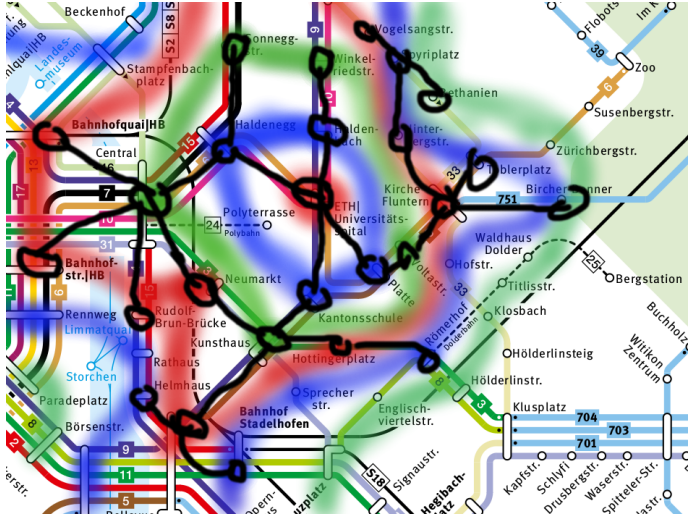
Tiefensuche für alle Knoten eines Graphen. Laufzeit $\Theta(|V| + \sum_{v \in V}(\deg^+(v) + 1)) = \Theta(|V| + |E|)$.

Interpretation der Farben

Beim Traversieren des Graphen wird ein Baum (oder Wald) aufgebaut.
Beim Entdecken von Knoten gibt es drei Fälle

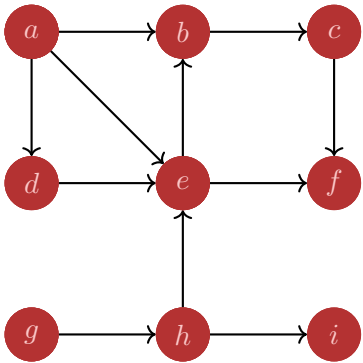
- Weisser Knoten: neue Baumkante
- Grauer Knoten: Zyklus („Rückwärtskante“)
- Schwarzer Knoten: Vorwärts-/Seitwärtskante

Breitensuche



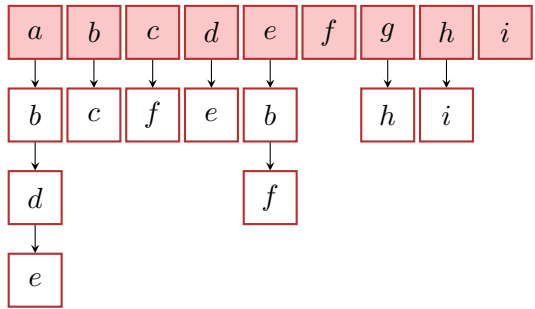
Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.



Reihenfolge $a, b, d, e, c, f, g, h, i$

Adjazenzliste



(Iteratives) BFS-Visit(G, v)

Input: Graph $G = (V, E)$

Queue $Q \leftarrow \emptyset$
$v.color \leftarrow$ grey
enqueue(Q, v)
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $w \leftarrow$ dequeue(Q)
    foreach $c \in N^+(w)$ **do**
        if $c.color =$ white **then**
            $c.color \leftarrow$ grey
            enqueue(Q, c)
    $w.color \leftarrow$ black

Algorithmus kommt mit $\mathcal{O}(|V|)$ Extraplatz aus.

Rahmenprogramm BFS-Visit(G)

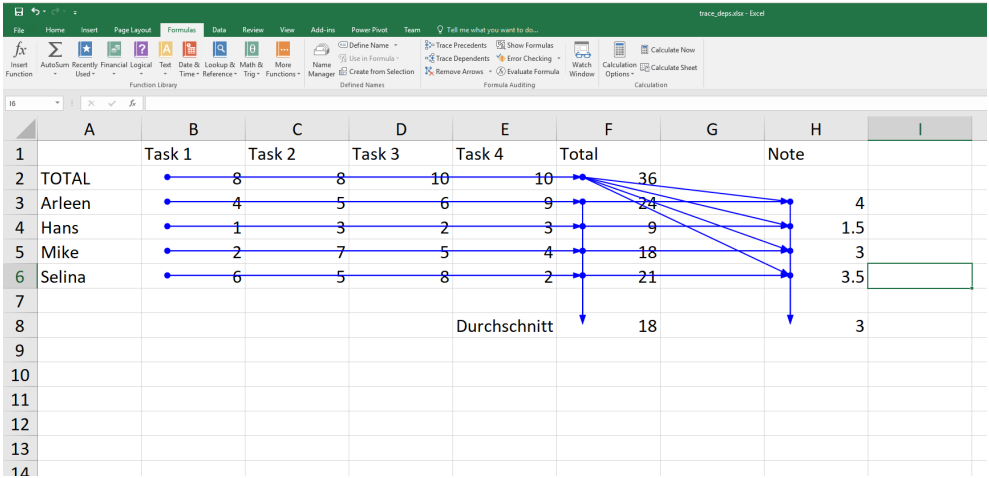
Input: Graph $G = (V, E)$

foreach $v \in V$ **do**
    $v.color \leftarrow$ white

foreach $v \in V$ **do**
    if $v.color =$ white **then**
        BFS-Visit(G,v)

Breitensuche für alle Knoten eines Graphen. Laufzeit $\Theta(|V| + |E|)$.

Topologisches Sortieren



Auswertungsreihenfolge?

Topologische Sortierung

Topologische Sortierung eines azyklischen gerichteten Graphen $G = (V, E)$:
Bijektive Abbildung

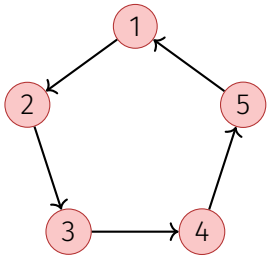
$$\mathrm{ord} : V \to \{1, \ldots, |V|\}$$

so dass

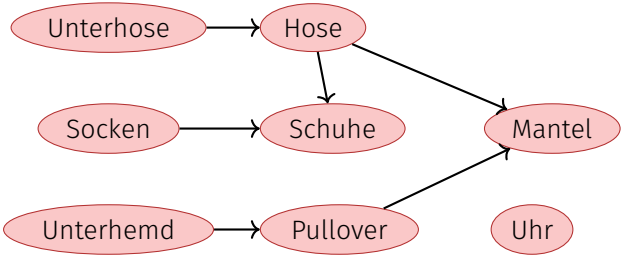
$$\mathrm{ord}(v) < \mathrm{ord}(w) \; \forall \; (v, w) \in E.$$

Identifizieren Wert i mit dem Element $v_i := \mathrm{ord}^{-1}(i)$. Topologische Sortierung $\widehat{=} \langle v_1, \ldots, v_{|V|} \rangle$.

(Gegen-)Beispiele



Zyklischer Graph: kann nicht topologisch sortiert werden.



Eine mögliche Topologische Sortierung des Graphen:
Unterhemd,Pullover,Unterhose,Uhr,Hose,Mantel,Socken,S

Beobachtung

Theorem 7

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann eine topologische Sortierung, wenn er kreisfrei ist

Beweis "$\Rightarrow$": Wenn G einen Kreis besitzt, so besitzt er keine topologische Sortierung. Denn in einem Kreis $\langle v_{i_1}, \ldots, v_{i_m} \rangle$ gälte $v_{i_1} < \cdots < v_{i_m} < v_{i_1}$.

Induktiver Beweis Gegenrichtung

- Anfang ($n = 1$): Graph mit einem Knoten ohne Schleife ist topologisch sortierbar. Setze $\mathrm{ord}(v_1) = 1$.
- Hypothese: Graph mit n Knoten kann topologisch sortiert werden.
- Schritt ($n \to n + 1$):

1. G enthält einen Knoten v_q mit Eingangsgrad $\deg^-(v_q) = 0$. Andernfalls verfolge iterativ Kanten rückwärts – nach spätestens $n + 1$ Iterationen würde man einen Knoten besuchen, welcher bereits besucht wurde. Widerspruch zur Zyklenfreiheit.
2. Graph ohne Knoten v_q und ohne dessen Eingangskanten kann nach Hypothese topologisch sortiert werden. Verwende diese Sortierung, setze $\mathrm{ord}(v_i) \leftarrow \mathrm{ord}(v_i) + 1$ für alle $i \neq q$ und setze $\mathrm{ord}(v_q) \leftarrow 1$.

Algorithmus, vorläufiger Entwurf

Graph $G = (V, E)$. $d \leftarrow 1$

1. Traversiere von beliebigem Knoten rückwärts bis ein Knoten v_q mit Eingangsgrad 0 gefunden ist.
2. Wird kein Knoten mit Eingangsgrad 0 gefunden (n Schritte), dann Zyklus gefunden.
3. Setze $\mathrm{ord}(v_q) \leftarrow d$.
4. Entferne v_q und seine Kanten von G.
5. Wenn $V \neq \emptyset$, dann $d \leftarrow d + 1$, gehe zu Schritt 1.

Laufzeit im schlechtesten Fall: $\Theta(|V|^2)$.

Verbesserung

Idee?

Berechne die Eingangsgrade der Knoten im Voraus und durchlaufe dann jeweils die Knoten mit Eingangsgrad 0 die Eingangsgrade der Nachfolgeknoten korrigierend.

Algorithmus Topological-Sort(G)

Input: Graph $G = (V, E)$.
Output: Topologische Sortierung ord

```
Stack S ← ∅
foreach v ∈ V do A[v] ← 0
foreach (v, w) ∈ E do A[w] ← A[w] + 1 // Eingangsgrade berechnen
foreach v ∈ V with A[v] = 0 do push(S, v) // Merke Nodes mit Eingangsgrad 0
i ← 1
while S ≠ ∅ do
    v ← pop(S); ord[v] ← i; i ← i + 1 // Wähle Knoten mit Eingangsgrad 0
    foreach (v, w) ∈ E do // Verringere Eingangsgrad der Nachfolger
        A[w] ← A[w] − 1
        if A[w] = 0 then push(S, w)
if i = |V| + 1 then return ord else return "Cycle Detected"
```

Algorithmus Korrektheit

Theorem 8

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, kreisfreier Graph. Der Algorithmus `TopologicalSort`(G) *berechnet in Zeit $\Theta(|V| + |E|)$ eine topologische Sortierung ord für G.*

Beweis: folgt im wesentlichen aus vorigem Theorem:

1. Eingangsgrad verringern entspricht Knotenentfernen.
2. Im Algorithmus gilt für jeden Knoten v mit $A[v] = 0$ dass entweder der Knoten Eingangsgrad 0 hat oder dass zuvor alle Vorgänger einen Wert $\mathrm{ord}[u] \leftarrow i$ zugewiesen bekamen und somit $\mathrm{ord}[v] > \mathrm{ord}[u]$ für alle Vorgänger u von v. Knoten werden nur einmal auf den Stack gelegt.
3. Laufzeit: Inspektion des Algorithmus (mit Argumenten wie beim Traversieren).

Algorithmus Korrektheit

Theorem 9

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, nicht kreisfreier Graph. Der Algorithmus `TopologicalSort`*(G) terminiert in Zeit $\Theta(|V|+|E|)$ und detektiert Zyklus.*

Beweis: Sei $\langle v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \rangle$ ein Kreis in G. In jedem Schritt des Algorithmus bleibt $A[v_{i_j}] \geq 1$ für alle $j = 1, \ldots, k$. Also werden k Knoten nie auf den Stack gelegt und somit ist zum Schluss $i \leq V + 1 - k$.

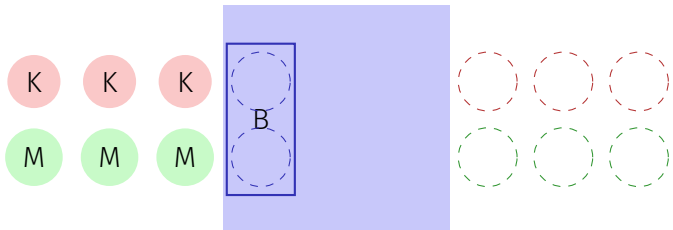
Die Laufzeit des zweiten Teils des Algorithmus kann kürzer werden, jedoch kostet die Berechnung der Eingangsgrade bereits $\Theta(|V| + |E|)$.

13. Kürzeste Wege

Motivation, Universeller Algorithmus, Dijkstras Algorithmus auf Distanzgraphen,
[Ottman/Widmayer, Kap. 9.5.1-9.5.2 Cormen et al, Kap. 24.1-24.3]

Flussüberquerung (Missionare und Kannibalen)

Problem: Drei Kannibalen und drei Missionare stehen an einem Ufer eines Flusses. Ein dort bereitstehendes Boot fasst maximal zwei Personen. Zu keiner Zeit dürfen an einem Ort (Ufer oder Boot) mehr Kannibalen als Missionare sein. Wie kommen die Missionare und Kannibalen möglichst schnell über den Fluss? [16]



[16] Es gibt leichte Variationen dieses Problems, es ist auch äquivalent zum Problem der eifersüchtigen Ehemänner

Formulierung als Graph

Zähle alle erlaubten Konfigurationen als Knoten auf und verbinde diese mit einer Kante, wenn Überfahrt möglich ist. Das Problem ist dann ein Problem des kürzesten Pfades

Beispiel

	links	rechts
Missionare	3	0
Kannibalen	3	0
Boot	x	

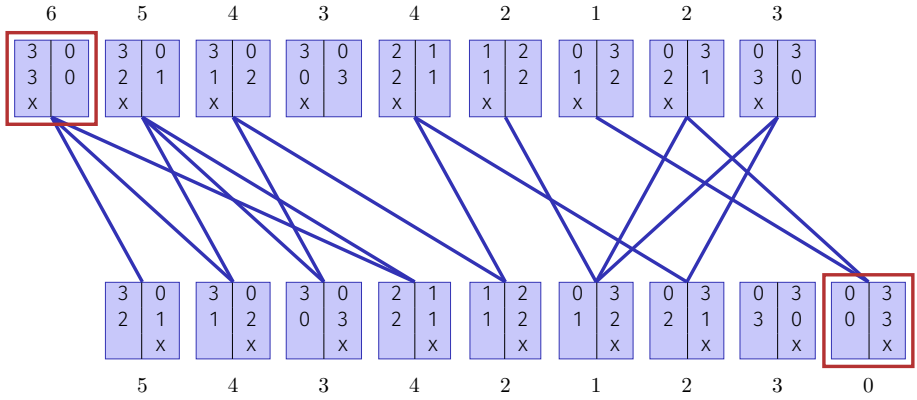
6 Personen am linken Ufer

Überfahrt möglich

	links	rechts
Missionare	2	1
Kannibalen	2	1
Boot		x

4 Personen am linken Ufer

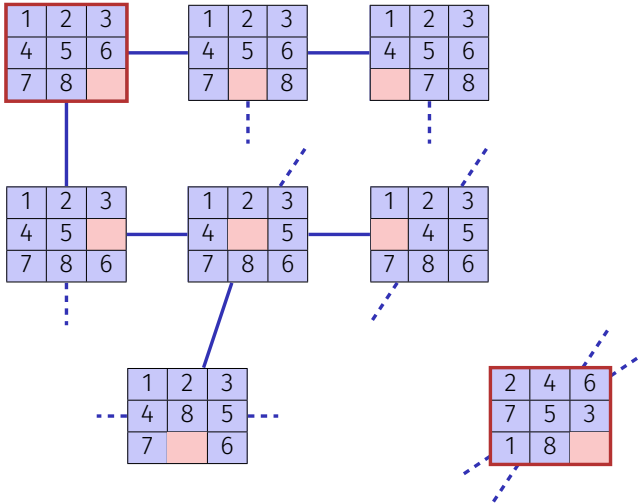
Das ganze Problem als Graph



Anderes Beispiel: Schiebepuzzle

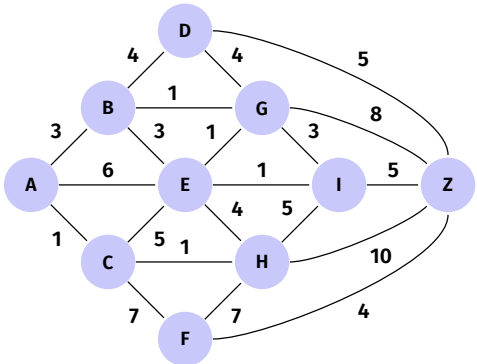
Wollen die schnelleste Lösung finden für

Problem als Graph



Routenfinder

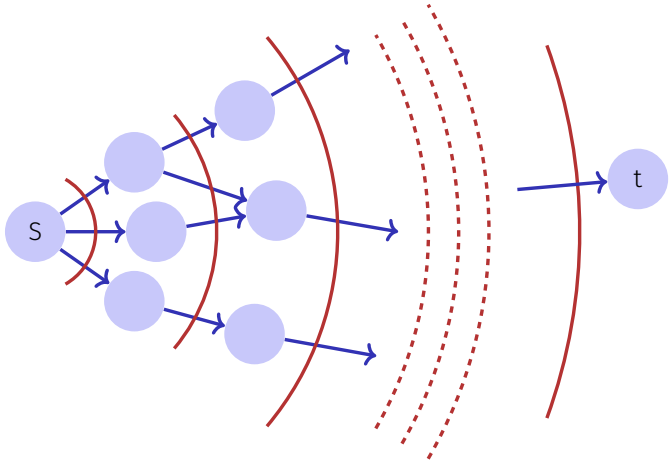
Gegeben Städte A - Z und Distanzen zwischen den Städten.



Was ist der kürzeste Weg von A nach Z?

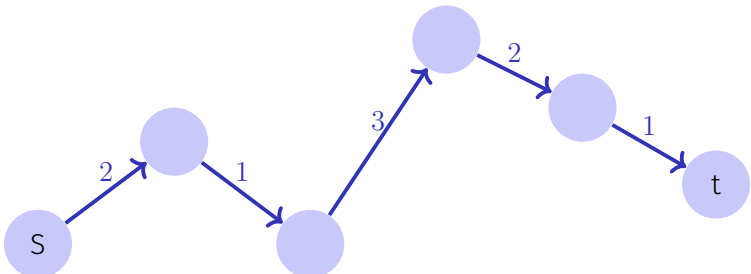
Einfachster Fall

Konstantes Kantengewicht 1 (oBdA)
Lösung: Breitensuche



Gewichtete Graphen

Gegeben: $G = (V, E, c)$, $c : E \to \mathbb{R}$, $s, t \in V$.
Gesucht: Länge (Gewicht) eines kürzesten Weges von s nach t.
Weg: $p = \langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t \rangle$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$ $(0 \leq i < k)$
Gewicht: $c(p) := \sum_{i=0}^{k-1} c((v_i, v_{i+1}))$.



Weg mit Gewicht 9

Kürzeste Wege

Notation: Wir schreiben

$$u \overset{p}{\rightsquigarrow} v \qquad \text{oder} \qquad p : u \rightsquigarrow v$$

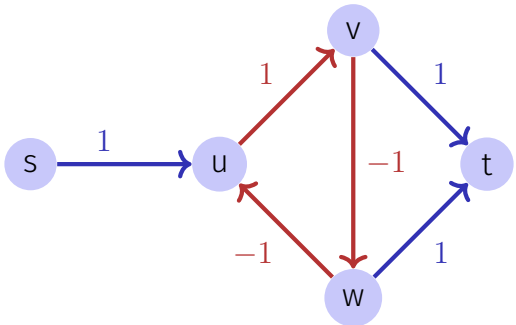
und meinen einen Weg p von u nach v

Notation: $\delta(u, v)$ = Gewicht eines kürzesten Weges von u nach v:

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \infty & \text{kein Weg von } u \text{ nach } v \\ \min\{c(p) : u \overset{p}{\rightsquigarrow} v\} & \text{sonst} \end{cases}$$

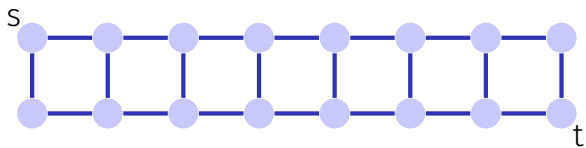
Beobachtungen (1)

Es gibt Situationen, in denen kein kürzester Weg existiert: negative Zyklen könnten auftreten.



Beobachtungen (2)

Es kann exponentiell viele Wege geben.



(mindestens $2^{|V|/2}$ Wege von s nach t)

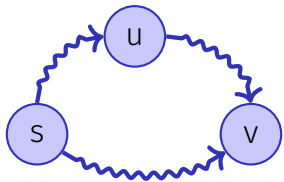
$\Rightarrow$ Alle Wege probieren ist zu ineffizient.

Beobachtungen (3)

Dreiecksungleichung

Für alle $s, u, v \in V$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + \delta(u, v)$$

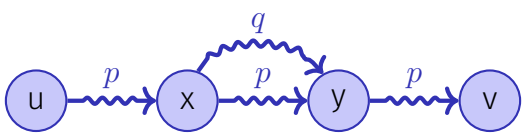


Ein kürzester Weg von s nach v (ohne weitere Einschränkungen) kann nicht länger sein als ein kürzester Weg von s nach v, der u enthalten muss.

Beobachtungen (4)

Optimale Substruktur

Teilpfade von kürzesten Pfaden sind kürzeste Pfade: Sei $p = \langle v_0, \ldots, v_k \rangle$ ein kürzester Pfad von v_0 nach v_k. Dann ist jeder der Teilpfade $p_{ij} = \langle v_i, \ldots, v_j \rangle$ $(0 \leq i < j \leq k)$ ein kürzester Pfad von v_i nach v_j.



Wäre das nicht so, könnte man einen der Teilpfade kürzen, Widerspruch zur Voraussetzung.

Beobachtungen (5)

Kürzeste Wege enthalten keine Zyklen

1. Kürzester Weg enthält negativen Zyklus: es exisitiert kein kürzester Weg. Widerspruch.
2. Weg enthält positiven Zyklus: Weglassen des positiven Zyklus kann den Weg verkürzen: Widerspruch
3. Weg enthält Zyklus vom Gewicht 0: Weglassen des Zyklus verändert das Pfadgewicht nicht. Weglassen (Konvention).

Zutaten für einen Algorithmus

Gesucht: Kürzeste Wege von einem Startknoten s aus.

- Gewicht des kürzesten bisher gefundenen Pfades

$$d_s : V \to \mathbb{R}$$

  Zu Beginn: $d_s[v] = \infty$ für alle Knoten $v \in V$.
  Ziel: $d_s[v] = \delta(s, v)$ für alle $v \in V$.

- Vorgänger eines Knotens

$$\pi_s : V \to V$$

  Zu Beginn $\pi_s[v]$ undefiniert für jeden Knoten $v \in V$

Allgemeiner Algorithmus

1. Initialisiere d_s und π_s: $d_s[v] = \infty$, $\pi_s[v] =$ null für alle $v \in V$
2. Setze $d_s[s] \leftarrow 0$
3. Wähle eine Kante $(u, v) \in E$

   Relaxiere (u, v):
   if $d_s[v] > d[u] + c(u, v)$ then
   $d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u, v)$
   $\pi_s[v] \leftarrow u$
4. Wiederhole 3 bis nichts mehr relaxiert werden kann.
   (bis $d_s[v] \leq d_s[u] + c(u, v) \quad \forall (u, v) \in E$)

Relaxieren ist sicher

Zu jeder Zeit gilt in obigem Algorithmus

$$d_s[v] \geq \delta(s,v) \quad \forall v \in V$$

Im Relaxierschritt:

$$\begin{aligned} & \delta(s,v) \leq \delta(s,u) + \delta(u,v) && \text{[Dreiecksungleichung].} \\ & \delta(s,u) \leq d_s[u] && \text{[Induktionsvorraussetzung].} \\ & \delta(u,v) \leq c(u,v) && \text{[Minimalität von } \delta\text{]} \\ \Rightarrow \quad & d_s[u] + c(u,v) \geq \delta(s,v) \end{aligned}$$

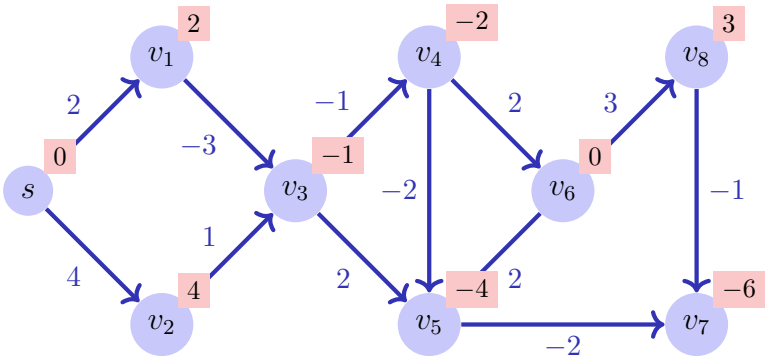
$$\Rightarrow \min\{d_s[v], d_s[u] + c(u,v)\} \geq \delta(s,v)$$

Zentrale Frage

Wie / in welcher Reihenfolge wählt man die Kanten in obigem Algorithmus?

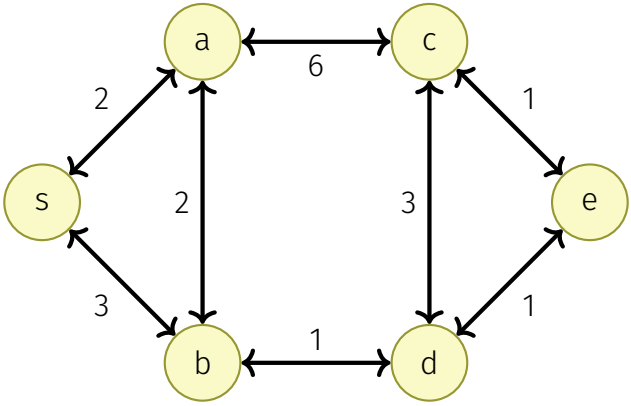
Spezialfalfall: Gerichteter Azyklischer Graph (DAG)

DAG $\Rightarrow$ Topologische Sortierung liefert optimale Besuchsreihenfolge



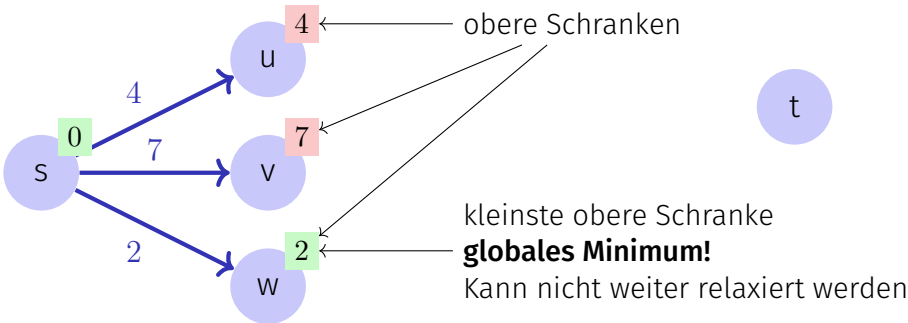
Top. Sortieren: $\Rightarrow$ Reihenfolge $s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_5, v_8, v_7$.

Annahme (vorübergehend)



Alle Gewichte von G sind **positiv**.

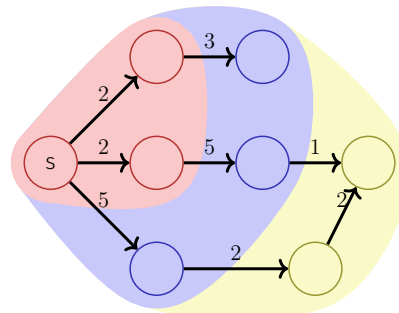
Beobachtung (Dijkstra)



Grundidee

Menge V aller Knoten wird unterteilt in

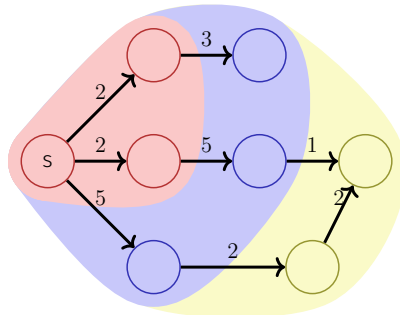
- die Menge M von Knoten, für die schon ein kürzester Weg von s bekannt ist
- die Menge $R = \bigcup_{v \in M} N^+(v) \setminus M$ von Knoten, für die kein kürzester Weg bekannt ist, die jedoch von M direkt erreichbar sind.
- die Menge $U = V \setminus (M \cup R)$ von Knoten, die noch nicht berücksichtigt wurden.



Induktion

Induktion über $|M|$: Wähle Knoten aus R mit kleinster oberer Schranke. Nimm r zu M hinzu, und update R und U.

Korrektheit: Ist innerhalb einer "Wellenfront" einmal ein Knoten mit minimalem Pfadgewicht w gefunden, kann kein Pfad über später gefundene Knoten (mit Gewicht $\geq w$) zu einer Verbesserung führen.

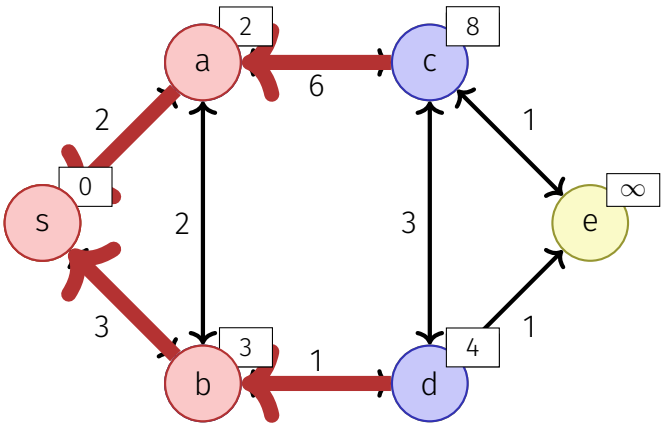


Algorithmus Dijkstra(G, s)

Input: Positiv gewichteter Graph $G = (V, E, c)$, Startpunkt $s \in V$
Output: Minimale Gewichte d der kürzesten Pfade und Vorgängerknoten für jeden Knoten.

foreach $u \in V$ **do**
    $d_s[u] \leftarrow \infty$; $\pi_s[u] \leftarrow$ **null**
$d_s[s] \leftarrow 0$; $R \leftarrow \{s\}$
while $R \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow$ ExtractMin(R)
    foreach $v \in N^+(u)$ **do**
        if $d_s[u] + c(u, v) < d_s[v]$ **then**
            $d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u, v)$
            $\pi_s[v] \leftarrow u$
            $R \leftarrow R \cup \{v\}$

Beispiel



$$M = \{s, a, b\}$$

$$R = \{c, d\}$$

$$U = \{e\}$$

Zur Implementation: Datenstruktur für R?

Benötigte Operationen:

- Insert (Hinzunehmen zu R)
- ExtractMin (über R) und DecreaseKey (Update in R)

foreach $v \in N^+(u)$ **do**
  if $d_s[u] + c(u,v) < d_s[v]$ **then**
    $d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u,v)$
    $\pi_s[v] \leftarrow u$
    if $v \in R$ **then**
      DecreaseKey(R, v) // Update eines $d(v)$ im Heap zu R
    else
      $R \leftarrow R \cup \{v\}$ // Einfügen eines neuen $d(v)$ im Heap zu R

MinHeap!

DecreaseKey

- DecreaseKey: Aufsteigen im MinHeap in $\mathcal{O}(\log |V|)$
- Position im Heap?
  - Möglichkeit (a): Speichern am Knoten
  - Möglichkeit (b): Hashtabelle über Knoten
  - Möglichkeit (c): Knoten nach erfolgreichem Relaxieren erneut einfügen. Knoten beim Entnehmen als "deleted" kennzeichnen (Lazy Deletion).[17]

[17] Für die lazy deletion benötigt man ein Paar von Kante (oder Zielknoten) und Distanz

Laufzeit

- $|V|\times$ ExtractMin: $\mathcal{O}(|V| \log |V|)$
- $|E|\times$ Insert oder DecreaseKey: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$
- $1\times$ Init: $\mathcal{O}(|V|)$
- Insgesamt: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$.

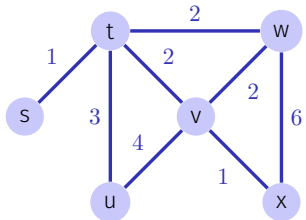
14. Minimale Spannbäume

Motivation, Greedy, Algorithmus von Kruskal, Allgemeine Regeln,
Union-Find Struktur, Algorithmus von Jarnik, Prim, Dijkstra
[Ottman/Widmayer, Kap. 9.6, 6.2, 6.1, Cormen et al, Kap. 23, 19]

Problem

Gegeben: Ungerichteter, zusammenhängender, gewichteter Graph $G = (V, E, c)$.

Gesucht: Minimaler Spannbaum $T = (V, E')$: zusammenhängender, zyklenfreier Teilgraph $E' \subset E$, so dass $\sum_{e \in E'} c(e)$ minimal.



Beispiele von Anwendungen

- Netzwerk-Design: finde das billigste / kürzeste Netz oder Leitungssystem, welches alle Knoten miteinander verbindet.
- Approximation einer Lösung des Travelling-Salesman Problems: finde einen möglichst kurzen Rundweg, welcher jeden Knoten einmal besucht.[18]

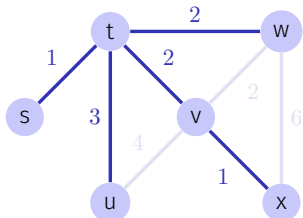
[18] Der beste bekannte Algorithmus zur exakten Lösung des TS Problems hat exponentielle Laufzeit

Greedy Verfahren

- Gierige Verfahren berechnen eine Lösung schrittweise, indem lokal beste Lösungen gewählt werden.
- Die meisten Probleme sind nicht mit einer greedy Strategie lösbar.
- Das Problem des Minimalen Spannbaumes kann mit einem gierigen Verfahren effizient gelöst werden.

Greedy Idee (Kruskal, 1956)

Konstruiere T indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

Algorithmus MST-Kruskal(G)

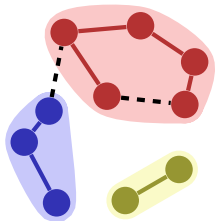
Input: Gewichteter Graph $G = (V, E, c)$
Output: Minimaler Spannbaum mit Kanten A.

Sortiere Kanten nach Gewicht $c(e_1) \leq ... \leq c(e_m)$
$A \leftarrow \emptyset$
for $k = 1$ **to** $|E|$ **do**
    if $(V, A \cup \{e_k\})$ kreisfrei **then**
        $A \leftarrow A \cup \{e_k\}$

return (V, A, c)

Zur Implementation

Gegeben eine Menge von Mengen $i \equiv A_i \subset V$. Zur Identifikation von Schnitten und Kreisen: Zugehörigkeit der beiden Endpunkte einer Kante zu einer der Mengen.



Zur Implementation

Allgemeines Problem: Partition (Menge von Teilmengen) z.B.
$\{\{1, 2, 3, 9\}, \{7, 6, 4\}, \{5, 8\}, \{10\}\}$
Benötigt: Abstrakter Datentyp „Union-Find“ mit folgenden Operationen

- Make-Set(i): Hinzufügen einer neuen Menge i.
- Find(e): Name i der Menge, welche e enthält.
- Union(i, j): Vereingung der Mengen mit Namen i und j.

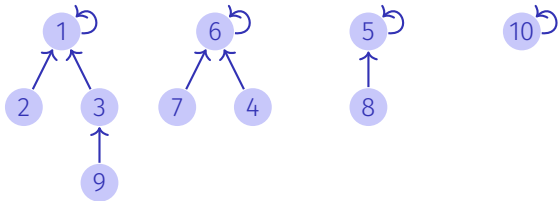
Union-Find Algorithmus MST-Kruskal(G)

Input: Gewichteter Graph $G = (V, E, c)$
Output: Minimaler Spannbaum mit Kanten A.

Sortiere Kanten nach Gewicht $c(e_1) \leq ... \leq c(e_m)$
$A \leftarrow \emptyset$
for $k = 1$ **to** $|V|$ **do**
  MakeSet(k)
for $k = 1$ **to** m **do**
  $(u, v) \leftarrow e_k$
  if Find(u) $\neq$ Find(v) **then**
    Union(Find(u), Find(v))
    $A \leftarrow A \cup e_k$
  else // konzeptuell: $R \leftarrow R \cup e_k$
return (V, A, c)

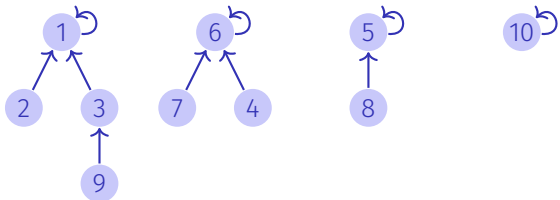
Implementation Union-Find

Idee: Baum für jede Teilmenge in der Partition, z.B.
$\{\{1,2,3,9\},\{7,6,4\},\{5,8\},\{10\}\}$



Baumwurzeln = Namen (Stellvertreter) der Mengen,
Bäume = Elemente der Mengen

Implementation Union-Find



Repräsentation als Array:

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parent	1	1	1	6	5	6	5	5	3	10

Implementation Union-Find

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parent	1	1	1	6	5	6	5	5	3	10

Make-Set(i)	$p[i] \leftarrow i$; **return** i
Find(i)	**while** $(p[i] \neq i)$ **do** $i \leftarrow p[i]$ **return** i
Union(i, j) [19]	$p[j] \leftarrow i$;

[19] i und j müssen Namen (Wurzeln) der Mengen sein. Andernfalls verwende Union(Find(i),Find(j))

Optimierung der Laufzeit für Find

Baum kann entarten: Beispiel Union$(8,7)$, Union$(7,6)$, Union$(6,5)$, ...

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	..
Parent	1	1	2	3	4	5	6	7	..

Laufzeit von Find im schlechtesten Fall in $\Theta(n)$.

Optimierung der Laufzeit für Find

Idee: Immer kleineren Baum unter grösseren Baum hängen. Benötigt zusätzliche Grösseninformation (Array) g

Make-Set(i)	$p[i] \leftarrow i$; $g[i] \leftarrow 1$; **return** i
Union(i, j)	**if** $g[j] > g[i]$ **then** swap(i, j) $p[j] \leftarrow i$ **if** $g[i] = g[j]$ **then** $g[i] \leftarrow g[i] + 1$

$\Rightarrow$ Baumtiefe (und schlechteste Laufzeit für Find) in $\Theta(\log n)$

Weitere Verbesserung

Bei jedem Find alle Knoten direkt an den Wurzelknoten hängen.

Find(i):

$j \leftarrow i$
while $(p[i] \neq i)$ **do** $i \leftarrow p[i]$
while $(j \neq i)$ **do**
    $t \leftarrow j$
    $j \leftarrow p[j]$
    $p[t] \leftarrow i$
return i

Laufzeit: amortisiert *fast* konstant (Inverse der Ackermannfunktion).[20]

[20] Wird hier nicht vertieft.

Laufzeit des Kruskal Algorithmus

- Sortieren der Kanten: $\Theta(|E| \log |E|) = \Theta(|E| \log |V|)$. [21]
- Initialisieren der Union-Find Datenstruktur $\Theta(|V|)$
- $|E|\times$ Union(Find(x),Find(y)): $\mathcal{O}(|E| \log |E|) = \mathcal{O}(|E| \log |V|)$.

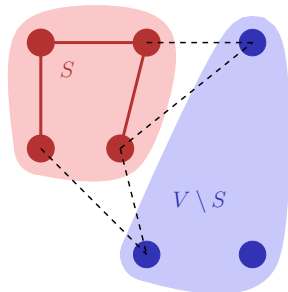
Insgesamt $\Theta(|E| \log |V|)$.

[21] da G zusammenhängend: $|V| \leq |E| \leq |V|^2$

Algorithmus von Jarnik (1930), Prim, Dijkstra (1959)

Idee: Starte mit einem $v \in V$ und lasse von dort unter Verwendung der Auswahlregel einen Spannbaum wachsen:

$A \leftarrow \emptyset$
$S \leftarrow \{v_0\}$
for $i \leftarrow 1$ **to** $|V|$ **do**
  Wähle billigste (u, v) mit $u \in S$, $v \notin S$
  $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
  $S \leftarrow S \cup \{v\}$ // (Färbung)



Anmerkung: man benötigt keine Union-Find Datenstruktur. Es genügt, Knoten zu färben, sobald sie zu S hinzugenommen werden.

Laufzeit

Trivial $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.
Verbesserung (wie bei Dijkstras Kürzeste Pfade):

- Mit Min-Heap, Kosten:
  - Initialisierung (Knotenfärbung) $\mathcal{O}(|V|)$
  - $|V|\times$ ExtractMin = $\mathcal{O}(|V| \log |V|)$,
  - $|E|\times$ Insert oder DecreaseKey: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$,

$\mathcal{O}(|E| \cdot \log |V|)$

15. Flüsse in Netzen

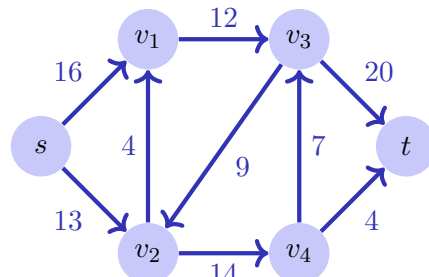
Flussnetzwerk, Maximaler Fluss, Schnitt, Restnetzwerk, Max-flow Min-cut Theorem, Ford-Fulkerson Methode, Edmonds-Karp Algorithmus, Maximales Bipartites Matching [Ottman/Widmayer, Kap. 9.7, 9.8.1], [Cormen et al, Kap. 26.1-26.3]

Motivation

- Modelliere Fluss von Flüssigkeiten, Bauteile auf Fliessbändern, Strom in elektrischen Netwerken oder Information in Kommunikationsnetzwerken.
- Konnektivität von Kommunikationsnetzwerken, Bipartites Matching, Zirkulationen, Scheduling, Image Segmentation, Baseball Elimininationen...

Flussnetzwerk

- **Flussnetzwerk** $G = (V, E, c)$: gerichteter Graph mit **Kapazitäten**
- Antiparallele Kanten verboten: $(u, v) \in E \;\Rightarrow\; (v, u) \notin E$.
- Fehlen einer Kante (u, v) auch modelliert durch $c(u, v) = 0$.
- **Quelle** s und **Senke** t: spezielle Knoten. Jeder Knoten v liegt auf einem Pfad zwischen s und t : $s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$

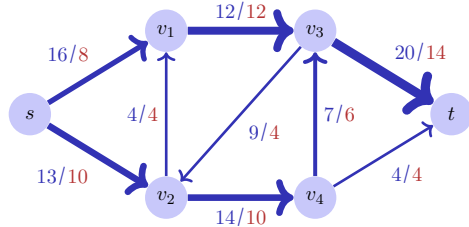


Fluss

Ein **Fluss** $f : V \times V \to \mathbb{R}$ erfüllt folgende Bedingungen:

- **Kapazitätsbeschränkung**:
  Für alle $u, v \in V$: $f(u, v) \leq c(u, v)$.
- **Schiefsymmetrie**:
  Für alle $u, v \in V$: $f(u, v) = -f(v, u)$.
- **Flusserhaltung**:
  Für alle $u \in V \setminus \{s, t\}$:

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = 0.$$



Wert w des Flusses:
$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$.
Hier $|f| = 18$.

Wie gross kann ein Fluss sein?

Begrenzende Faktoren: Schnitte

- s **von** t **trennender Schnitt**: Partitionierung von V in S und T mit $s \in S$, $t \in T$.
- **Kapazität** eines Schnittes: $c(S,T) = \sum_{v \in S, v' \in T} c(v,v')$
- **Minimaler Schnitt**: Schnitt mit minimaler Kapazität.
- **Fluss über Schnitt**: $f(S,T) = \sum_{v \in S, v' \in T} f(v,v')$

Implizites Summieren

Notation: Seien $U, U' \subseteq V$

$$f(U, U') := \sum_{\substack{u \in U \\ u' \in U'}} f(u, u'), \qquad f(u, U') := f(\{u\}, U')$$

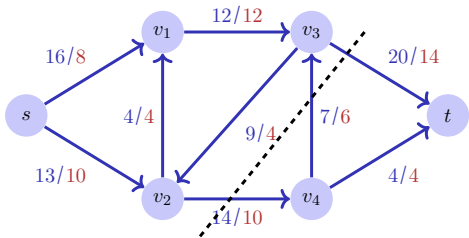
Somit

- $|f| = f(s, V)$
- $f(U, U) = 0$
- $f(U, U') = -f(U', U)$
- $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$, wenn $X \cap Y = \emptyset$.
- $f(R, V) = 0$ wenn $R \cap \{s, t\} = \emptyset$. [Flusserhaltung!]

Wie gross kann ein Fluss sein?

Es gilt für jeden Fluss und jeden Schnitt, dass $f(S,T) = |f|$:

$$f(S,T) = f(S,V) - \underbrace{f(S,S)}_{0} = f(S,V)$$
$$= f(s,V) + f(\underbrace{S - \{s\}}_{\not\ni t, \not\ni s}, V) = |f|.$$

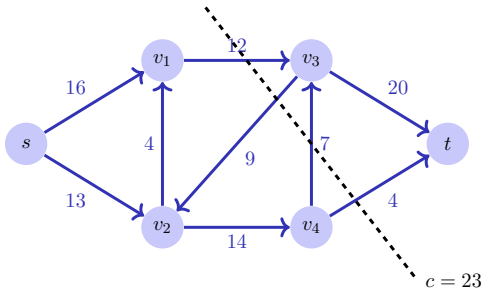


Maximaler Fluss ?

Es gilt insbesondere für alle Schnitte (S, T) von V.

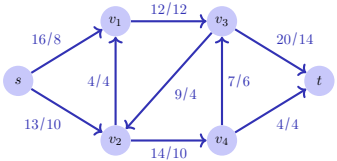
$$|f| \leq \sum_{v \in S, v' \in T} c(v, v') = c(S, T)$$

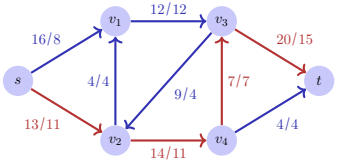
Werden sehen, dass Gleicheit gilt für $\min_{S,T} c(S, T)$.

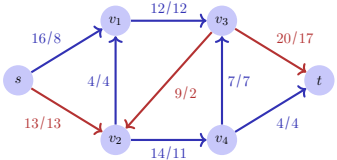


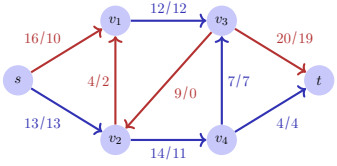
Maximaler Fluss ?

Naives Vorgehen:









Folgerung: Greedy Flusserhöhung löst das Problem nicht.

Die Ford-Fulkerson Methode

- Starte mit $f(u, v) = 0$ für alle $u, v \in V$
- Bestimme Restnetzwerk* G_f und Erweiterungspfad in G_f
- Erhöhe Fluss über den Erweiterungspfad*
- Wiederholung bis kein Erweiterungspfad mehr vorhanden.

$$
\begin{aligned}
G_f &:= (V, E_f, c_f) \\
c_f(u, v) &:= c(u, v) - f(u, v) \quad \forall u, v \in V \\
E_f &:= \{(u, v) \in V \times V | c_f(u, v) > 0\}
\end{aligned}
$$

*Wird im Folgenden erklärt

Flusserhöhung, negativ

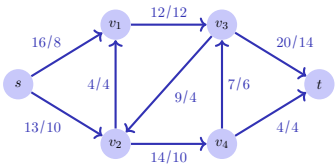
Sei ein Fluss f im Netzwerk gegeben.

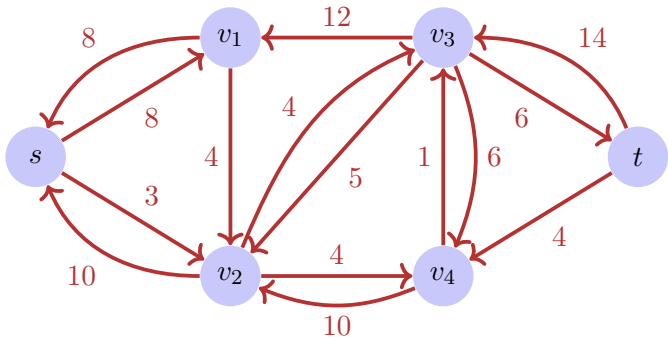
Erkenntnis:

- Flusserhöhung in Richtung einer Kante möglich, wenn Fluss entlang der Kante erhöht werden kann, also wenn $f(u,v) < c(u,v)$.
  Restkapazität $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v) > 0$.
- Flusserhöhung **entgegen** der Kantenrichtung möglich, wenn Fluss entlang der Kante verringert werden kann, also wenn $f(u,v) > 0$.
  Restkapazität $c_f(v,u) = f(u,v) > 0$.

Restnetzwerk

Restnetzwerk G_f gegeben durch alle Kanten mit Restkapazität:





Restnetzwerke haben dieselben Eigenschaften wie Flussnetzwerke, ausser dass antiparallele Kapazitäten-Kanten zugelassen sind.

Beobachtung

Theorem 10

Sei $G = (V, E, c)$ ein Flussnetzwerk mit Quelle s und Senke t und f ein Fluss in G. Sei G_f das dazugehörige Restnetzwerk und sei f' ein Fluss in G_f. Dann definiert $f \oplus f'$ mit

$$(f \oplus f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v)$$

einen Fluss in G mit Wert $|f| + |f'|$.

Beweis

$f \oplus f'$ ist ein Fluss in G:

- Kapazitätsbeschränkung

$$(f \oplus f')(u,v) = f(u,v) + \underbrace{f'(u,v)}_{\leq c(u,v) - f(u,v)} \leq c(u,v)$$

- Schiefsymmetrie

$$(f \oplus f')(u,v) = -f(v,u) + -f'(v,u) = -(f \oplus f')(v,u)$$

- Flusserhaltung $u \in V - \{s,t\}$:

$$\sum_{v \in V} (f \oplus f')(u,v) = \sum_{v \in V} f(u,v) + \sum_{v \in V} f'(u,v) = 0$$

Beweis

Wert von $f \oplus f'$

$$\begin{aligned} |f \oplus f'| &= (f \oplus f')(s, V) \\ &= \sum_{u \in V} f(s,u) + f'(s,u) \\ &= f(s,V) + f'(s,V) \\ &= |f| + |f'| \end{aligned}$$

■

Erweiterungspfade

Erweiterungspfad p: einfacher Pfad von s nach t im Restnetzwerk G_f.
Restkapazität $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ Kante in } p\}$

Fluss in G_f

Theorem 11

Die Funktion $f_p : V \times V \to \mathbb{R}$,

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{wenn } (u,v) \text{ Kante in } p \\ -c_f(p) & \text{wenn } (v,u) \text{ Kante in } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein Fluss in G_f *mit dem Wert* $|f_p| = c_f(p) > 0$.

f_p ist ein Fluss (leicht nachprüfbar). Es gibt genau einen Knoten $u \in V$ mit $(s,u) \in p$. Somit $|f_p| = \sum_{v \in V} f_p(s,v) = f_p(s,u) = c_f(p)$.

Folgerung

Strategie für den Algorithmus:
Mit einem Erweiterungspfad p in G_f definiert $f \oplus f_p$ einen neuen Fluss mit Wert $|f \oplus f_p| = |f| + |f_p| > |f|$.

Max-Flow Min-Cut Theorem

Theorem 12

Wenn f ein Fluss in einem Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ mit Quelle s und Senke t is, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist ein maximaler Fluss in G*
2. *Das Restnetzwerk G_f enthält keine Erweiterungspfade*
3. *Es gilt $|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T) von G.*

Algorithmus Ford-Fulkerson(G, s, t)

Input: Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$
Output: Maximaler Fluss f.

for $(u, v) \in E$ **do**
  $f(u, v) \leftarrow 0$

while Existiert Pfad $p : s \rightsquigarrow t$ im Restnetzwerk G_f **do**
  $c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$
  foreach $(u, v) \in p$ **do**
    $f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(p)$
    $f(v, u) \leftarrow f(v, u) - c_f(p)$

Praktische Anmerkung

In einer Implementation des Ford-Fulkerson Algorithmus werden die negativen Flusskanten normalerweise nicht gespeichert, da ihr Wert sich stets als der negierter Wert der Gegenkante ergibt.

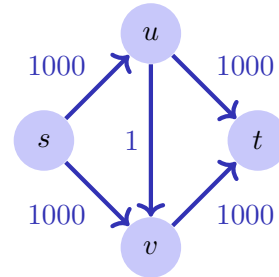
$f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(p)$
$f(v, u) \leftarrow f(v, u) - c_f(p)$

wird dann zu

if $(u, v) \in E$ **then**
  $f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(p)$
else
  $f(v, u) \leftarrow f(v, u) - c_f(p)$

Analyse

- Der Ford-Fulkerson Algorithmus muss für irrationale Kapazitäten nicht einmal terminieren! Für ganze oder rationale Zahlen terminiert der Algorithmus.
- Für ganzzahligen Fluss benötigt der Algorithmus maximal $|f_{\max}|$ Durchläufe der While-Schleife (denn der Fluss erhöht sich mindestens um 1). Suche einzelner zunehmender Weg (z.B. Tiefensuche oder Breitensuche) $\mathcal{O}(|E|)$. Also $\mathcal{O}(f_{\max}|E|)$.



Bei schlecht gewählter Strategie benötigt der Algorithmus hier bis zu 2000 Iterationen.

Edmonds-Karp Algorithmus

Wähle in der Ford-Fulkerson-Methode zum Finden eines Pfades in G_f jeweils einen Erweiterungspfad kürzester Länge (z.B. durch Breitensuche).

Edmonds-Karp Algorithmus

Theorem 13

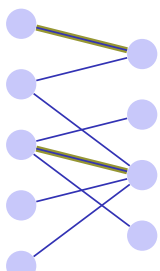
Wenn der Edmonds-Karp Algorithmus auf ein ganzzahliges Flussnetzwerk $G = (V, E)$ mit Quelle s und Senke t angewendet wird, dann ist die Gesamtanzahl der durch den Algorithmus angewendete Flusserhöhungen in $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.

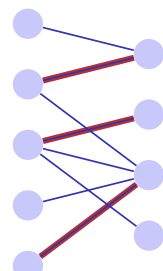
$\Rightarrow$ *Gesamte asymptotische Laufzeit:* $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$

[Ohne Beweis]

Anwendung: Maximales bipartites Matching

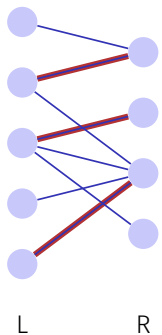
Gegeben: bipartiter ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Matching M: $M \subseteq E$ so dass $|\{m \in M : v \in m\}| \leq 1$ für alle $v \in V$.
Maximales Matching M: Matching M, so dass $|M| \geq |M'|$ für jedes Matching M'.

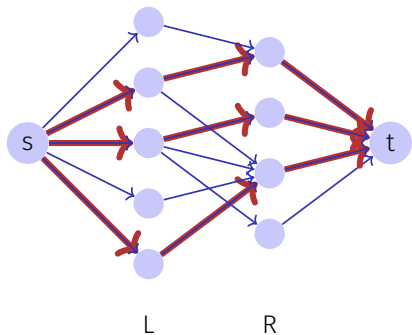




Korrespondierendes Flussnetzwerk

Konstruiere zur einer Partition L, R eines bipartiten Graphen ein korrespondierendes Flussnetzwerk mit Quelle s und Senke t, mit gerichteten Kanten von s nach L, von L nach R und von R nach t. Jede Kante bekommt Kapazität 1.





16. Dynamische Programmierung

Memoisieren, Optimale Substruktur, Überlappende Teilprobleme, Abhängigkeiten, Allgemeines Vorgehen. Beispiele: Schneiden von Eisenstangen, Kaninchen

[Ottman/Widmayer, Kap. 7.1, 7.4, Cormen et al, Kap. 15]

Fibonacci Zahlen


(schon wieder)

$$F_n := \begin{cases} n & \text{wenn } n < 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{wenn } n \geq 2. \end{cases}$$

Analyse: warum ist der rekursive Algorithmus so langsam.

Algorithmus FibonacciRecursive(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

if $n < 2$ **then**
    $f \leftarrow n$
else
    $f \leftarrow \text{FibonacciRecursive}(n-1) + \text{FibonacciRecursive}(n-2)$
return f

Analyse

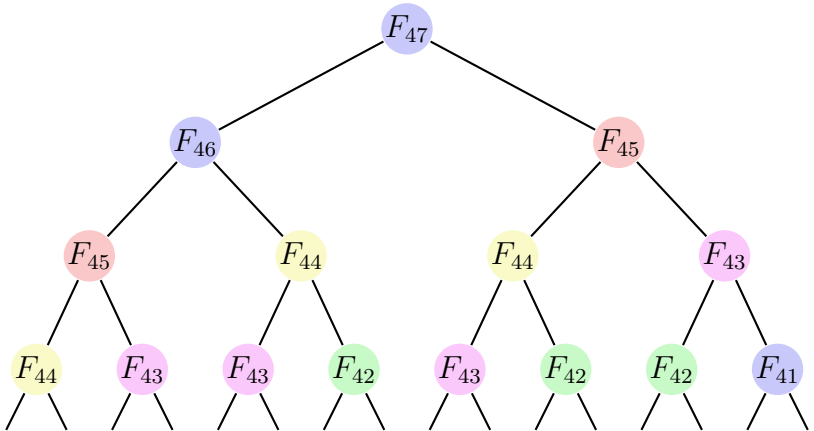
$T(n)$: Anzahl der ausgeführten Operationen.

- $n = 0, 1$: $T(n) = \Theta(1)$
- $n \geq 2$: $T(n) = T(n-2) + T(n-1) + c$.

$$T(n) = T(n-2) + T(n-1) + c \geq 2T(n-2) + c \geq 2^{n/2}c' = (\sqrt{2})^n c'$$

Algorithmus ist **exponentiell (!)** in n.

Grund, visualisiert



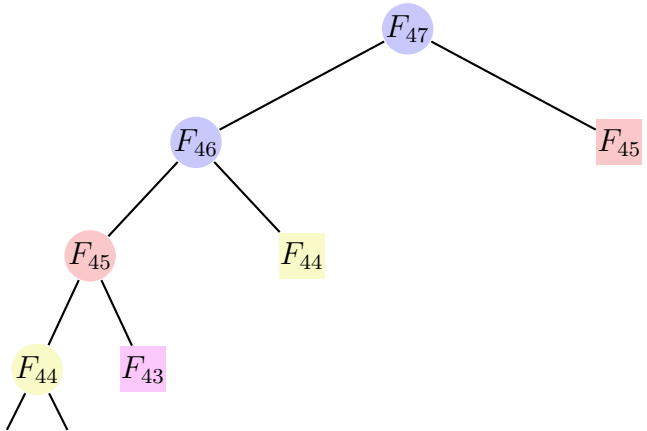
Knoten mit denselben Werten werden (zu) oft ausgewertet.

Memoization

Memoization (sic) Abspeichern von Zwischenergebnissen.

- Bevor ein Teilproblem gelöst wird, wird Existenz eines entsprechenden Zwischenergebnis geprüft.
- Existiert ein gespeichertes Zwischenergebnis bereits, so wird dieses verwendet.
- Andernfalls wird der Algorithmus ausgeführt und das Ergebnis wird entsprechend gespeichert.

Memoization bei Fibonacci



Rechteckige Knoten wurden bereits ausgewertet.

Algorithmus FibonacciMemoization(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

if $n \leq 2$ **then**
  $f \leftarrow 1$
else if $\exists$memo$[n]$ **then**
  $f \leftarrow$ memo$[n]$
else
  $f \leftarrow$ FibonacciMemoization$(n-1)$ + FibonacciMemoization$(n-2)$
  memo$[n] \leftarrow f$
return f

Analyse

Berechnungsaufwand:

$$T(n) = T(n-1) + c = ... = \mathcal{O}(n).$$

denn nach dem Aufruf von $f(n-1)$ wurde $f(n-2)$ bereits berechnet.
Das lässt sich auch so sehen: Für jedes n wird $f(n)$ maximal einmal rekursiv berechnet. Laufzeitkosten: n Aufrufe mal $\Theta(1)$ Kosten pro Aufruf $n \cdot c \in \Theta(n)$. Die Rekursion verschwindet aus der Berechnung der Laufzeit. Algorithmus benötigt $\Theta(n)$ Speicher.[22]

[22] Allerdings benötigt der naive Algorithmus auch $\Theta(n)$ Speicher für die Rekursionsverwaltung.

Genauer hingesehen ...

... berechnet der Algorithmus der Reihe nach die Werte F_1, F_2, F_3, ... verkleidet im **Top-Down** Ansatz der Rekursion.

Man kann den Algorithmus auch gleich **Bottom-Up** hinschreiben. Das ist charakteristisch für die **dynamische Programmierung**.

Algorithmus FibonacciBottomUp(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

$F[1] \leftarrow 1$
$F[2] \leftarrow 1$
for $i \leftarrow 3, \ldots, n$ **do**
  $F[i] \leftarrow F[i-1] + F[i-2]$
return $F[n]$

Dynamische Programmierung: Idee

- Aufteilen eines komplexen Problems in eine vernünftige Anzahl kleinerer Teilprobleme
- Die Lösung der Teilprobleme wird zur Lösung des komplexeren Problems verwendet
- Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

Dynamische Programmierung: Konsequenz

Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

$\Rightarrow$ Resultate werden zwischengespeichert

Wir tauschen Laufzeit gegen Speicherplatz

Dynamic Programming: Beschreibung

1. Verwalte **DP-Tabelle** mit Information zu den Teilproblemen.
   Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?
2. Berechnung der **Randfälle**.
   Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?
3. **Berechnungsreihenfolge** bestimen.
   In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?
4. Auslesen der **Lösung**.
   Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

Laufzeit (typisch) = Anzahl Einträge der Tabelle mal Aufwand pro Eintrag.

Dynamic Programming: Beschreibung am Beispiel

1. Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält n-te Fibonacci Zahl.

2. Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?

   Werte F_1 und F_2 sind unabhängig einfach “berechenbar”.

3. Berechnungsreihenfolge?

   F_i mit aufsteigenden i.

4. Rekonstruktion einer Lösung?

   F_n ist die n-te Fibonacci-Zahl.

Dynamic Programming = Divide-And-Conquer ?

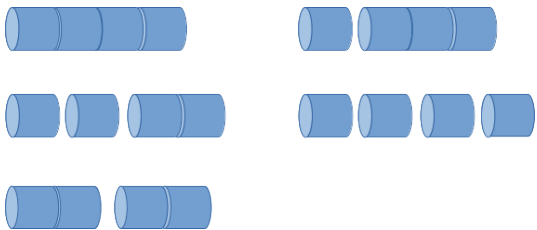
- In beiden Fällen ist das Ursprungsproblem (einfacher) lösbar, indem Lösungen von Teilproblemen herangezogen werden können. Das Problem hat **optimale Substruktur**.
- Bei Divide-And-Conquer Algorithmen (z.B. Mergesort) sind Teilprobleme unabhängig; deren Lösungen werden im Algorithmus nur einmal benötigt.
- Beim DP sind Teilprobleme nicht unabhängig. Das Problem hat **überlappende Teilprobleme**, welche im Algorithmus mehrfach gebraucht werden.
- Damit sie nur einmal gerechnet werden müssen, werden Resultate tabelliert. Dafür darf es **zwischen Teilproblemen keine zirkulären Abhängigkeiten** geben.

Schneiden von Eisenstäben

- Metallstäbe werden zerschnitten und verkauft.
- Metallstäbe der Länge $n \in \mathbb{N}$ verfügbar. Zerschneiden kostet nichts.
- Für jede Länge $l \in \mathbb{N}$, $l \leq n$ bekannt: Wert $v_l \in \mathbb{R}^+$
- Ziel: Zerschneide die Stange so (in $k \in \mathbb{N}$ Stücke), dass

$$\sum_{i=1}^{k} v_{l_i} \text{ maximal unter } \sum_{i=1}^{k} l_i = n.$$

Schneiden von Eisenstäben: Beispiel



Arten, einen Stab der Länge 4 zu zerschneiden (ohne Permutationen)

Länge	0	1	2	3	4
Preis	0	2	3	8	9

$\Rightarrow$ Bester Schnitt: 3 + 1 mit Wert 10.

Wie findet man den DP Algorithmus

0. Genaue Formulierung der gesuchten Lösung
1. Definiere Teilprobleme (und bestimme deren Anzahl)
2. Raten / Aufzählen (und bestimme die Laufzeit für das Raten)
3. Rekursion: verbinde die Teilprobleme
4. Memoisieren / Tabellieren. Bestimme die Abhängigkeiten der Teilprobleme
5. Lösung des Problems
   Laufzeit = #Teilprobleme $\times$ Zeit/Teilproblem

Struktur des Problems

0. **Gesucht:** r_n = maximal erreichbarer Wert von (ganzem oder geschnittenem) Stab mit Länge n.
1. **Teilprobleme:** maximal erreichbarer Wert r_k für alle $0 \leq k < n$
2. **Rate** Länge des ersten Stückes
3. **Rekursion**

$$r_k = \max\{v_i + r_{k-i} : 0 < i \leq k\}, \quad k > 0$$
$$r_0 = 0$$

4. **Abhängigkeit:** r_k hängt (nur) ab von den Werten v_i, $l \leq i \leq k$ und den optimalen Schnitten r_i, $i < k$
5. **Lösung** in r_n

Algorithmus RodCut(v,n)

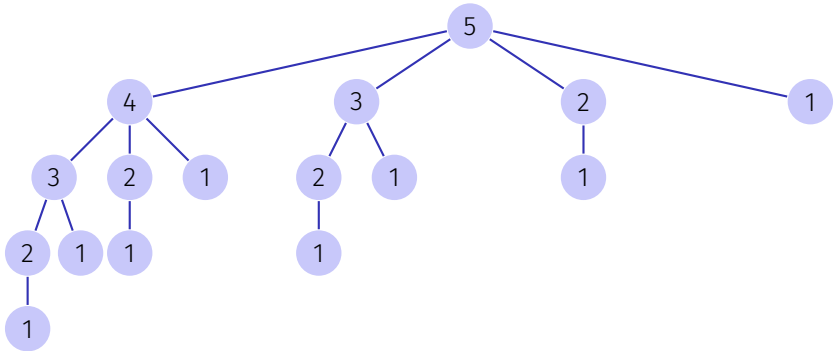
Input: $n \geq 0$, Preise v
Output: bester Wert

$q \leftarrow 0$
if $n > 0$ **then**
  for $i \leftarrow 1, \ldots, n$ **do**
    $q \leftarrow \max\{q, v_i + \mathsf{RodCut}(v, n-i)\}$;
return q

Laufzeit $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + c \quad \Rightarrow^{23} \quad T(n) \in \Theta(2^n)$

[23] $T(n) = T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + c = T(n-1) + (T(n-1) - c) + c = 2T(n-1) \quad (n > 0)$

Rekursionsbaum



Algorithmus RodCutMemoized(m, v, n)

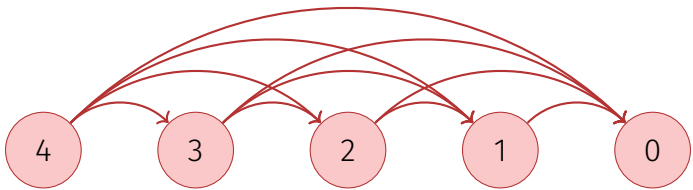
Input: $n \geq 0$, Preise v, Memoization Tabelle m
Output: bester Wert

$q \leftarrow 0$
if $n > 0$ **then**
  if $\exists\, m[n]$ **then**
    $q \leftarrow m[n]$
  else
    for $i \leftarrow 1, \ldots, n$ **do**
      $q \leftarrow \max\{q, v_i + \text{RodCutMemoized}(m, v, n-i)\}$;
    $m[n] \leftarrow q$
return q

Laufzeit $\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$

Teilproblem-Graph

beschreibt die Abhängigkeiten der Teilprobleme untereinander



und darf keine Zyklen enthalten

Konstruktion des optimalen Schnittes

- Während der (rekursiven) Berechnung der optimalen Lösung für jedes $k \leq n$ bestimmt der rekursive Algorithmus die optimale Länge des ersten Stabes
- Speichere die Länge des ersten Stabes für jedes $k \leq n$ in einer Tabelle mit n Einträgen.

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1. Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält besten Wert eines Stabes der Länge n.

2. Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?

   Wert r_0 ist 0.

3. Berechnungsreihenfolge?

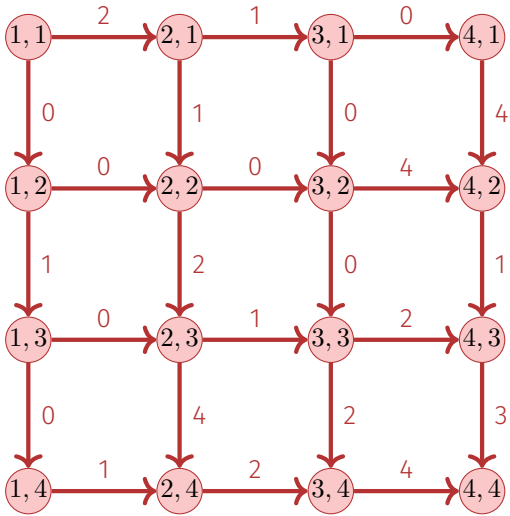
   r_i, $i = 1, \ldots, n$.

4. Rekonstruktion einer Lösung?

   r_n ist der beste Wert für eine Stange der Länge n

Kaninchen!

Ein Kaninchen sitzt auf Platz $(1, 1)$ eines $n \times n$ Gitters. Es kann nur nach Osten oder nach Süden gehen. Auf jedem Wegstück liegt eine Anzahl Rüben. Wie viele Rüben sammelt das Kaninchen maximal ein?

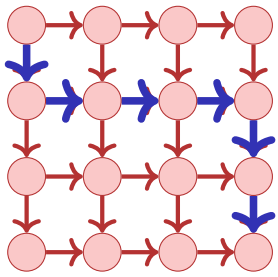


Kaninchen!

Anzahl mögliche Pfade?

- Auswahl von $n-1$ Wegen nach Süden aus $2n-2$ Wegen insgesamt.
- $$\binom{2n-2}{n-1} \in \Omega(2^n)$$

$\Rightarrow$ Naiver Algorithmus hat keine Chance



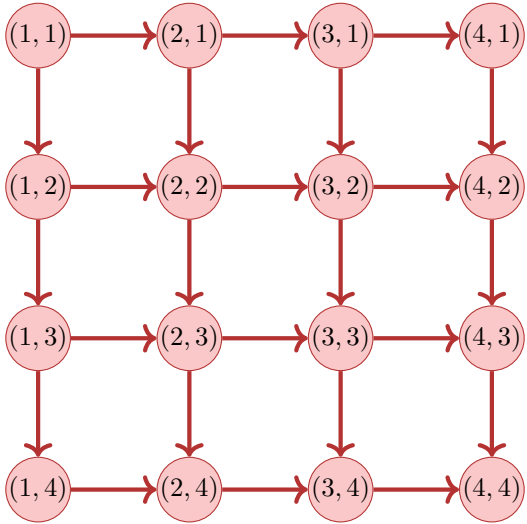
Der Weg 100011
(1:nach Süden, 0:nach Osten)

Rekursion

Gesucht: $T_{0,0}$ **= Maximale Anzahl Rüben von** $(0,0)$ **nach** (n,n)**.**
Sei $w_{(i,j)-(i',j')}$ Anzahl Rüben auf Kante von (i,j) nach (i',j').
Rekursion (maximale Anzahl Rüben von (i,j) nach (n,n))

$$T_{ij} = \begin{cases} \max\{w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}\}, & i < n, j < n \\ w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, & i = n, j < n \\ w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}, & i < n, j = n \\ 0 & i = j = n \end{cases}$$

Teilproblemabhängigkeitsgraph



Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Tabelle T der Grösse $n \times n$. Eintrag bei i, j enthält die maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n).

Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?

2. Wert $T_{n,n}$ ist 0.

Berechnungsreihenfolge?

3. $T_{i,j}$ mit $i = n \searrow 1$ und für jedes i: $j = n \searrow 1$, (oder umgekehrt: $j = n \searrow 1$ und für jedes j: $i = n \searrow 1$).

Rekonstruktion einer Lösung?

4. $T_{1,1}$ enthält die maximale Anzahl Rüben

17. Dynamic Programming II

Editierdistanz, Algorithmus von Bellman-Ford
[Cormen et al, Kap. 24.1]]

Minimale Editierdistanz

Editierdistanz von zwei Zeichenketten $A_n = (a_1, \ldots, a_n)$, $B_m = (b_1, \ldots, b_m)$.

Editieroperationen:

- Einfügen eines Zeichens
- Löschen eines Zeichens
- Änderung eines Zeichens

Frage: Wie viele Editieroperationen sind mindestens nötig, um eine gegebene Zeichenkette A in eine Zeichenkette B zu überführen.

TIGER ZIGER ZIEGER ZIEGE

Minimale Editierdistanz

Gesucht: Günstigste zeichenweise Transformation $A_n \to B_m$ mit Kosten

Operation	Levenshtein	LGT[24]	allgemein
c einfügen	1	1	ins(c)
c löschen	1	1	del(c)
Ersetzen $c \to c'$	$\mathbb{1}(c \neq c')$	$\infty \cdot \mathbb{1}(c \neq c')$	repl(c, c')

Beispiel

T	I	G	E	R		T	I	_	G	E	R		T→Z	+E	-R
Z	I	E	G	E		Z	I	E	G	E	_		Z→T	-E	+R

[24] Längste gemeinsame Teilfolge – Spezialfall des Editierproblems

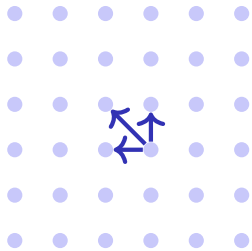
DP

0. $E(n, m)$ = minimale Anzahl Editieroperationen (ED Kosten) für $a_{1\ldots n} \to b_{1\ldots m}$
1. Teilprobleme $E(i, j)$ = ED von $a_{1\ldots i}$. $b_{1\ldots j}$. #TP $= n \cdot m$
2. Raten/Probieren Kosten $\Theta(1)$
   - $a_{1..i} \to a_{1\ldots i-1}$ (löschen)
   - $a_{1..i} \to a_{1\ldots i} b_j$ (einfügen)
   - $a_{1..i} \to a_{1\ldots i-1} b_j$ (ersetzen)
3. Rekursion

$$E(i,j) = \min \begin{cases} \text{del}(a_i) + E(i-1, j), \\ \text{ins}(b_j) + E(i, j-1), \\ \text{repl}(a_i, b_j) + E(i-1, j-1) \end{cases}$$

DP

4. Abhängigkeiten



   $\Rightarrow$ Berechnung von links oben nach rechts unten. Zeilen- oder Spaltenweise.
5. Lösung steht in $E(n, m)$

Beispiel (Levenshteinabstand)

$$E[i,j] \leftarrow \min\left\{E[i-1,j]+1, E[i,j-1]+1, E[i-1,j-1]+\mathbb{1}(a_i \neq b_j)\right\}$$

	∅	Z	I	E	G	E
∅	0	1	2	3	4	5
T	1	1	2	3	4	5
I	2	2	1	2	3	4
G	3	3	2	2	2	3
E	4	4	3	2	3	2
R	5	5	4	3	3	3

Editierschritte: von rechts unten nach links oben, der Rekursion folgend.
Bottom-Up Beschreibung des Algorithmus: Übung

Bottom-Up DP Algorithmus ED

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Tabelle $E[0,\ldots,m][0,\ldots,n]$. $E[i,j]$: Minimaler Editierabstand der Zeichenketten $(a_1,\ldots,a_i)$ und $(b_1,\ldots,b_j)$

Berechnung eines Eintrags

2. $E[0,i] \leftarrow i \; \forall 0 \leq i \leq m$, $E[j,0] \leftarrow i \; \forall 0 \leq j \leq n$. Berechnung von $E[i,j]$ sonst mit $E[i,j] = \min\{\mathsf{del}(a_i)+E(i-1,j), \mathsf{ins}(b_j)+E(i,j-1), \mathsf{repl}(a_i,b_j)+E(i-1,j-1)\}$

Bottom-Up DP Algorithmus ED

Berechnungsreihenfolge

3. Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.

Rekonstruktion einer Lösung?

4. Beginne bei $j = m$, $i = n$. Falls $E[i,j] = \text{repl}(a_i, b_j) + E(i-1, j-1)$ gilt, gib $a_i \to b_j$ aus und fahre fort mit $(j,i) \leftarrow (j-1, i-1)$; sonst, falls $E[i,j] = \text{del}(a_i) + E(i-1, j)$ gib $\text{del}(a_i)$ aus fahre fort mit $j \leftarrow j-1$; sonst, falls $E[i,j] = \text{ins}(b_j) + E(i, j-1)$, gib $\text{ins}(b_j)$ aus und fahre fort mit $i \leftarrow i-1$. Terminiere für $i = 0$ und $j = 0$.

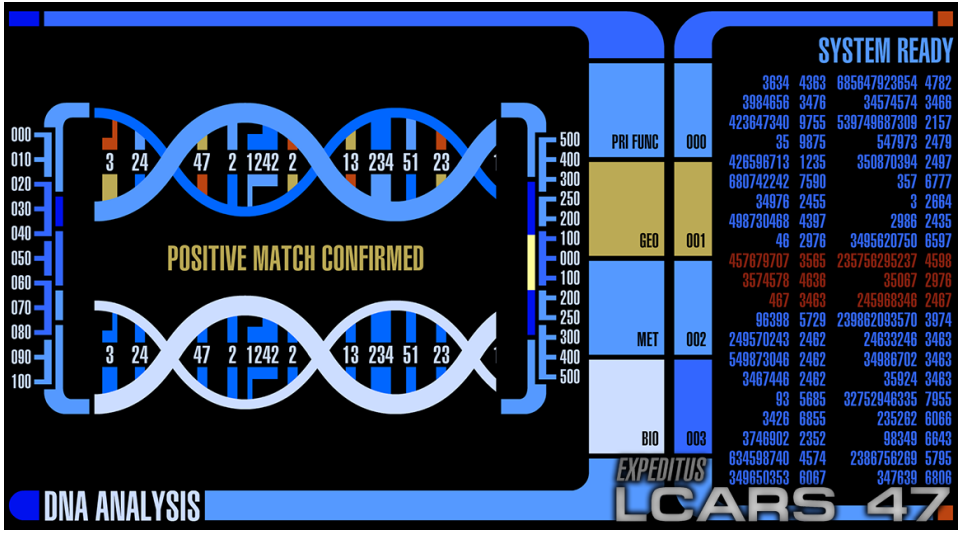
Analyse ED

- Anzahl Tabelleneinträge: $(m+1) \cdot (n+1)$.
- Berechnung jeweils mit konstanter Anzahl Zuweisungen und Vergleichen. Anzahl Schritte $\mathcal{O}(mn)$
- Bestimmen der Lösung: jeweils Verringerung von i oder j. Maximal $\mathcal{O}(n+m)$ Schritte.

Laufzeit insgesamt:

$$\mathcal{O}(mn).$$

DNA - Vergleich (Star Trek)



DNA - Vergleich

- DNA besteht aus Sequenzen von vier verschiedenen Nukleotiden **A**denin **G**uanin **T**hymin **C**ytosin
- DNA-Sequenzen (Gene) werden mit Zeichenketten aus A, G, T und C beschrieben.
- Ein möglicher Vergleich zweier Gene: Bestimme **Längste gemeinsame Teilfolge**

Das Problem, die längste gemeinsame Teilfolge zu finden ist ein Spezialfall der minimalen Editierdistanz.

Längste Gemeiname Teilfolge

Teilfolgen einer Zeichenkette:

Teilfolgen(KUH): (), (K), (U), (H), (KU), (KH), (UH), (KUH)

Problem:

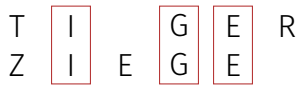
- Eingabe: Zwei Zeichenketten $A = (a_1, \ldots, a_m)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ der Längen $m > 0$ und $n > 0$.
- Gesucht: Eine längste gemeinsame Teilfolge (LGT) von A und B.

Längste Gemeiname Teilfolge

Beispiele:

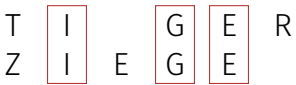
LGT(IGEL,KATZE)=E, LGT(TIGER,ZIEGE)=IGE

Ideen zur Lösung?



Rekursives Vorgehen

Annahme: Lösungen $L(i, j)$ bekannt für $A[1, \ldots, i]$ und $B[1, \ldots, j]$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$, jedoch nicht für $i = m$ und $j = n$.



Betrachten Zeichen a_m, b_n. Drei Möglichkeiten:

1. A wird um ein Leerzeichen erweitert. $L(m, n) = L(m, n - 1)$
2. B wird um ein Leerzeichen erweitert. $L(m, n) = L(m - 1, n)$
3. $L(m, n) = L(m - 1, n - 1) + \delta_{mn}$ mit $\delta_{mn} = 1$ wenn $a_m = b_n$ und $\delta_{mn} = 0$ sonst

Rekursion

$$L(m,n) \leftarrow \max\{L(m-1,n-1) + \delta_{mn}, L(m,n-1), L(m-1,n)\}$$

für $m, n > 0$ und Randfälle $L(\cdot, 0) = 0$, $L(0, \cdot) = 0$.

	∅	Z	I	E	G	E
∅	0	0	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0
I	0	0	1	1	1	1
G	0	0	1	1	2	2
E	0	0	1	2	2	3
R	0	0	1	2	2	3

Dynamic Programming Algorithmus LGT

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Tabelle $L[0,\ldots,m][0,\ldots,n]$. $L[i,j]$: Länge einer LGT der Zeichenketten $(a_1,\ldots,a_i)$ und $(b_1,\ldots,b_j)$

Berechnung eines Eintrags

2. $L[0,i] \leftarrow 0\ \forall 0 \leq i \leq m$, $L[j,0] \leftarrow 0\ \forall 0 \leq j \leq n$. Berechnung von $L[i,j]$ sonst mit $L[i,j] = \max(L[i-1,j-1] + \delta_{ij}, L[i,j-1], L[i-1,j])$.

Dynamic Programming Algorithmus LGT

Berechnungsreihenfolge

3. Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.

Rekonstruktion einer Lösung?

4. Beginne bei $j = m$, $i = n$. Falls $a_i = b_j$ gilt, gib a_i aus und fahre fort mit $(j, i) \leftarrow (j-1, i-1)$; sonst, falls $L[i, j] = L[i, j-1]$ fahre fort mit $j \leftarrow j-1$; sonst, falls $L[i, j] = L[i-1, j]$ fahre fort mit $i \leftarrow i-1$. Terminiere für $i = 0$ oder $j = 0$.

Analyse LGT

- Anzahl Tabelleneinträge: $(m+1) \cdot (n+1)$.
- Berechnung jeweils mit konstanter Anzahl Zuweisungen und Vergleichen. Anzahl Schritte $\mathcal{O}(mn)$
- Bestimmen der Lösung: jeweils Verringerung von i oder j. Maximal $\mathcal{O}(n+m)$ Schritte.

Laufzeit insgesamt:

$$\mathcal{O}(mn).$$

Erinnerung Kürzeste Wege Algorithmus

1. Initialisiere d_s und π_s: $d_s[v] = \infty$, $\pi_s[v] =$ null für alle $v \in V$
2. Setze $d_s[s] \leftarrow 0$
3. Wähle eine Kante $(u, v) \in E$

   Relaxiere (u, v):
   if $d_s[v] > d[u] + c(u, v)$ then
   $d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u, v)$
   $\pi_s[v] \leftarrow u$
4. Wiederhole 3 bis nichts mehr relaxiert werden kann.
   (bis $d_s[v] \leq d_s[u] + c(u, v) \quad \forall (u, v) \in E$)

Dynamic Programming Ansatz (Bellman)

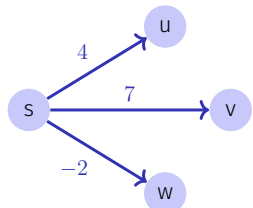
Induktion über Anzahl Kanten. $d_s[i, v]$: Kürzeste Weglänge von s nach v über maximal i Kanten.

$$d_s[i, v] = \min\{d_s[i-1, v], \min_{(u,v)\in E}(d_s[i-1, u] + c(u, v))$$

$$d_s[0, s] = 0, d_s[0, v] = \infty \; \forall v \neq s.$$

Dynamic Programming Ansatz (Bellman)

	s	$\cdots$	v	$\cdots$	w
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	∞	7	∞	-2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$



Algorithmus: Iteriere über letzte Zeile bis die Relaxationsschritte keine Änderung mehr ergeben, maximal aber $n-1$ mal. Wenn dann noch Änderungen, dann gibt es keinen kürzesten Pfad.

Algorithmus Bellman-Ford(G, s)

Input: Graph $G = (V, E, c)$, Startpunkt $s \in V$
Output: Wenn Rückgabe true, Minimale Gewichte d der kürzesten Pfade zu jedem Knoten, sonst kein kürzester Pfad.

foreach $u \in V$ **do**
    $d_s[u] \leftarrow \infty$; $\pi_s[u] \leftarrow$ **null**
$d_s[s] \leftarrow 0$;
for $i \leftarrow 1$ **to** $|V|$ **do**
    $f \leftarrow$ false
    foreach $(u, v) \in E$ **do**
        $f \leftarrow f \vee \mathrm{Relax}(u, v)$
    if $f =$ false **then return** true
return false;