

Informatik II

Übung 6

FS 2019

Heutiges Programm

- 1 Wiederholung Vorlesung
- 2 String-Hashing und Modulo-Rechnen
- 3 In-Class-Exercises: Sliding Window

Gutes Hashing

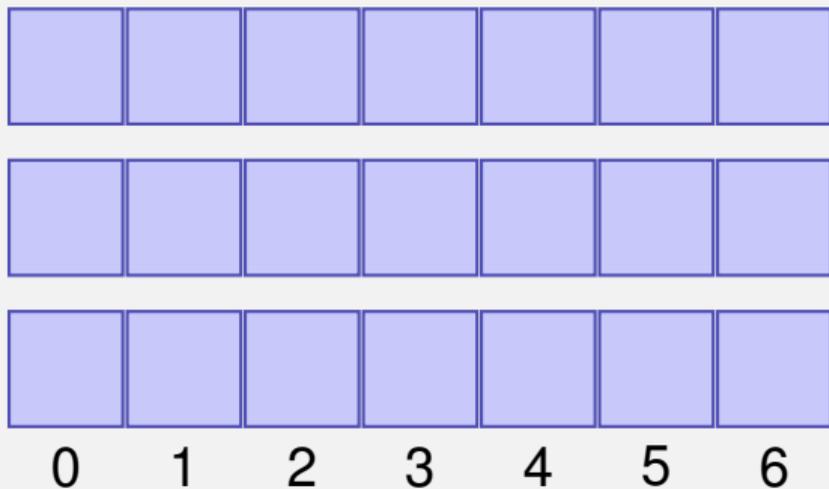
Gutes Hashing. . .

- verteilt die Menge der Schlüssel möglichst gleichmässig auf die Positionen der Hashtabelle.
- vermeidet beim Sondieren möglichst ein Ablaufen langer belegter Bereiche (siehe primäre Häufung).
- vermeidet, Schlüssel mit gleichem Hashwert auch noch gleich zu sondieren (siehe sekundäre Häufung).

Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel 25, 4, 17, 45 in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

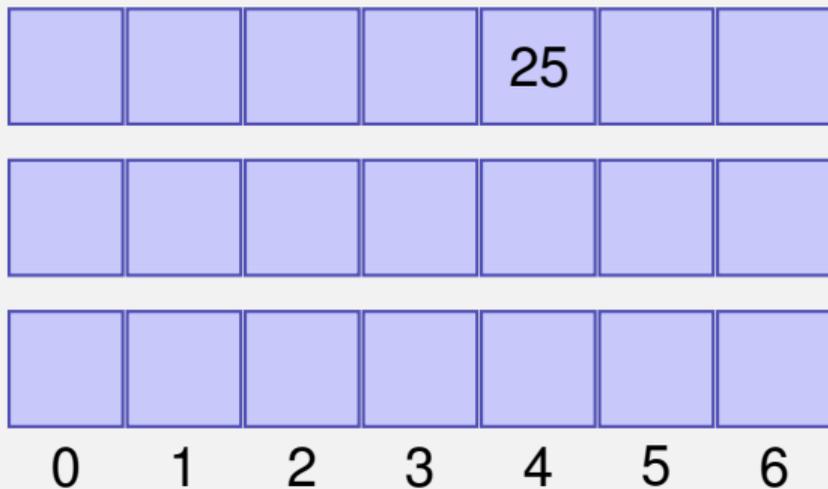
- Lineares Sondieren,
 $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren,
 $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing,
 $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel 25, 4, 17, 45 in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

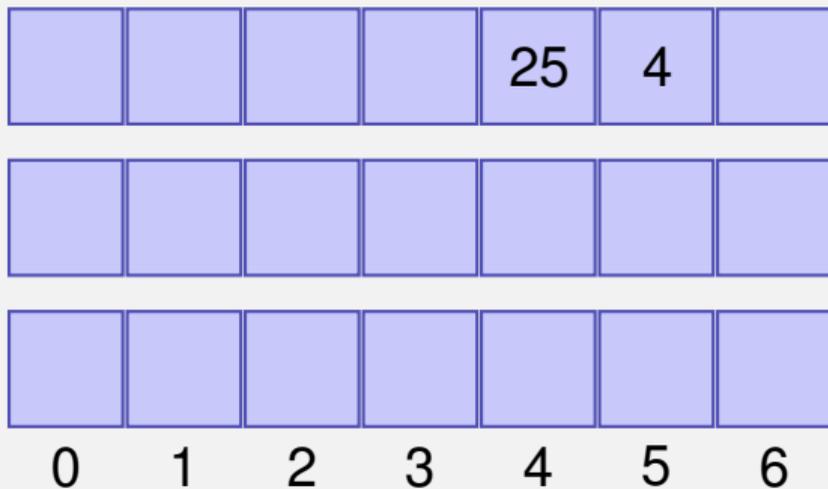
- Lineares Sondieren,
 $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren,
 $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing,
 $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel 25, 4, 17, 45 in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

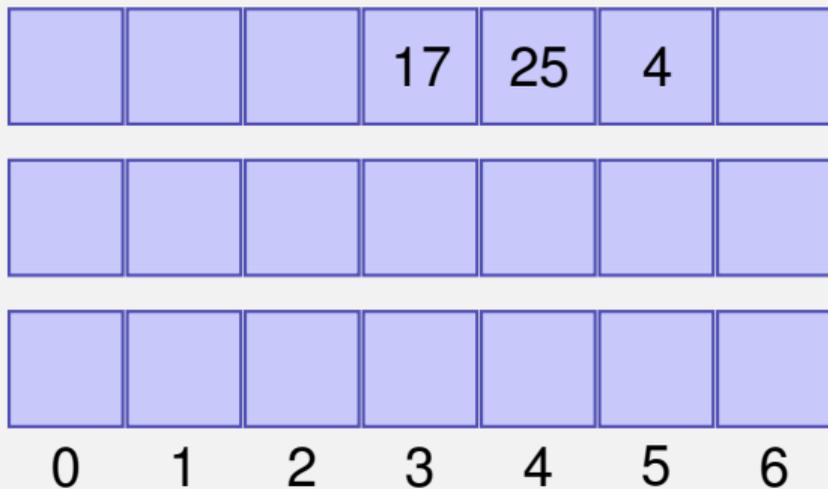
- Lineares Sondieren,
 $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren,
 $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing,
 $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel 25, 4, 17, 45 in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

- Lineares Sondieren,
 $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren,
 $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing,
 $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel 25, 4, 17, 45 in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

- Lineares Sondieren,
 $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren,
 $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing,
 $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.

			17	25	4	45

0 1 2 3 4 5 6

Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel 25, 4, 17, 45 in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

- Lineares Sondieren,
 $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren,
 $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing,
 $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.

			17	25	4	45
				25		

0 1 2 3 4 5 6

Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel 25, 4, 17, 45 in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

- Lineares Sondieren,
 $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren,
 $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing,
 $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.

			17	25	4	45
				25	4	
0	1	2	3	4	5	6

Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel 25, 4, 17, 45 in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

- Lineares Sondieren,
 $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren,
 $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing,
 $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.

			17	25	4	45
			17	25	4	

0 1 2 3 4 5 6

Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel 25, 4, 17, 45 in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

- Lineares Sondieren,
 $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren,
 $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing,
 $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.

			17	25	4	45
		45	17	25	4	
0	1	2	3	4	5	6

Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel 25, 4, 17, 45 in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

- Lineares Sondieren,
 $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren,
 $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing,
 $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.

			17	25	4	45
		45	17	25	4	
				25		
0	1	2	3	4	5	6

Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel 25, 4, 17, 45 in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

- Lineares Sondieren,
 $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren,
 $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing,
 $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.

			17	25	4	45
		45	17	25	4	
		4		25		
0	1	2	3	4	5	6

Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel 25, 4, 17, 45 in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

- Lineares Sondieren,
 $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren,
 $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing,
 $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.

			17	25	4	45
		45	17	25	4	
		4	17	25		
0	1	2	3	4	5	6

Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel 25, 4, 17, 45 in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

- Lineares Sondieren,
 $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren,
 $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing,
 $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.

			17	25	4	45
		45	17	25	4	
		4	17	25	45	
0	1	2	3	4	5	6

Rechenregeln Modulo

$$(a + b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$$

$$(a - b) \bmod m = ((a \bmod m) - (b \bmod m) + m) \bmod m$$

$$(a \cdot b) \bmod m = ((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)) \bmod m$$

Aufgabe: Berechnen Sie

$$12746357 \bmod 11$$

Rechenregeln Modulo

Aufgabe: Berechnen Sie

$$12746357 \bmod 11$$

Rechenregeln Modulo

Aufgabe: Berechnen Sie

$$12746357 \bmod 11$$

$$= (7 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^7) \bmod 11$$

Rechenregeln Modulo

Aufgabe: Berechnen Sie

$$\begin{aligned} & 12746357 \bmod 11 \\ &= (7 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^7) \bmod 11 \\ &= (7 + 50 + 3 + 60 + 4 + 70 + 2 + 10) \bmod 11 \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichheit haben wir verwendet, dass $10^2 \bmod 11 = 1$.

Rechenregeln Modulo

Aufgabe: Berechnen Sie

$$\begin{aligned} & 12746357 \bmod 11 \\ &= (7 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^7) \bmod 11 \\ &= (7 + 50 + 3 + 60 + 4 + 70 + 2 + 10) \bmod 11 \\ &= (7 + 6 + 3 + 5 + 4 + 4 + 2 + 10) \bmod 11 \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichheit haben wir verwendet, dass $10^2 \bmod 11 = 1$.

Rechenregeln Modulo

Aufgabe: Berechnen Sie

$$\begin{aligned} & 12746357 \bmod 11 \\ &= (7 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^7) \bmod 11 \\ &= (7 + 50 + 3 + 60 + 4 + 70 + 2 + 10) \bmod 11 \\ &= (7 + 6 + 3 + 5 + 4 + 4 + 2 + 10) \bmod 11 \\ &= 8 \bmod 11. \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichheit haben wir verwendet, dass $10^2 \bmod 11 = 1$.

Implementation Hash(String) in Java

$$h_{c,m}(s) = \left(\sum_{i=0}^{k-1} s_i \cdot c^{k-1-i} \right) \bmod m$$

```
int ComputeHash(int C, int M, String s) {  
    int hash = 0;  
    for (int i = 0; i < s.length(); ++i){  
        hash = (C * hash % M + s.charAt(i)) % M;  
    }  
    return hash;  
}
```

In-Class-Exercises: Sliding Window

https://expert.ethz.ch/print/ifbaug2/SS19/e06_examples

Gegeben sei ein String `text` der Länge n .

Wir suchen den kürzesten Substring `text[l, r]`, welcher die Buchstaben 'a', 'b', und 'c' je mindestens einmal enthält.

In-Class-Exercises: Sliding Window

https://expert.ethz.ch/print/ifbaug2/SS19/e06_examples

Gegeben sei ein String `text` der Länge n .

Wir suchen den kürzesten Substring `text[l, r]`, welcher die Buchstaben 'a', 'b', und 'c' je mindestens einmal enthält.

- Brute-Force: Alle $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Substrings durchtesten dauert $\mathcal{O}(n^3)$.

In-Class-Exercises: Sliding Window

https://expert.ethz.ch/print/ifbaug2/SS19/e06_examples

Gegeben sei ein String `text` der Länge n .

Wir suchen den kürzesten Substring `text[l, r]`, welcher die Buchstaben 'a', 'b', und 'c' je mindestens einmal enthält.

- Brute-Force: Alle $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Substrings durchtesten dauert $\mathcal{O}(n^3)$.
- Idee: Betrachte einen Substring `text[l, r]`:
 - Noch nicht alle drei Buchstaben \rightarrow Substring vergrößern.
 - Alle drei Buchstaben enthalten \rightarrow Substring verkleinern.

In-Class-Exercises: Sliding Window

https://expert.ethz.ch/print/ifbaug2/SS19/e06_examples

Gegeben sei ein String `text` der Länge n .

Wir suchen den kürzesten Substring `text[l, r]`, welcher die Buchstaben 'a', 'b', und 'c' je mindestens einmal enthält.

- Brute-Force: Alle $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Substrings durchtesten dauert $\mathcal{O}(n^3)$.
- Idee: Betrachte einen Substring `text[l, r]`:
 - Noch nicht alle drei Buchstaben \rightarrow Substring vergrößern.
 - Alle drei Buchstaben enthalten \rightarrow Substring verkleinern.
- Sliding Window Approach.

In-Class-Exercises: Sliding Window

Sliding Window Approach:

In-Class-Exercises: Sliding Window

Sliding Window Approach:

Laufzeit: $\mathcal{O}(n)$.

- In jedem Schritt wird das Sliding Window entweder nach rechts verlängert oder links verkürzt. Es gibt also höchstens $2n$ Schritte.
- Da wir nur eine konstante Anzahl Buchstaben hashen, erfolgen HashMap Operationen in $\mathcal{O}(1)$.

Vergleich mit Rabin-Karp Aufgabe

Rabin-Karp: Hier suchen wir einen ganz bestimmten Substring “abc”, und nicht nur dessen Buchstaben ‘a’, ‘b’, ‘c’!

- Einfacher, da unser Sliding Window immer dieselbe Länge hat!
- Aber auch schwieriger, weil die Reihenfolge der Buchstaben nun eine Rolle spielt!

Fragen oder Anregungen?