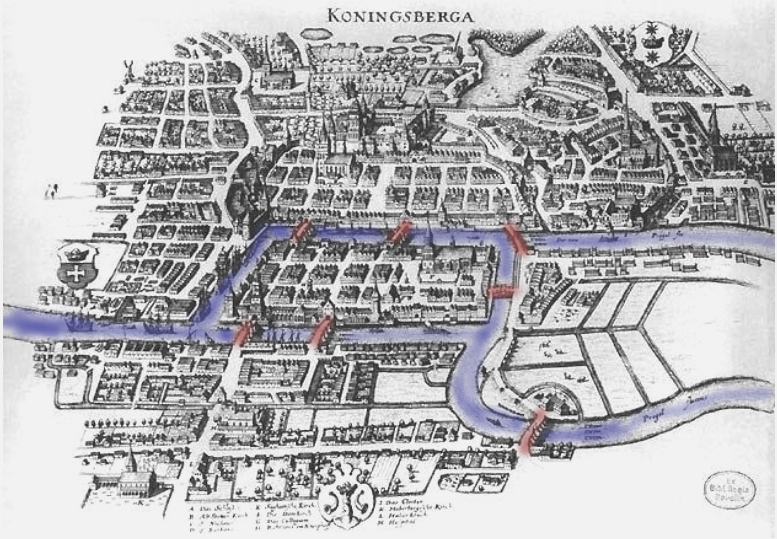
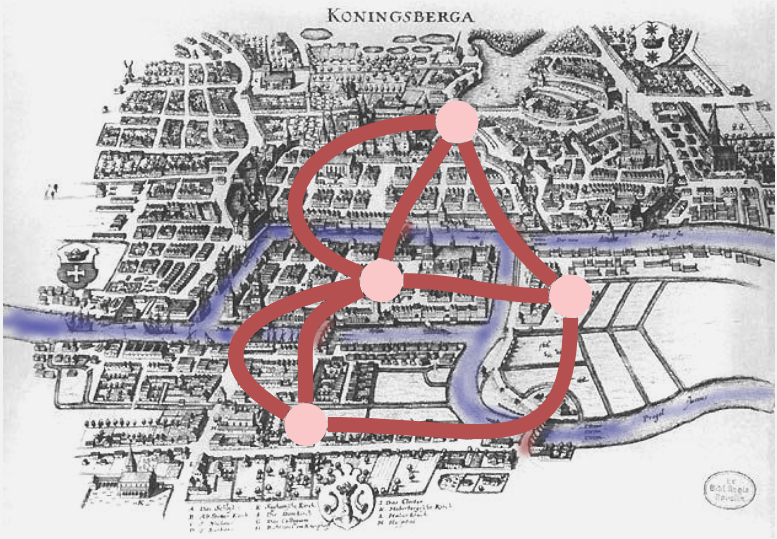
13. Graphen

Notation, Repräsentation, Traversieren (DFS, BFS), Topologisches Sortieren [Ottman/Widmayer, Kap. 9.1 - 9.4,Cormen et al, Kap. 22]

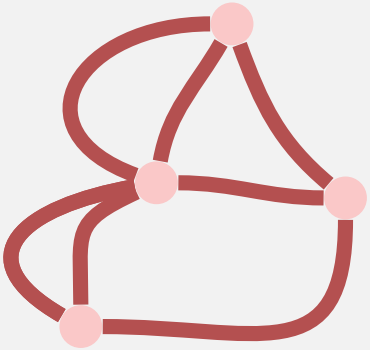
Königsberg 1736



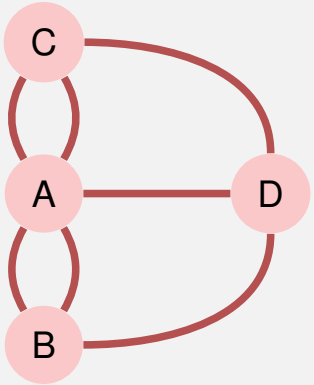
Königsberg 1736



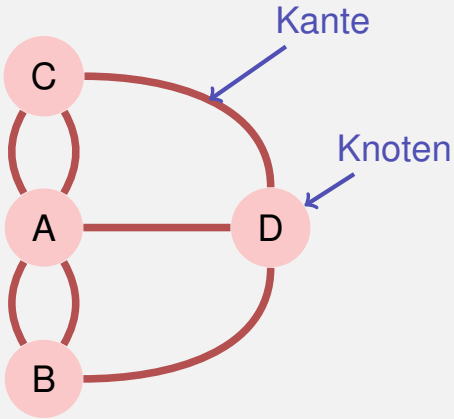
Königsberg 1736



[Multi]Graph

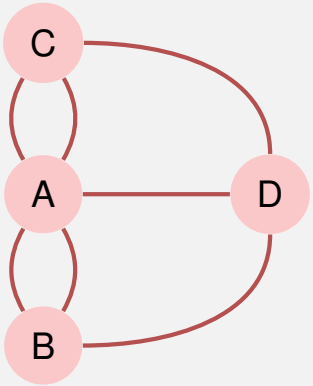


[Multi]Graph



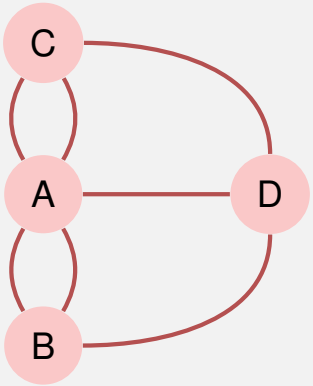
Zyklen

- Gibt es einen Rundweg durch die Stadt (den Graphen), welcher jede Brücke (jede Kante) genau einmal benutzt?



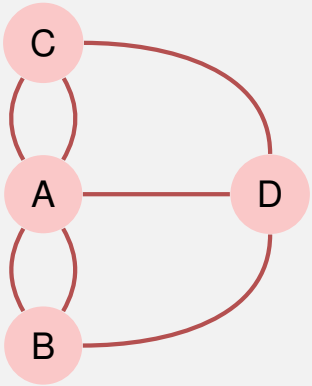
Zyklen

- Gibt es einen Rundweg durch die Stadt (den Graphen), welcher jede Brücke (jede Kante) genau einmal benutzt?
- Euler (1736): nein.



Zyklen

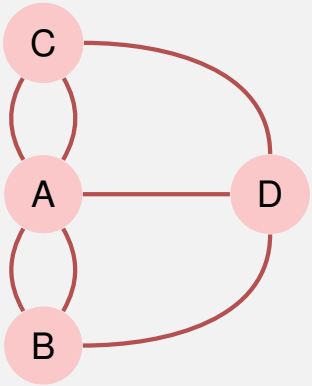
- Gibt es einen Rundweg durch die Stadt (den Graphen), welcher jede Brücke (jede Kante) genau einmal benutzt?
- Euler (1736): nein.
- Solcher Rundweg (*Zyklus*) heisst *Eulerscher Kreis*.



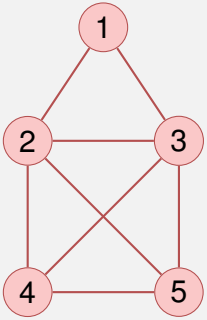
Zyklen

- Gibt es einen Rundweg durch die Stadt (den Graphen), welcher jede Brücke (jede Kante) genau einmal benutzt?
- Euler (1736): nein.
- Solcher Rundweg (*Zyklus*) heisst *Eulerscher Kreis*.
- Eulerzyklus $\Leftrightarrow$ jeder Knoten hat gerade Anzahl Kanten (jeder Knoten hat einen *geraden Grad*).

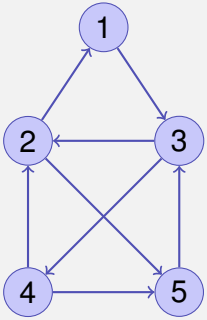
“$\Rightarrow$” ist sofort klar, “$\Leftarrow$” ist etwas schwieriger, aber auch elementar.



Notation



ungerichtet



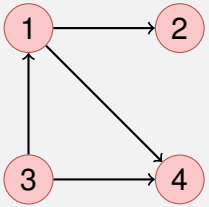
gerichtet

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$E = \{(1, 3), (2, 1), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 3)\}$$

Notation

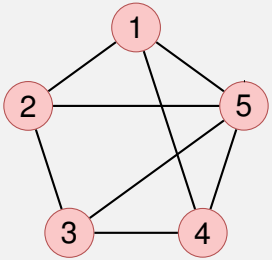
Ein *gerichteter Graph* besteht aus einer Menge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von Knoten (*Vertices*) und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von Kanten (*Edges*). Gleiche Kanten dürfen nicht mehrfach enthalten sein.



Schleife

Notation

Ein *ungerichteter Graph* besteht aus einer Menge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von Knoten und einer Menge $E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V\}$ von Kanten. Kanten dürfen nicht mehrfach enthalten sein.[22]

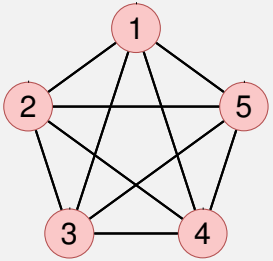


ungerichter Graph

[22] Im Gegensatz zum Eingangsbeispiel – dann Multigraph genannt.

Notation

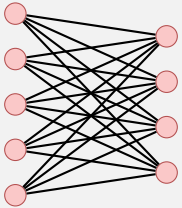
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ohne Schleifen in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist, heisst *vollständig*.



ein vollständiger ungerichter Graph

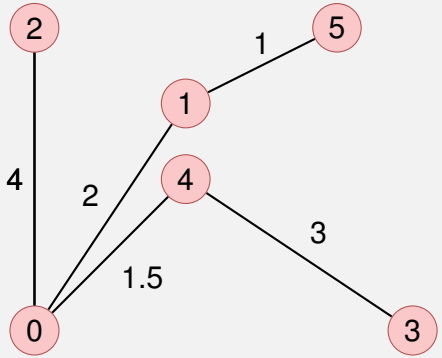
Notation

Ein Graph, bei dem V so in disjunkte U und W aufgeteilt werden kann, dass alle $e \in E$ einen Knoten in U und einen in W haben heisst *bipartit*.



Notation

Ein *gewichteter Graph* $G = (V, E, c)$ ist ein Graph $G = (V, E)$ mit einer *Kantengewichtsfunktion* $c : E \to \mathbb{R}$. $c(e)$ heisst *Gewicht* der Kante e.



Notation

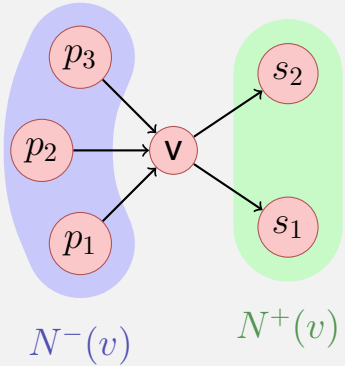
Für gerichtete Graphen $G = (V, E)$

- $w \in V$ heisst *adjazent* zu $v \in V$, falls $(v, w) \in E$

Notation

Für gerichtete Graphen $G = (V, E)$

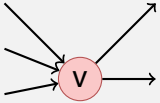
- $w \in V$ heisst *adjazent* zu $v \in V$, falls $(v, w) \in E$
- *Vorgängermenge* von $v \in V$: $N^-(v) := \{u \in V | (u, v) \in E\}$.
  Nachfolgermenge: $N^+(v) := \{u \in V | (v, u) \in E\}$



Notation

Für gerichtete Graphen $G = (V, E)$

- *Eingangsgrad*: $\deg^-(v) = |N^-(v)|$,
  Ausgangsgrad: $\deg^+(v) = |N^+(v)|$



$\deg^-(v) = 3, \deg^+(v) = 2$

$\deg^-(w) = 1, \deg^+(w) = 1$

Notation

Für ungerichtete Graphen $G = (V, E)$:

- $w \in V$ heisst *adjazent* zu $v \in V$, falls $\{v, w\} \in E$

Notation

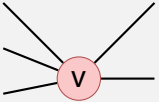
Für ungerichtete Graphen $G = (V, E)$:

- $w \in V$ heisst *adjazent* zu $v \in V$, falls $\{v, w\} \in E$
- *Nachbarschaft* von $v \in V$: $N(v) = \{w \in V | \{v, w\} \in E\}$

Notation

Für ungerichtete Graphen $G = (V, E)$:

- $w \in V$ heisst *adjazent* zu $v \in V$, falls $\{v, w\} \in E$
- *Nachbarschaft* von $v \in V$: $N(v) = \{w \in V | \{v, w\} \in E\}$
- *Grad* von v: $\deg(v) = |N(v)|$ mit Spezialfall Schleifen: erhöhen Grad um 2.



$\deg(v) = 5$

$\deg(w) = 2$

Beziehung zwischen Knotengraden und Kantenzahl

In jedem Graphen $G = (V, E)$ gilt

1. $\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$, falls G gerichtet
2. $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, falls G ungerichtet.

Wege

- *Weg*: Sequenz von Knoten $\langle v_1, \ldots, v_{k+1} \rangle$ so dass für jedes $i \in \{1 \ldots k\}$ eine Kante von v_i nach v_{i+1} existiert.

Wege

- *Weg*: Sequenz von Knoten $\langle v_1, \ldots, v_{k+1} \rangle$ so dass für jedes $i \in \{1 \ldots k\}$ eine Kante von v_i nach v_{i+1} existiert.
- *Länge* des Weges: Anzahl enthaltene Kanten k.

Wege

- *Weg*: Sequenz von Knoten $\langle v_1, \ldots, v_{k+1} \rangle$ so dass für jedes $i \in \{1 \ldots k\}$ eine Kante von v_i nach v_{i+1} existiert.
- *Länge* des Weges: Anzahl enthaltene Kanten k.
- *Gewicht* des Weges (in gewichteten Graphen): $\sum_{i=1}^{k} c((v_i, v_{i+1}))$ (bzw. $\sum_{i=1}^{k} c(\{v_i, v_{i+1}\})$)

Wege

- *Weg*: Sequenz von Knoten $\langle v_1, \ldots, v_{k+1} \rangle$ so dass für jedes $i \in \{1 \ldots k\}$ eine Kante von v_i nach v_{i+1} existiert.
- *Länge* des Weges: Anzahl enthaltene Kanten k.
- *Gewicht* des Weges (in gewichteten Graphen): $\sum_{i=1}^{k} c((v_i, v_{i+1}))$ (bzw. $\sum_{i=1}^{k} c(\{v_i, v_{i+1}\})$)
- *Pfad* (auch: einfacher Pfad): Weg der keinen Knoten mehrfach verwendet.

Zusammenhang

- Ungerichteter Graph heisst *zusammenhängend*, wenn für jedes Paar $v, w \in V$ ein verbindender Weg existiert.
- Gerichteter Graph heisst *stark zusammenhängend*, wenn für jedes Paar $v, w \in V$ ein verbindender Weg existiert.
- Gerichteter Graph heisst *schwach zusammenhängend*, wenn der entsprechende ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

Einfache Beobachtungen

- Allgemein: $0 \leq |E| \in \mathcal{O}(|V|^2)$
- Zusammenhängender Graph: $|E| \in \Omega(|V|)$
- Vollständiger Graph: $|E| = \frac{|V| \cdot (|V|-1)}{2}$ (ungerichtet)
- Maximal $|E| = |V|^2$ (gerichtet),$|E| = \frac{|V| \cdot (|V|+1)}{2}$ (ungerichtet)

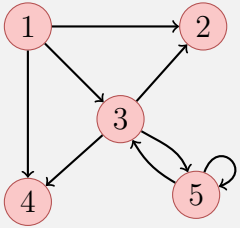
Zyklen

- *Zyklus*: Weg $\langle v_1, \ldots, v_{k+1} \rangle$ mit $v_1 = v_{k+1}$
- *Kreis*: Zyklus mit paarweise verschiedenen $v_1, \ldots, v_k$, welcher keine Kante mehrfach verwendet.
- *Kreisfrei (azyklisch)*: Graph ohne jegliche Kreise.

Eine Folgerung: Ungerichtete Graphen können keinen Kreis der Länge 2 enthalten (Schleifen haben Länge 1).

Repräsentation mit Matrix

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $v_1, \ldots, v_n$ gespeichert als *Adjazenzmatrix* $A_G = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit Einträgen aus $\{0, 1\}$. $a_{ij} = 1$ genau dann wenn Kante von v_i nach v_j.

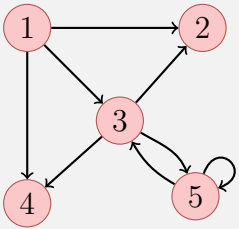


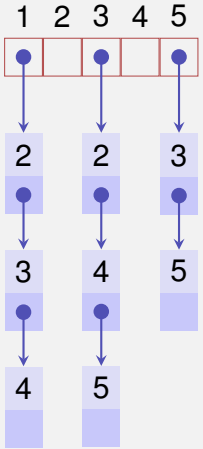
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Speicherbedarf $\Theta(|V|^2)$. A_G ist symmetrisch, wenn G ungerichtet.

Repräsentation mit Liste

Viele Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $v_1, \ldots, v_n$ haben deutlich weniger als n^2 Kanten. Repräsentation mit *Adjazenzliste*: Array $A[1], \ldots, A[n]$, A_i enthält verkettete Liste aller Knoten in $N^+(v_i)$.





Speicherbedarf $\Theta(|V| + |E|)$.

Laufzeiten einfacher Operationen

Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden		
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden		
$(u, v) \in E$?		
Kante einfügen		
Kante löschen		

Laufzeiten einfacher Operationen

Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden		
$(u, v) \in E$?		
Kante einfügen		
Kante löschen		

Laufzeiten einfacher Operationen

Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+ v)$
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden		
$(u, v) \in E$?		
Kante einfügen		
Kante löschen		

Laufzeiten einfacher Operationen

Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+ v)$
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden	$\Theta(n^2)$	
$(u, v) \in E$?		
Kante einfügen		
Kante löschen		

Laufzeiten einfacher Operationen

Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+ v)$
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
$(u, v) \in E$?		
Kante einfügen		
Kante löschen		

Laufzeiten einfacher Operationen

Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+ v)$
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
$(u, v) \in E$?	$\Theta(1)$	
Kante einfügen		
Kante löschen		

Laufzeiten einfacher Operationen

Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+ v)$
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
$(u, v) \in E$?	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+ v)$
Kante einfügen		
Kante löschen		

Laufzeiten einfacher Operationen

Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+ v)$
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
$(u, v) \in E$?	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+ v)$
Kante einfügen	$\Theta(1)$	
Kante löschen		

Laufzeiten einfacher Operationen

Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+ v)$
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
$(u, v) \in E$?	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+ v)$
Kante einfügen	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Kante löschen		

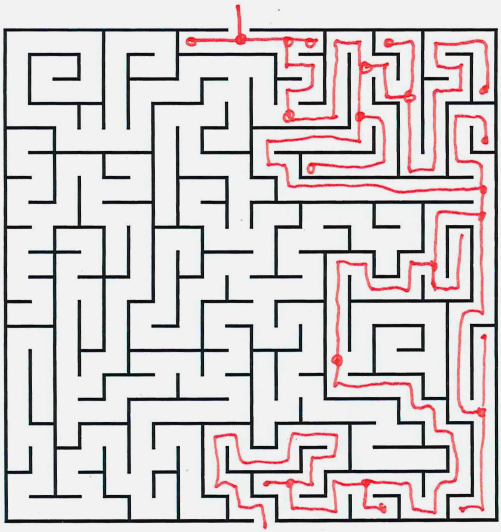
Laufzeiten einfacher Operationen

Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+ v)$
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
$(u, v) \in E$?	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+ v)$
Kante einfügen	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Kante löschen	$\Theta(1)$	

Laufzeiten einfacher Operationen

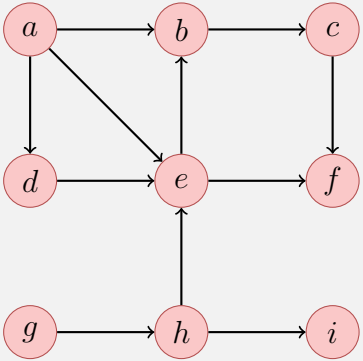
Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+ v)$
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
$(u, v) \in E$?	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+ v)$
Kante einfügen	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Kante löschen	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+ v)$

Tiefensuche

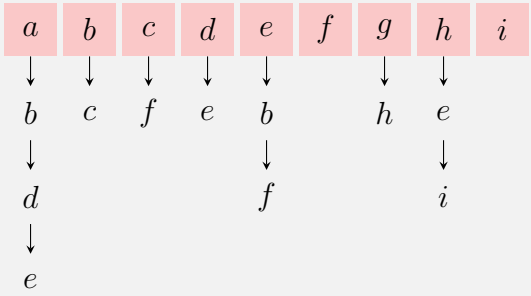


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

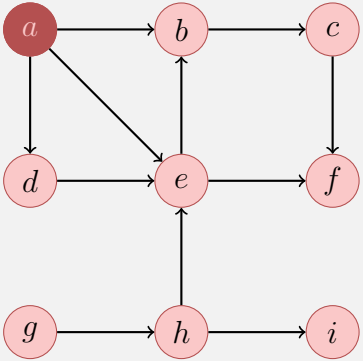


Adjazenzliste

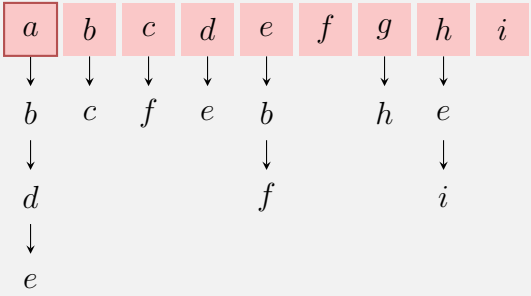


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

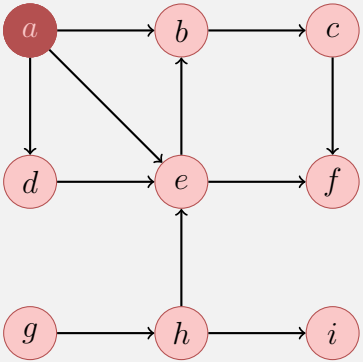


Adjazenzliste

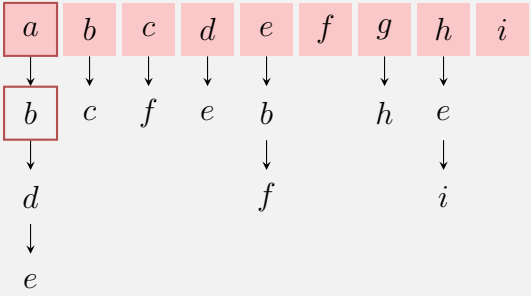


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

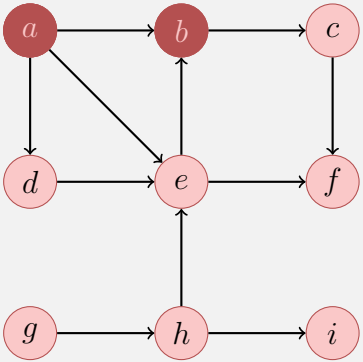


Adjazenzliste

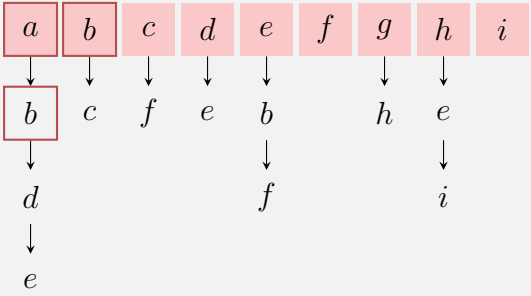


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

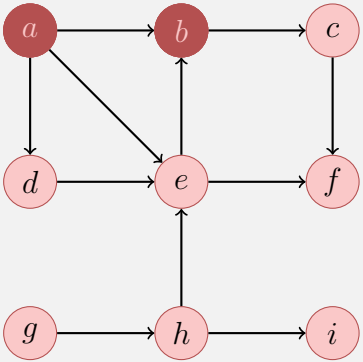


Adjazenzliste

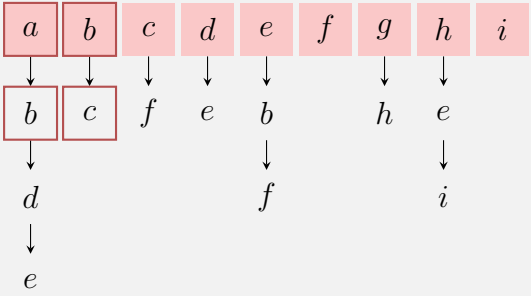


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

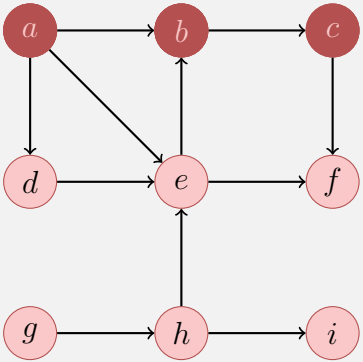


Adjazenzliste

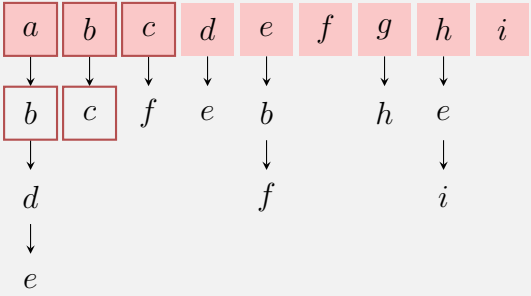


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

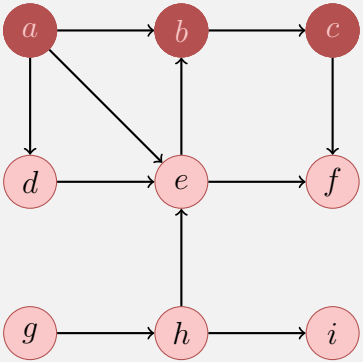


Adjazenzliste

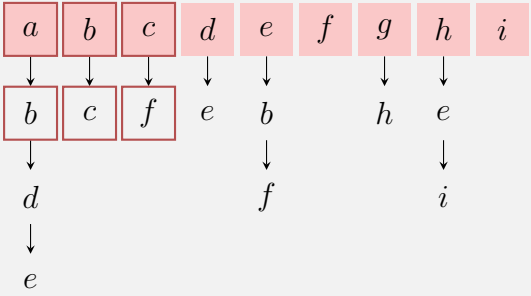


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

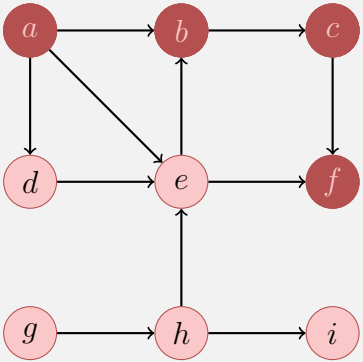


Adjazenzliste

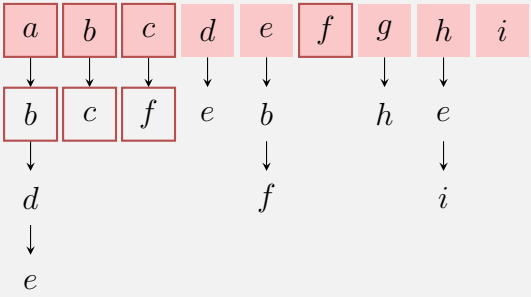


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

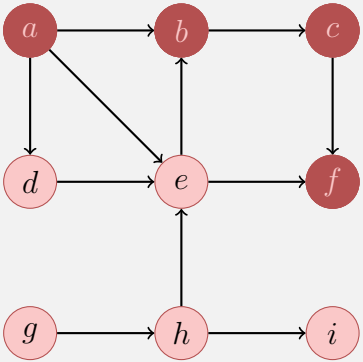


Adjazenzliste

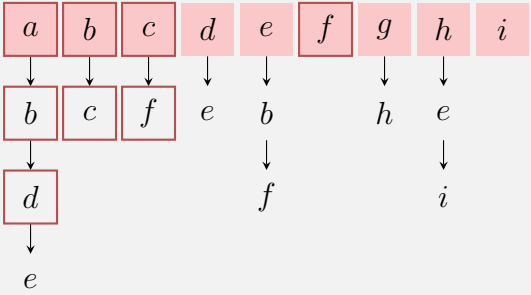


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

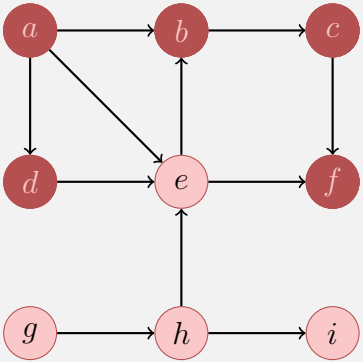


Adjazenzliste

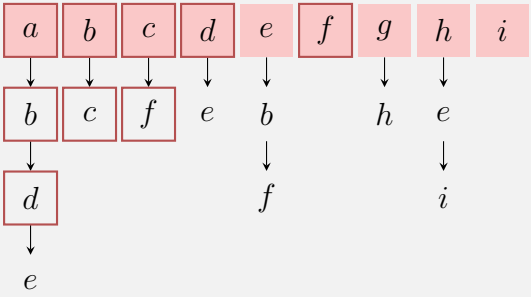


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

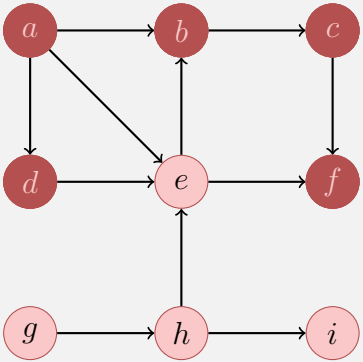


Adjazenzliste

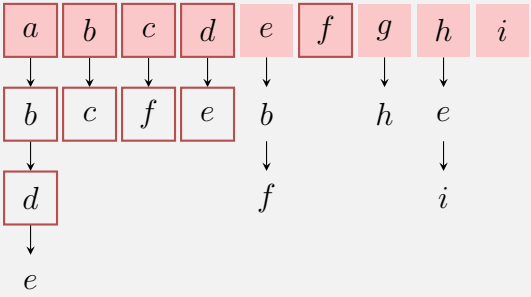


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

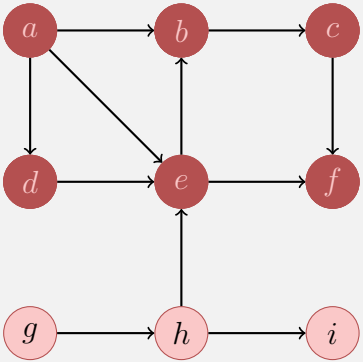


Adjazenzliste

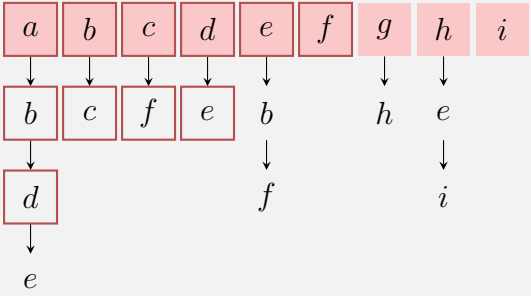


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

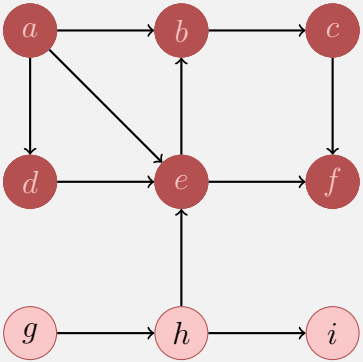


Adjazenzliste

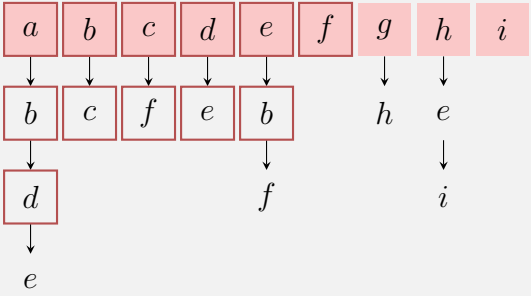


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

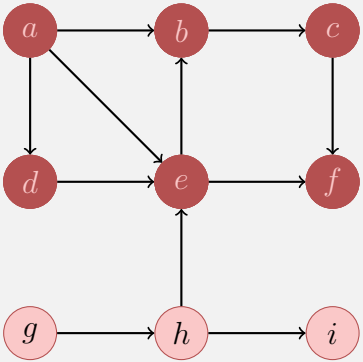


Adjazenzliste

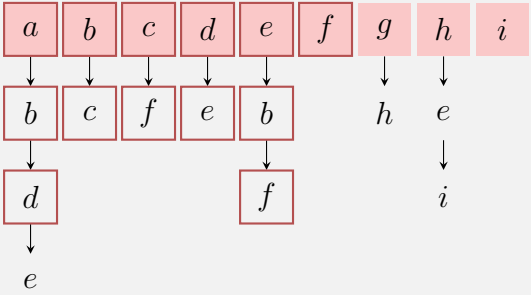


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

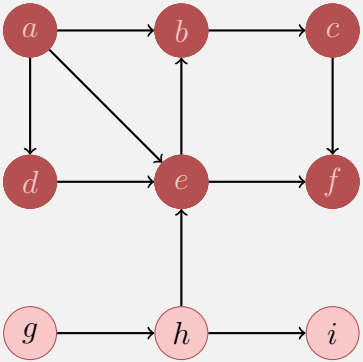


Adjazenzliste

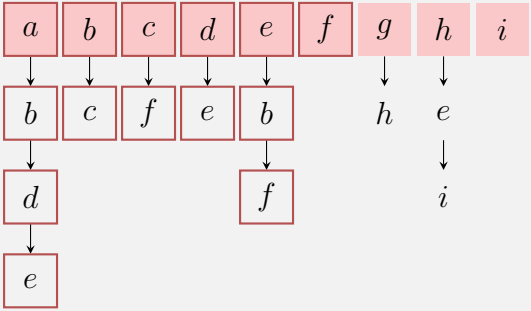


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

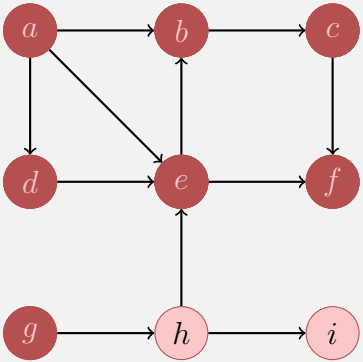


Adjazenzliste

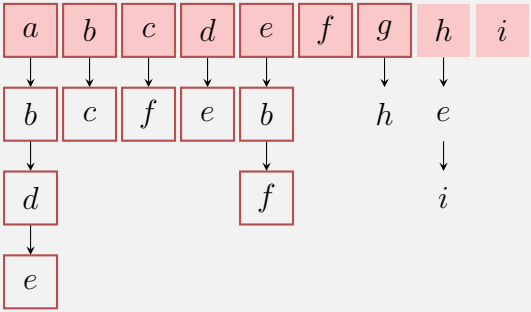


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

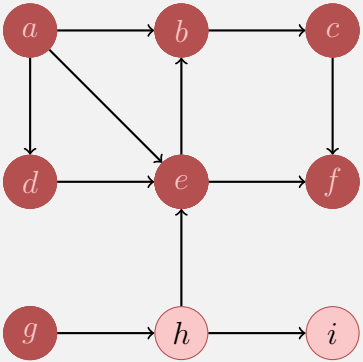


Adjazenzliste

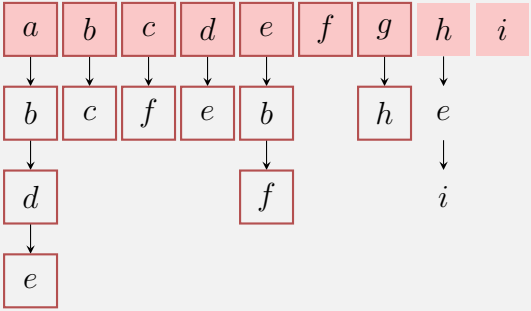


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

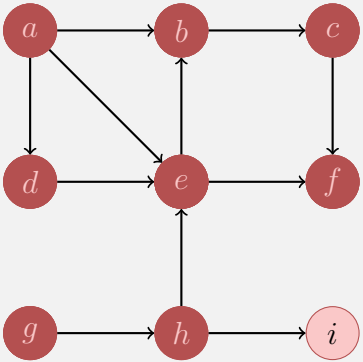


Adjazenzliste

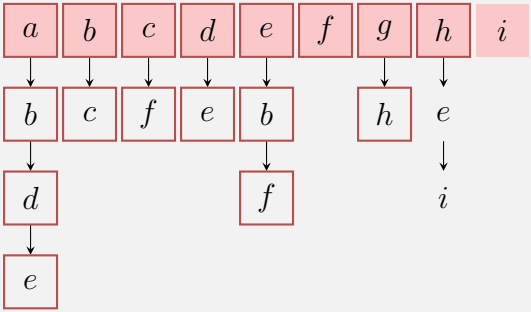


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

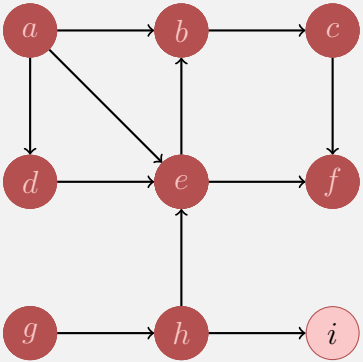


Adjazenzliste

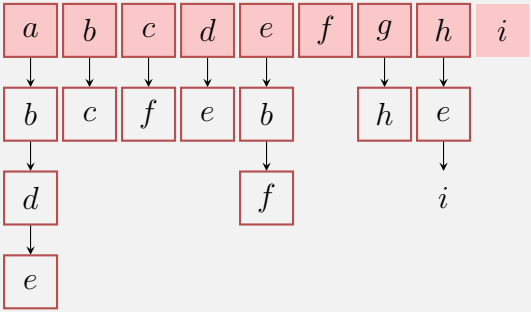


Graphen Traversieren: Tiefensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.

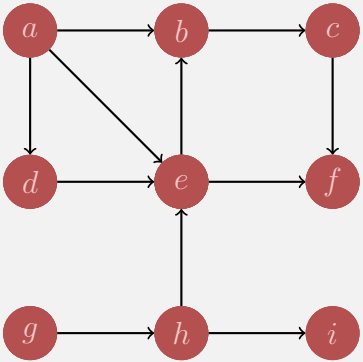


Adjazenzliste



Graphen Traversieren: Tiefensuche

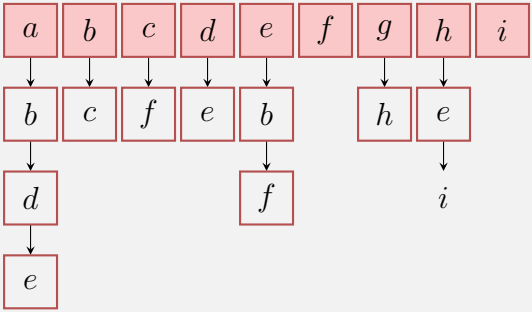
Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.



Reihenfolge

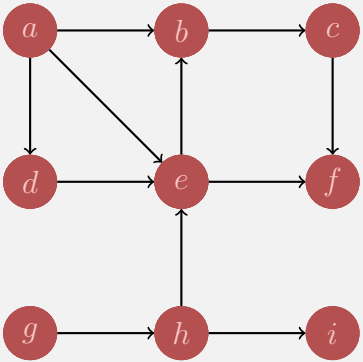
$a, b, c, f, d, e, g, h, i$

Adjazenzliste



Graphen Traversieren: Tiefensuche

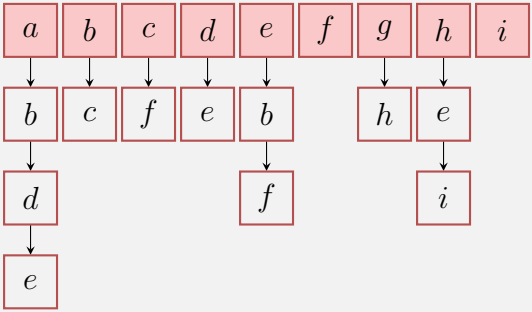
Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.



Reihenfolge

$a, b, c, f, d, e, g, h, i$

Adjazenzliste



Farben

Konzeptuelle Färbung der Knoten

- **Weiss:** Knoten wurde noch nicht entdeckt.
- **Grau:** Knoten wurde entdeckt und zur Traversierung vorgemerkt / in Bearbeitung.
- **Schwarz:** Knoten wurde entdeckt und vollständig bearbeitet

Algorithmus Tiefensuche DFS-Visit(G, v)

Input: Graph $G = (V, E)$, Knoten v.

$v.color \leftarrow$ grey
foreach $w \in N^+(v)$ **do**
    if $w.color =$ white **then**
        DFS-Visit(G, w)
$v.color \leftarrow$ black

Tiefensuche ab Knoten v. Laufzeit (ohne Rekursion): $\Theta(\deg^+ v)$

Algorithmus Tiefensuche DFS-Visit(G)

Input: Graph $G = (V, E)$

foreach $v \in V$ **do**
    $v.color \leftarrow$ white

foreach $v \in V$ **do**
    if $v.color =$ white **then**
        DFS-Visit(G,v)

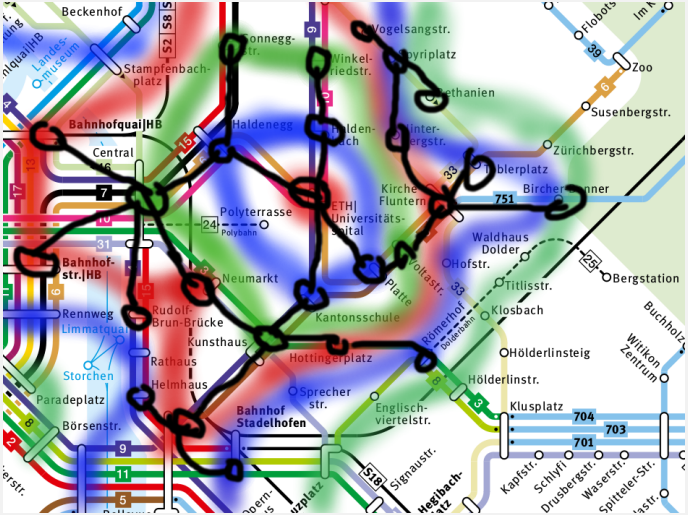
Tiefensuche für alle Knoten eines Graphen. Laufzeit $\Theta(|V| + \sum_{v \in V}(\deg^+(v) + 1)) = \Theta(|V| + |E|)$.

Interpretation der Farben

Beim Traversieren des Graphen wird ein Baum (oder Wald) aufgebaut. Beim Entdecken von Knoten gibt es drei Fälle

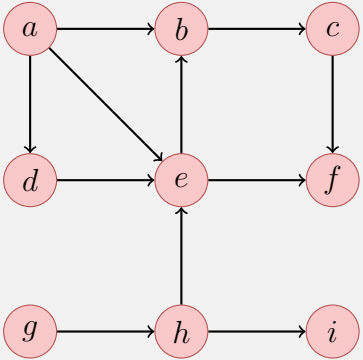
- Weisser Knoten: neue Baumkante
- Grauer Knoten: Zyklus („Rückwärtskante“)
- Schwarzer Knoten: Vorwärts-/Seitwärtskante

Breitensuche

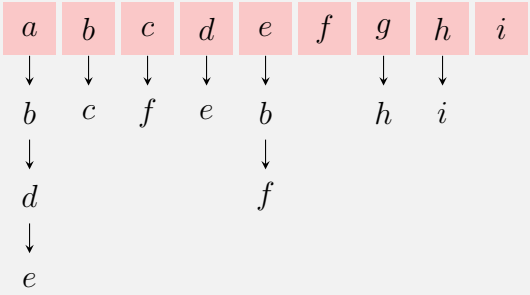


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

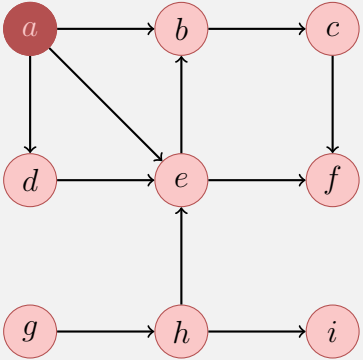


Adjazenzliste

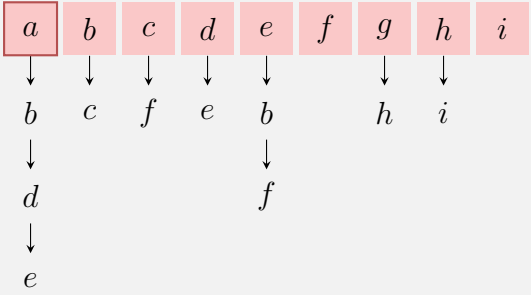


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

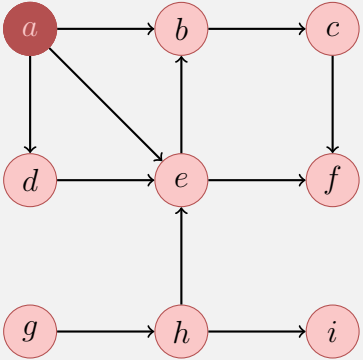


Adjazenzliste

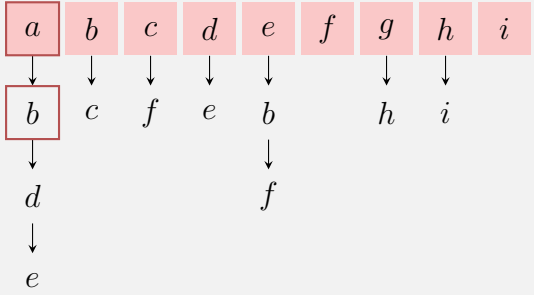


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

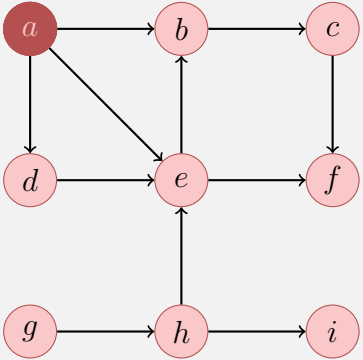


Adjazenzliste

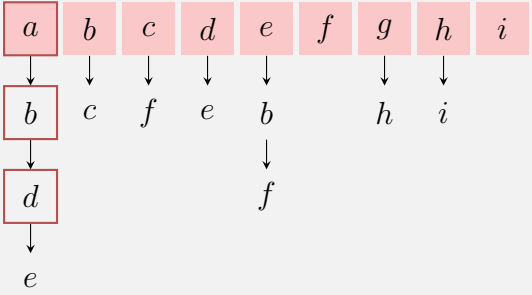


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

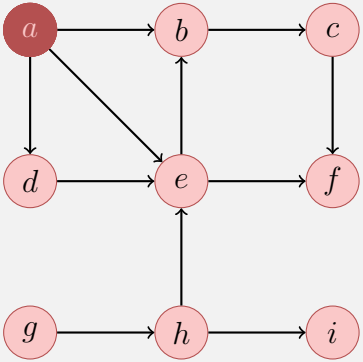


Adjazenzliste

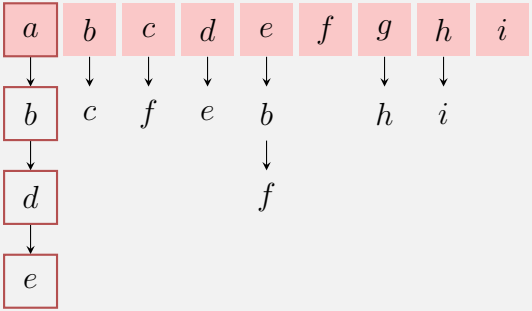


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

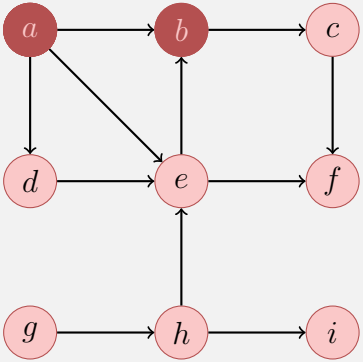


Adjazenzliste

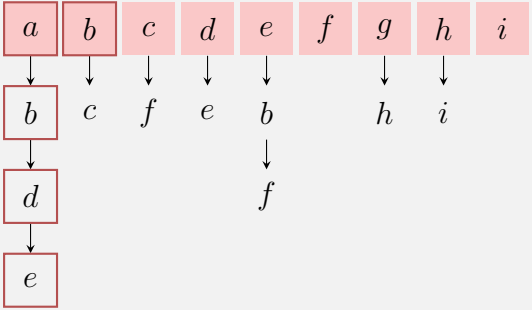


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

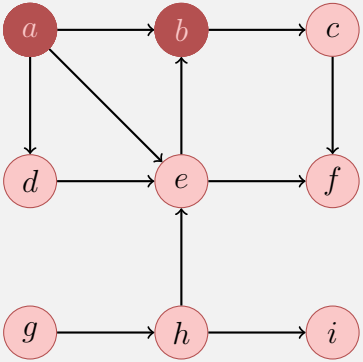


Adjazenzliste

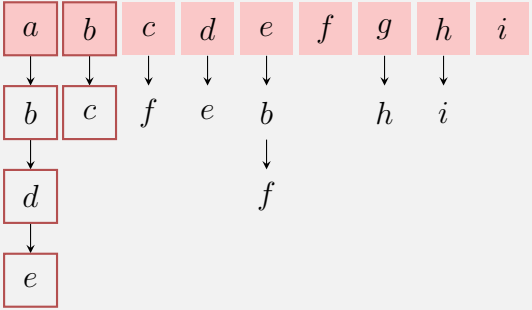


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

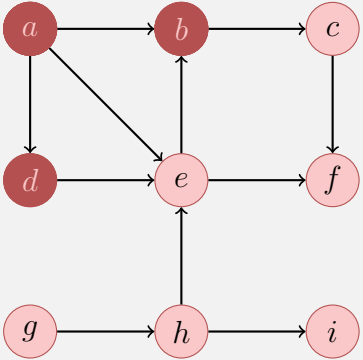


Adjazenzliste

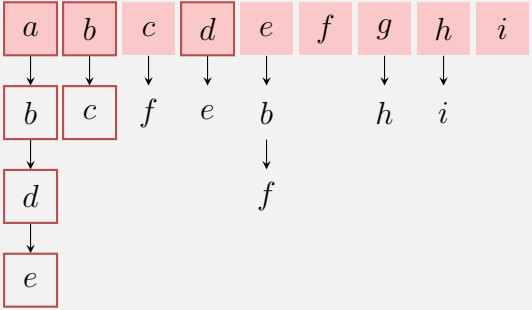


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

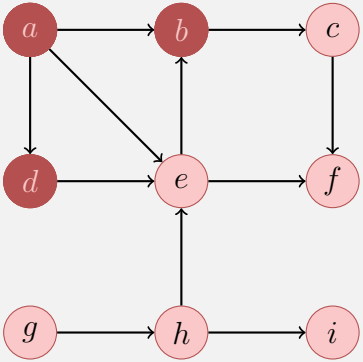


Adjazenzliste

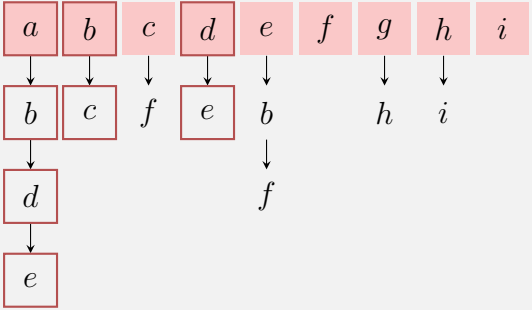


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

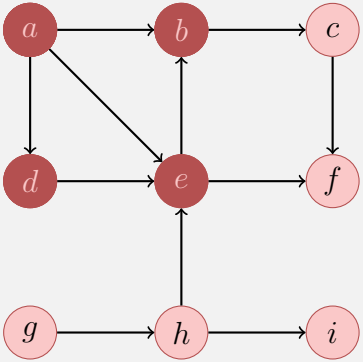


Adjazenzliste

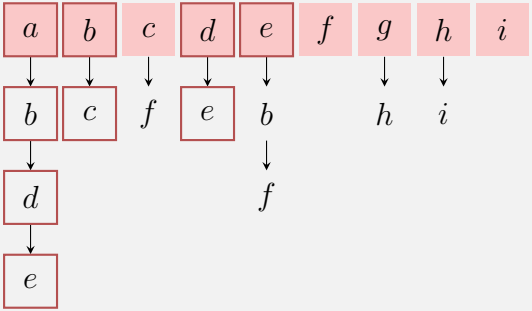


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

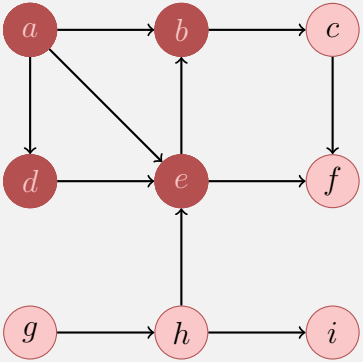


Adjazenzliste

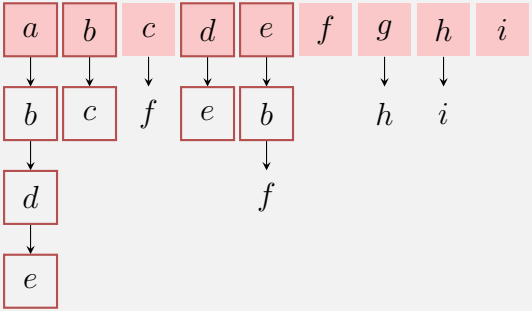


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

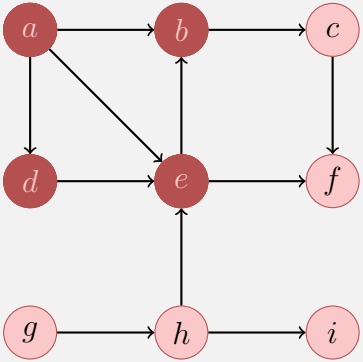


Adjazenzliste

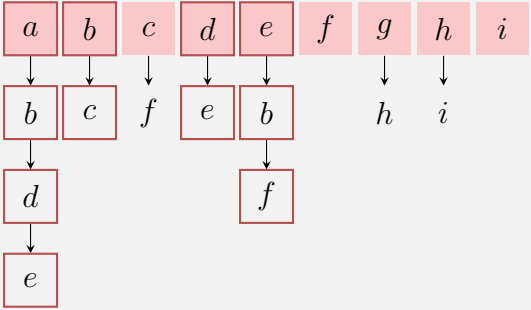


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

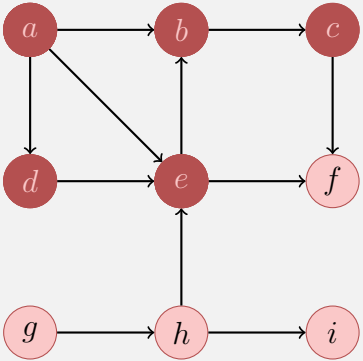


Adjazenzliste

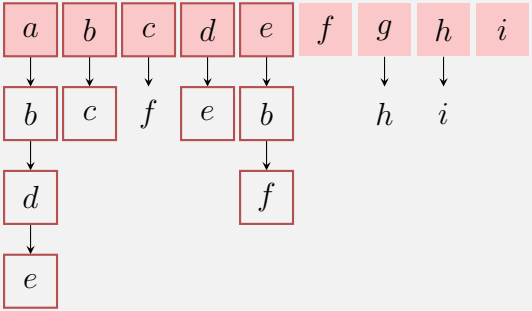


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

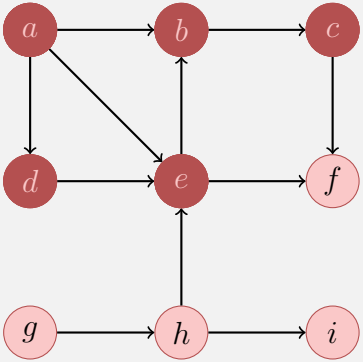


Adjazenzliste

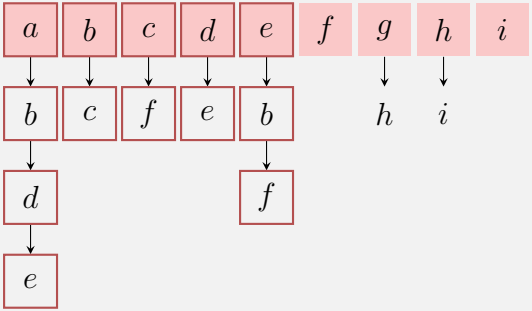


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

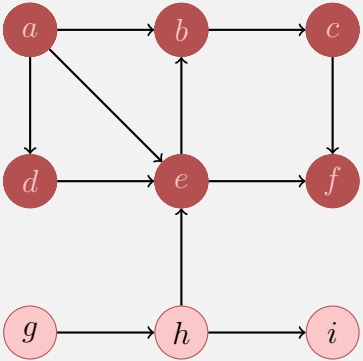


Adjazenzliste

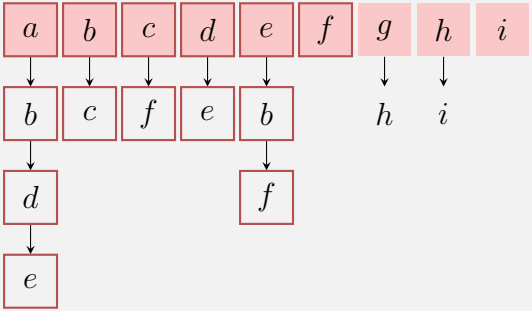


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

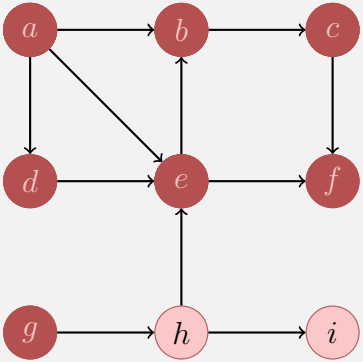


Adjazenzliste

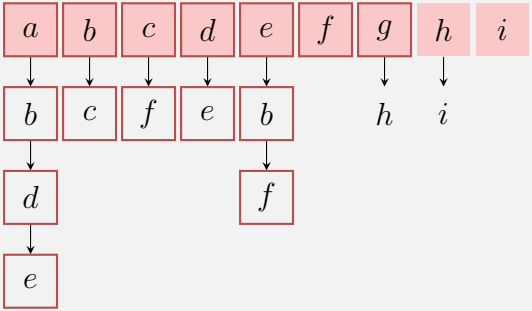


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

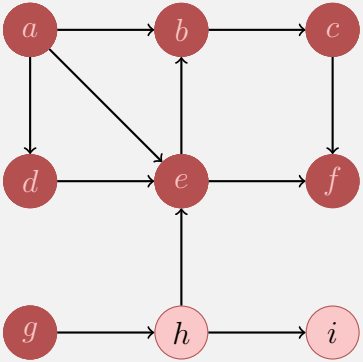


Adjazenzliste

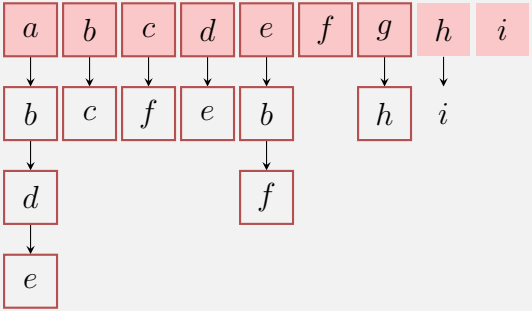


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

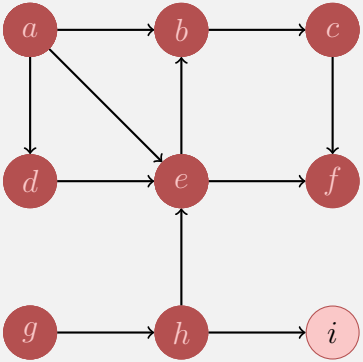


Adjazenzliste

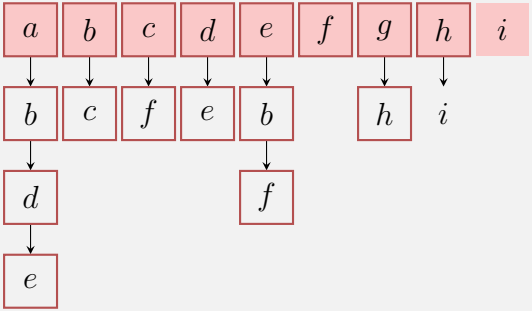


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

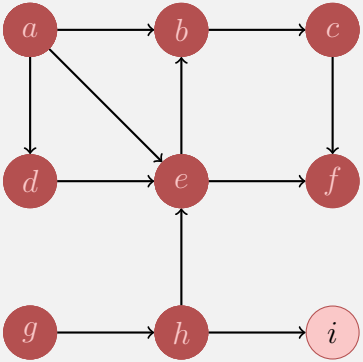


Adjazenzliste

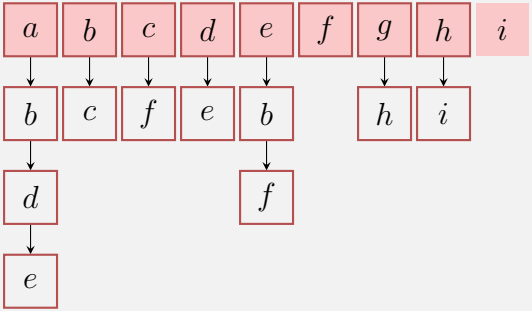


Graphen Traversieren: Breitensuche

Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.

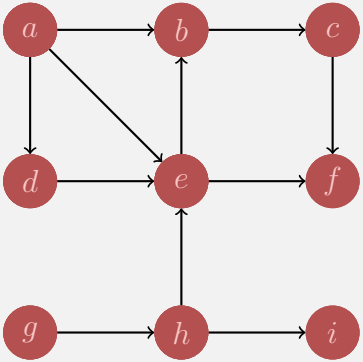


Adjazenzliste



Graphen Traversieren: Breitensuche

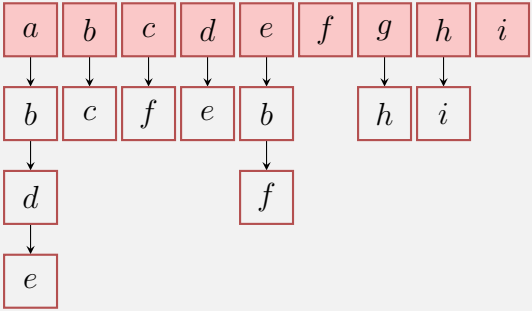
Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.



Reihenfolge

$a, b, d, e, c, f, g, h, i$

Adjazenzliste



(Iteratives) BFS-Visit(G, v)

Input: Graph $G = (V, E)$

```
Queue Q ← ∅
v.color ← grey
enqueue(Q, v)
while Q ≠ ∅ do
    w ← dequeue(Q)
    foreach c ∈ N⁺(w) do
        if c.color = white then
            c.color ← grey
            enqueue(Q, c)
    w.color ← black
```

Algorithmus kommt mit $\mathcal{O}(|V|)$ Extraplatz aus.

Rahmenprogramm BFS-Visit(G)

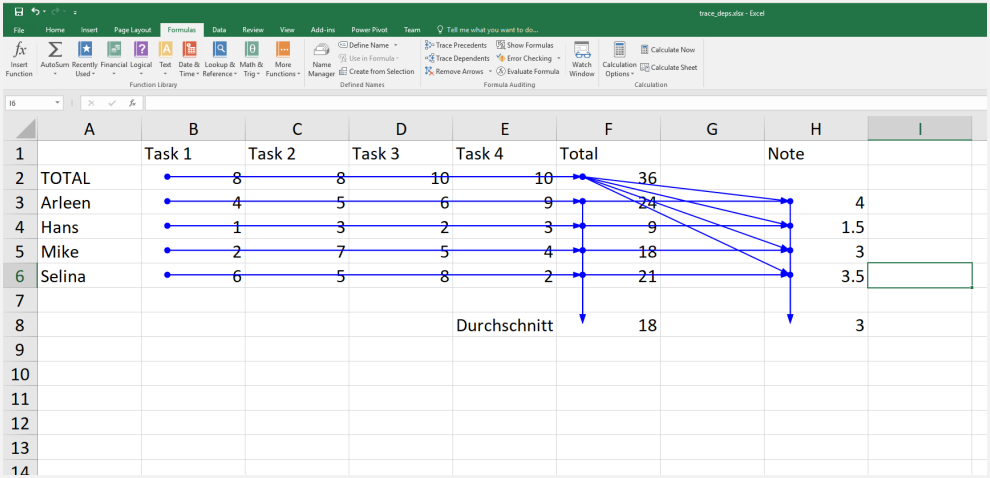
Input: Graph $G = (V, E)$

foreach $v \in V$ **do**
    $v.color \leftarrow$ white

foreach $v \in V$ **do**
    if $v.color =$ white **then**
        BFS-Visit(G,v)

Breitensuche für alle Knoten eines Graphen. Laufzeit $\Theta(|V| + |E|)$.

Topologisches Sortieren



Auswertungsreihenfolge?

Topologische Sortierung

Topologische Sortierung eines azyklischen gerichteten Graphen $G = (V, E)$:

Bijektive Abbildung

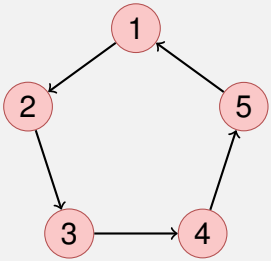
$$\mathrm{ord} : V \to \{1, \ldots, |V|\}$$

so dass

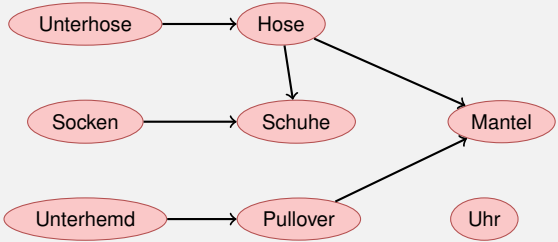
$$\mathrm{ord}(v) < \mathrm{ord}(w) \; \forall \; (v, w) \in E.$$

Identifizieren Wert i mit dem Element $v_i := \mathrm{ord}^{-1}(i)$. Topologische Sortierung $\widehat{=} \langle v_1, \ldots, v_{|V|} \rangle$.

(Gegen-)Beispiele



Zyklischer Graph: kann nicht topologisch sortiert werden.



Eine mögliche Topologische Sortierung des Graphen:
Unterhemd,Pullover,Unterhose,Uhr,Hose,Mantel,Socken,Schuhe

Beobachtung

Theorem

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann eine topologische Sortierung, wenn er kreisfrei ist

Beobachtung

Theorem

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann eine topologische Sortierung, wenn er kreisfrei ist

Beweis "$\Rightarrow$": Wenn G einen Kreis besitzt, so besitzt er keine topologische Sortierung. Denn in einem Kreis $\langle v_{i_1}, \ldots, v_{i_m} \rangle$ gälte $v_{i_1} < \cdots < v_{i_m} < v_{i_1}$.

Induktiver Beweis Gegenrichtung

- Anfang ($n = 1$): Graph mit einem Knoten ohne Schleife ist topologisch sortierbar. Setze $\mathrm{ord}(v_1) = 1$.

Induktiver Beweis Gegenrichtung

- Anfang ($n = 1$): Graph mit einem Knoten ohne Schleife ist topologisch sortierbar. Setze $\mathrm{ord}(v_1) = 1$.
- Hypothese: Graph mit n Knoten kann topologisch sortiert werden.

Induktiver Beweis Gegenrichtung

- Anfang ($n = 1$): Graph mit einem Knoten ohne Schleife ist topologisch sortierbar. Setze $\mathrm{ord}(v_1) = 1$.
- Hypothese: Graph mit n Knoten kann topologisch sortiert werden.
- Schritt ($n \to n + 1$):

Induktiver Beweis Gegenrichtung

- Anfang ($n = 1$): Graph mit einem Knoten ohne Schleife ist topologisch sortierbar. Setze $\mathrm{ord}(v_1) = 1$.
- Hypothese: Graph mit n Knoten kann topologisch sortiert werden.
- Schritt ($n \to n + 1$):
  1. G enthält einen Knoten v_q mit Eingangsgrad $\deg^-(v_q) = 0$. Andernfalls verfolge iterativ Kanten rückwärts – nach spätestens $n + 1$ Iterationen würde man einen Knoten besuchen, welcher bereits besucht wurde. Widerspruch zur Zyklenfreiheit.

Induktiver Beweis Gegenrichtung

- Anfang ($n = 1$): Graph mit einem Knoten ohne Schleife ist topologisch sortierbar. Setze $\mathrm{ord}(v_1) = 1$.
- Hypothese: Graph mit n Knoten kann topologisch sortiert werden.
- Schritt ($n \to n + 1$):
  1. G enthält einen Knoten v_q mit Eingangsgrad $\deg^-(v_q) = 0$. Andernfalls verfolge iterativ Kanten rückwärts – nach spätestens $n + 1$ Iterationen würde man einen Knoten besuchen, welcher bereits besucht wurde. Widerspruch zur Zyklenfreiheit.
  2. Graph ohne Knoten v_q und ohne dessen Eingangskanten kann nach Hypothese topologisch sortiert werden. Verwende diese Sortierung, setze $\mathrm{ord}(v_i) \leftarrow \mathrm{ord}(v_i) + 1$ für alle $i \neq q$ und setze $\mathrm{ord}(v_q) \leftarrow 1$.

Algorithmus, vorläufiger Entwurf

Graph $G = (V, E)$. $d \leftarrow 1$

1. Traversiere von beliebigem Knoten rückwärts bis ein Knoten v_q mit Eingangsgrad 0 gefunden ist.

Laufzeit im schlechtesten Fall:

Algorithmus, vorläufiger Entwurf

Graph $G = (V, E)$. $d \leftarrow 1$

1. Traversiere von beliebigem Knoten rückwärts bis ein Knoten v_q mit Eingangsgrad 0 gefunden ist.
2. Wird kein Knoten mit Eingangsgrad 0 gefunden (n Schritte), dann Zyklus gefunden.

Laufzeit im schlechtesten Fall:

Algorithmus, vorläufiger Entwurf

Graph $G = (V, E)$. $d \leftarrow 1$

1. Traversiere von beliebigem Knoten rückwärts bis ein Knoten v_q mit Eingangsgrad 0 gefunden ist.
2. Wird kein Knoten mit Eingangsgrad 0 gefunden (n Schritte), dann Zyklus gefunden.
3. Setze $\mathrm{ord}(v_q) \leftarrow d$.

Laufzeit im schlechtesten Fall:

Algorithmus, vorläufiger Entwurf

Graph $G = (V, E)$. $d \leftarrow 1$

1. Traversiere von beliebigem Knoten rückwärts bis ein Knoten v_q mit Eingangsgrad 0 gefunden ist.
2. Wird kein Knoten mit Eingangsgrad 0 gefunden (n Schritte), dann Zyklus gefunden.
3. Setze $\mathrm{ord}(v_q) \leftarrow d$.
4. Entferne v_q und seine Kanten von G.

Laufzeit im schlechtesten Fall:

Algorithmus, vorläufiger Entwurf

Graph $G = (V, E)$. $d \leftarrow 1$

1. Traversiere von beliebigem Knoten rückwärts bis ein Knoten v_q mit Eingangsgrad 0 gefunden ist.
2. Wird kein Knoten mit Eingangsgrad 0 gefunden (n Schritte), dann Zyklus gefunden.
3. Setze $\mathrm{ord}(v_q) \leftarrow d$.
4. Entferne v_q und seine Kanten von G.
5. Wenn $V \neq \emptyset$, dann $d \leftarrow d + 1$, gehe zu Schritt 1.

Laufzeit im schlechtesten Fall:

Algorithmus, vorläufiger Entwurf

Graph $G = (V, E)$. $d \leftarrow 1$

1. Traversiere von beliebigem Knoten rückwärts bis ein Knoten v_q mit Eingangsgrad 0 gefunden ist.
2. Wird kein Knoten mit Eingangsgrad 0 gefunden (n Schritte), dann Zyklus gefunden.
3. Setze $\mathrm{ord}(v_q) \leftarrow d$.
4. Entferne v_q und seine Kanten von G.
5. Wenn $V \neq \emptyset$, dann $d \leftarrow d + 1$, gehe zu Schritt 1.

Laufzeit im schlechtesten Fall:

Algorithmus, vorläufiger Entwurf

Graph $G = (V, E)$. $d \leftarrow 1$

1. Traversiere von beliebigem Knoten rückwärts bis ein Knoten v_q mit Eingangsgrad 0 gefunden ist.
2. Wird kein Knoten mit Eingangsgrad 0 gefunden (n Schritte), dann Zyklus gefunden.
3. Setze $\mathrm{ord}(v_q) \leftarrow d$.
4. Entferne v_q und seine Kanten von G.
5. Wenn $V \neq \emptyset$, dann $d \leftarrow d + 1$, gehe zu Schritt 1.

Laufzeit im schlechtesten Fall: $\Theta(|V|^2)$.

Verbesserung

Idee?

Verbesserung

Idee?

Berechne die Eingangsgrade der Knoten im Voraus und durchlaufe dann jeweils die Knoten mit Eingangsgrad 0 die Eingangsgrade der Nachfolgeknoten korrigierend.

Algorithmus Topological-Sort(G)

Input: Graph $G = (V, E)$.
Output: Topologische Sortierung ord

```
Stack S ← ∅
foreach v ∈ V do A[v] ← 0
foreach (v, w) ∈ E do A[w] ← A[w] + 1 // Eingangsgrade berechnen
foreach v ∈ V with A[v] = 0 do push(S, v) // Merke Nodes mit Eingangsgrad 0
i ← 1
while S ≠ ∅ do
    v ← pop(S); ord[v] ← i; i ← i + 1 // Wähle Knoten mit Eingangsgrad 0
    foreach (v, w) ∈ E do // Verringere Eingangsgrad der Nachfolger
        A[w] ← A[w] − 1
        if A[w] = 0 then push(S, w)
if i = |V| + 1 then return ord else return "Cycle Detected"
```

Algorithmus Korrektheit

Theorem

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, kreisfreier Graph. Der Algorithmus TopologicalSort(G) berechnet in Zeit $\Theta(|V| + |E|)$ eine topologische Sortierung ord für G.

Algorithmus Korrektheit

Theorem

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, kreisfreier Graph. Der Algorithmus TopologicalSort(G) berechnet in Zeit $\Theta(|V| + |E|)$ eine topologische Sortierung ord für G.

Beweis: folgt im wesentlichen aus vorigem Theorem:

1. Eingangsgrad verringern entspricht Knotenentfernen.
2. Im Algorithmus gilt für jeden Knoten v mit $A[v] = 0$ dass entweder der Knoten Eingangsgrad 0 hat oder dass zuvor alle Vorgänger einen Wert $\mathrm{ord}[u] \leftarrow i$ zugewiesen bekamen und somit $\mathrm{ord}[v] > \mathrm{ord}[u]$ für alle Vorgänger u von v. Knoten werden nur einmal auf den Stack gelegt.
3. Laufzeit: Inspektion des Algorithmus (mit Argumenten wie beim Traversieren).

Algorithmus Korrektheit

Theorem

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, nicht kreisfreier Graph. Der Algorithmus TopologicalSort(G) terminiert in Zeit $\Theta(|V| + |E|)$ und detektiert Zyklus.

Algorithmus Korrektheit

Theorem

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, nicht kreisfreier Graph. Der Algorithmus TopologicalSort(G) terminiert in Zeit $\Theta(|V| + |E|)$ und detektiert Zyklus.

Beweis: Sei $\langle v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \rangle$ ein Kreis in G. In jedem Schritt des Algorithmus bleibt $A[v_{i_j}] \geq 1$ für alle $j = 1, \ldots, k$. Also werden k Knoten nie auf den Stack gelegt und somit ist zum Schluss $i \leq V + 1 - k$.

Die Laufzeit des zweiten Teils des Algorithmus kann kürzer werden, jedoch kostet die Berechnung der Eingangsgrade bereits $\Theta(|V| + |E|)$.