12. Dynamische Programmierung

Memoisieren, Optimale Substruktur, Überlappende Teilprobleme, Abhängigkeiten, Allgemeines Vorgehen. Beispiele: Schneiden von Eisenstangen, Kaninchen, Editierdistanz

[Ottman/Widmayer, Kap. 7.1, 7.4, Cormen et al, Kap. 15]

Fibonacci Zahlen

 (schon wieder)

$$F_n := \begin{cases} n & \text{wenn } n < 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{wenn } n \geq 2. \end{cases}$$

Analyse: warum ist der rekursive Algorithmus so langsam.

Algorithmus FibonacciRecursive(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

if $n < 2$ **then**
  $f \leftarrow n$
else
  $f \leftarrow \text{FibonacciRecursive}(n-1) + \text{FibonacciRecursive}(n-2)$
return f

Analyse

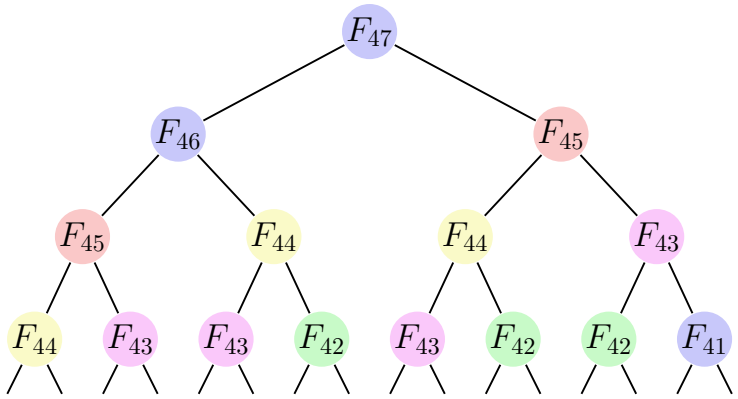
$T(n)$: Anzahl der ausgeführten Operationen.

- $n = 0, 1$: $T(n) = \Theta(1)$
- $n \geq 2$: $T(n) = T(n-2) + T(n-1) + c$.

$$T(n) = T(n-2) + T(n-1) + c \geq 2T(n-2) + c \geq 2^{n/2}c' = (\sqrt{2})^n c'$$

Algorithmus ist *exponentiell (!)* in n.

Grund, visualisiert



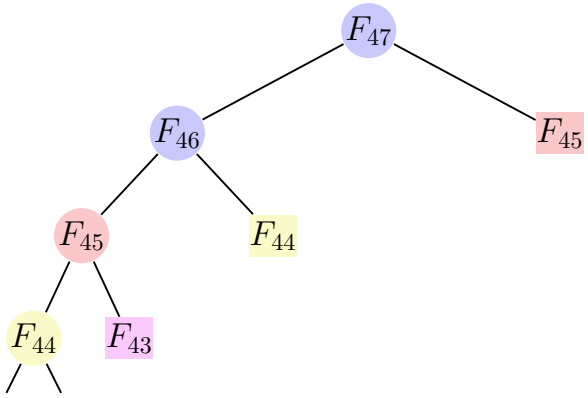
Knoten mit denselben Werten werden (zu) oft ausgewertet.

Memoization

Memoization (sic) Abspeichern von Zwischenergebnissen.

- Bevor ein Teilproblem gelöst wird, wird Existenz eines entsprechenden Zwischenergebnis geprüft.
- Existiert ein gespeichertes Zwischenergebnis bereits, so wird dieses verwendet.
- Andernfalls wird der Algorithmus ausgeführt und das Ergebnis wird entsprechend gespeichert.

Memoization bei Fibonacci



Rechteckige Knoten wurden bereits ausgewertet.

Algorithmus FibonacciMemoization(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

if $n \leq 2$ **then**
  $f \leftarrow 1$
else if $\exists$memo$[n]$ **then**
  $f \leftarrow$ memo$[n]$
else
  $f \leftarrow$ FibonacciMemoization$(n-1)$ + FibonacciMemoization$(n-2)$
  memo$[n] \leftarrow f$
return f

Analyse

Berechnungsaufwand:

$$T(n) = T(n-1) + c = ... = \mathcal{O}(n).$$

denn nach dem Aufruf von $f(n-1)$ wurde $f(n-2)$ bereits berechnet.

Das lässt sich auch so sehen: Für jedes n wird $f(n)$ maximal einmal rekursiv berechnet. Laufzeitkosten: n Aufrufe mal $\Theta(1)$ Kosten pro Aufruf $n \cdot c \in \Theta(n)$. Die Rekursion verschwindet aus der Berechnung der Laufzeit.

Algorithmus benötigt $\Theta(n)$ Speicher.[19]

[19] Allerdings benötigt der naive Algorithmus auch $\Theta(n)$ Speicher für die Rekursionsverwaltung.

Genauer hingesehen ...

... berechnet der Algorithmus der Reihe nach die Werte F_1, F_2, F_3,
... verkleidet im *Top-Down* Ansatz der Rekursion.

Man kann den Algorithmus auch gleich *Bottom-Up* hinschreiben.
Das ist charakteristisch für die *dynamische Programmierung*.

Algorithmus FibonacciBottomUp(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

$F[1] \leftarrow 1$
$F[2] \leftarrow 1$
for $i \leftarrow 3, \ldots, n$ **do**
  $F[i] \leftarrow F[i-1] + F[i-2]$
return $F[n]$

Dynamische Programmierung: Idee

- Aufteilen eines komplexen Problems in eine vernünftige Anzahl kleinerer Teilprobleme
- Die Lösung der Teilprobleme wird zur Lösung des komplexeren Problems verwendet
- Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

Dynamische Programmierung: Konsequenz

Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

$\Rightarrow$ Resultate werden zwischengespeichert

Wir tauschen Laufzeit gegen Speicherplatz

Dynamic Programming: Beschreibung

1. Verwalte *DP-Tabelle* mit Information zu den Teilproblemen.
   Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?
2. Berechnung der *Randfälle*.
   Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?
3. *Berechnungsreihenfolge* bestimen.
   In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?
4. Auslesen der *Lösung*.
   Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

Laufzeit (typisch) = Anzahl Einträge der Tabelle mal Aufwand pro Eintrag.

Dynamic Programming: Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**
   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält n-te Fibonacci Zahl.
2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**
   Werte F_1 und F_2 sind unabhängig einfach “berechenbar”.
3. **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**
   F_i mit aufsteigenden i.
4. **Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?**
   F_n ist die n-te Fibonacci-Zahl.

Dynamic Programming = Divide-And-Conquer ?

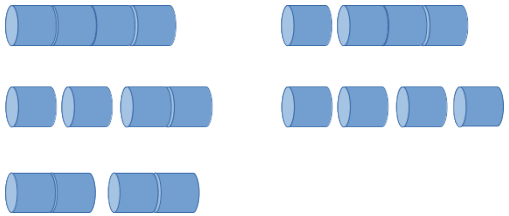
- In beiden Fällen ist das Ursprungsproblem (einfacher) lösbar, indem Lösungen von Teilproblemen herangezogen werden können. Das Problem hat *optimale Substruktur*.
- Bei Divide-And-Conquer Algorithmen (z.B. Mergesort) sind Teilprobleme unabhängig; deren Lösungen werden im Algorithmus nur einmal benötigt.
- Beim DP sind Teilprobleme nicht unabhängig. Das Problem hat *überlappende Teilprobleme*, welche im Algorithmus mehrfach gebraucht werden.
- Damit sie nur einmal gerechnet werden müssen, werden Resultate tabelliert. Dafür darf es *zwischen Teilproblemen keine zirkulären Abhängigkeiten* geben.

Schneiden von Eisenstäben

- Metallstäbe werden zerschnitten und verkauft.
- Metallstäbe der Länge $n \in \mathbb{N}$ verfügbar. Zerschneiden kostet nichts.
- Für jede Länge $l \in \mathbb{N}$, $l \leq n$ bekannt: Wert $v_l \in \mathbb{R}^+$
- Ziel: Zerschneide die Stange so (in $k \in \mathbb{N}$ Stücke), dass

$$\sum_{i=1}^{k} v_{l_i} \text{ maximal unter } \sum_{i=1}^{k} l_i = n.$$

Schneiden von Eisenstäben: Beispiel



Arten, einen Stab der Länge 4 zu zerschneiden (ohne Permutationen)

Länge	0	1	2	3	4
Preis	0	2	3	8	9

$\Rightarrow$ Bester Schnitt: 3 + 1 mit Wert 10.

Wie findet man den DP Algorithmus

0. Genaue Formulierung der gesuchten Lösung
1. Definiere Teilprobleme (und bestimme deren Anzahl)
2. Raten / Aufzählen (und bestimme die Laufzeit für das Raten)
3. Rekursion: verbinde die Teilprobleme
4. Memoisieren / Tabellieren. Bestimme die Abhängigkeiten der Teilprobleme
5. Lösung des Problems
   Laufzeit = #Teilprobleme $\times$ Zeit/Teilproblem

Struktur des Problems

0. *Gesucht:* r_n = maximal erreichbarer Wert von (ganzem oder geschnittenem) Stab mit Länge n.
1. *Teilprobleme:* maximal erreichbarer Wert r_k für alle $0 \leq k < n$
2. *Rate* Länge des ersten Stückes
3. *Rekursion*

$$r_k = \max\{v_i + r_{k-i} : 0 < i \leq k\}, \quad k > 0$$
$$r_0 = 0$$

4. *Abhängigkeit:* r_k hängt (nur) ab von den Werten v_i, $l \leq i \leq k$ und den optimalen Schnitten r_i, $i < k$
5. *Lösung* in r_n

Algorithmus RodCut(v,n)

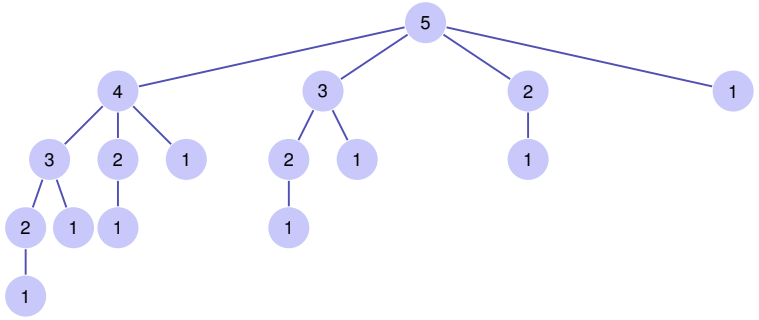
Input: $n \geq 0$, Preise v
Output: bester Wert

$q \leftarrow 0$
if $n > 0$ **then**
  for $i \leftarrow 1, \ldots, n$ **do**
    $q \leftarrow \max\{q, v_i + \text{RodCut}(v, n-i)\}$;
return q

Laufzeit $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + c \quad \Rightarrow^{20} \quad T(n) \in \Theta(2^n)$

[20] $T(n) = T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + c = T(n-1) + (T(n-1) - c) + c = 2T(n-1) \quad (n > 0)$

Rekursionsbaum



Algorithmus RodCutMemoized(m, v, n)

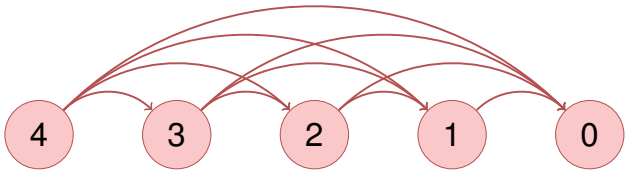
Input: $n \geq 0$, Preise v, Memoization Tabelle m
Output: bester Wert

$q \leftarrow 0$
if $n > 0$ **then**
  if $\exists\, m[n]$ **then**
    $q \leftarrow m[n]$
  else
    for $i \leftarrow 1, \ldots, n$ **do**
      $q \leftarrow \max\{q, v_i + \text{RodCutMemoized}(m, v, n-i)\}$;
    $m[n] \leftarrow q$
return q

Laufzeit $\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$

Teilproblem-Graph

beschreibt die Abhängigkeiten der Teilprobleme untereinander



und darf keine Zyklen enthalten

Konstruktion des optimalen Schnittes

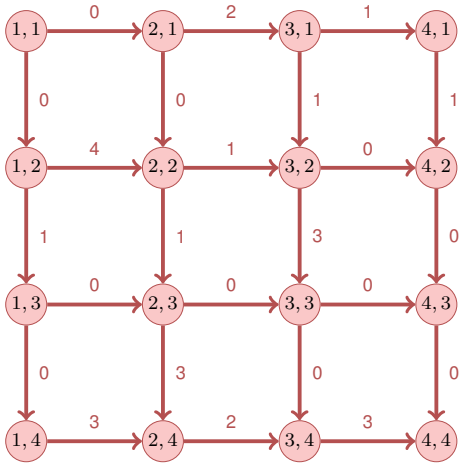
- Während der (rekursiven) Berechnung der optimalen Lösung für jedes $k \leq n$ bestimmt der rekursive Algorithmus die optimale Länge des ersten Stabes
- Speichere die Länge des ersten Stabes für jedes $k \leq n$ in einer Tabelle mit n Einträgen.

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**
   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält besten Wert eines Stabes der Länge n.
2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**
   Wert r_0 ist 0.
3. **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**
   r_i, $i = 1, \ldots, n$.
4. **Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?**
   r_n ist der beste Wert für eine Stange der Länge n

Kaninchen!

Ein Kaninchen sitzt auf Platz $(1, 1)$ eines $n \times n$ Gitters. Es kann nur nach Osten oder nach Süden gehen. Auf jedem Wegstück liegt eine Anzahl Rüben. Wie viele Rüben sammelt das Kaninchen maximal ein?

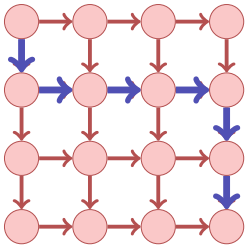


Kaninchen!

Anzahl mögliche Pfade?

- Auswahl von $n - 1$ Wegen nach Süden aus $2n - 2$ Wegen insgesamt.
- $$\binom{2n-2}{n-1} \in \Omega(2^n)$$

$\Rightarrow$ Naiver Algorithmus hat keine Chance



Der Weg 100011
(1:nach Süden, 0:nach Osten)

Rekursion

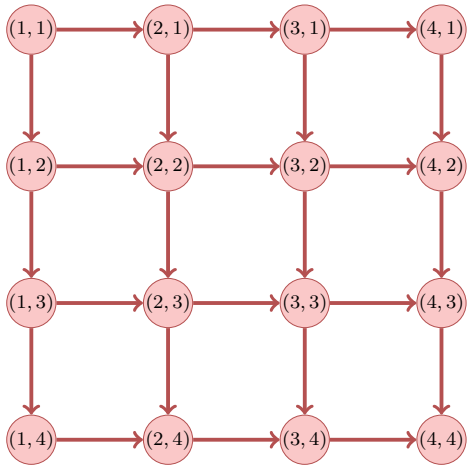
Gesucht: $T_{0,0}$ = *Maximale Anzahl Rüben von* $(0,0)$ *nach* (n,n).

Sei $w_{(i,j)-(i',j')}$ Anzahl Rüben auf Kante von (i,j) nach (i',j').

Rekursion (maximale Anzahl Rüben von (i,j) nach (n,n))

$$T_{ij} = \begin{cases} \max\{w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}\}, & i < n, j < n \\ w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, & i = n, j < n \\ w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}, & i < n, j = n \\ 0 & i = j = n \end{cases}$$

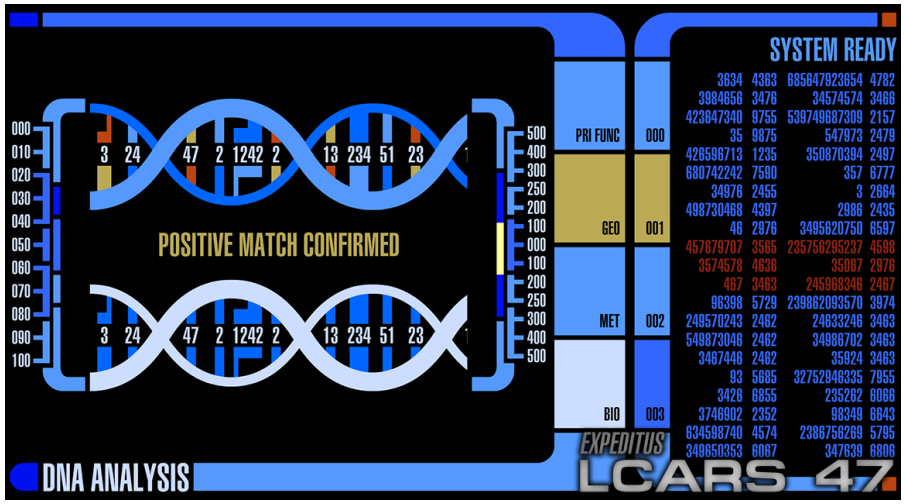
Teilproblemabhängigkeitsgraph



Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**
   Tabelle T der Grösse $n \times n$. Eintrag bei i,j enthält die maximale Anzahl Rüben von (i,j) nach (n,n).
2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**
   Wert $T_{n,n}$ ist 0.
3. **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**
   $T_{i,j}$ mit $i = n \searrow 1$ und für jedes i: $j = n \searrow 1$, (oder umgekehrt: $j = n \searrow 1$ und für jedes j: $i = n \searrow 1$).
4. **Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?**
   $T_{1,1}$ enthält die maximale Anzahl Rüben

DNA - Vergleich (Star Trek)



DNA - Vergleich

- DNA besteht aus Sequenzen von vier verschiedenen Nukleotiden **A**denin **G**uanin **T**hymin **C**ytosin
- DNA-Sequenzen (Gene) werden mit Zeichenketten aus A, G, T und C beschrieben.
- Ein möglicher Vergleich zweier Gene: Bestimme **Längste gemeinsame Teilfolge**

Das Problem, die längste gemeinsame Teilfolge zu finden ist ein Spezialfall der minimalen Editierdistanz. Die folgenden Folien werden daher in der Vorlesung nicht behandelt.

[Längste Gemeiname Teilfolge]

Teilfolgen einer Zeichenkette:

Teilfolgen(KUH): (), (K), (U), (H), (KU), (KH), (UH), (KUH)

Problem:

- Eingabe: Zwei Zeichenketten $A = (a_1, \ldots, a_m)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ der Längen $m > 0$ und $n > 0$.
- Gesucht: Eine längste gemeinsame Teilfolge (LGT) von A und B.

[Längste Gemeiname Teilfolge]

Beispiele:

LGT(IGEL,KATZE)=E, LGT(TIGER,ZIEGE)=IGE

Ideen zur Lösung?

T I G E R
Z I E G E

[Rekursives Vorgehen]

Annahme: Lösungen $L(i, j)$ bekannt für $A[1, \ldots, i]$ und $B[1, \ldots, j]$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$, jedoch nicht für $i = m$ und $j = n$.

T I G E R
Z I E G E

Betrachten Zeichen a_m, b_n. Drei Möglichkeiten:

1. A wird um ein Leerzeichen erweitert. $L(m, n) = L(m, n-1)$
2. B wird um ein Leerzeichen erweitert. $L(m, n) = L(m-1, n)$
3. $L(m, n) = L(m-1, n-1) + \delta_{mn}$ mit $\delta_{mn} = 1$ wenn $a_m = b_n$ und $\delta_{mn} = 0$ sonst

[Rekursion]

$$L(m,n) \leftarrow \max\{L(m-1,n-1)+\delta_{mn}, L(m,n-1), L(m-1,n)\}$$

für $m,n>0$ und Randfälle $L(\cdot,0)=0$, $L(0,\cdot)=0$.

	∅	Z	I	E	G	E
∅	0	0	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0
I	0	0	1	1	1	1
G	0	0	1	1	2	2
E	0	0	1	2	2	3
R	0	0	1	2	2	3

[Dynamic Programming Algorithmus LGT]

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Tabelle $L[0,\ldots,m][0,\ldots,n]$. $L[i,j]$: Länge einer LGT der Zeichenketten $(a_1,\ldots,a_i)$ und $(b_1,\ldots,b_j)$

Berechnung eines Eintrags

2. $L[0,i] \leftarrow 0\ \forall 0 \leq i \leq m$, $L[j,0] \leftarrow 0\ \forall 0 \leq j \leq n$. Berechnung von $L[i,j]$ sonst mit $L[i,j] = \max(L[i-1,j-1]+\delta_{ij}, L[i,j-1], L[i-1,j])$.

[Dynamic Programming Algorithmus LGT]

Berechnungsreihenfolge

3. Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.

Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

4. Beginne bei $j=m$, $i=n$. Falls $a_i = b_j$ gilt, gib a_i aus und fahre fort mit $(j,i) \leftarrow (j-1,i-1)$; sonst, falls $L[i,j] = L[i,j-1]$ fahre fort mit $j \leftarrow j-1$; sonst, falls $L[i,j] = L[i-1,j]$ fahre fort mit $i \leftarrow i-1$. Terminiere für $i=0$ oder $j=0$.

[Analyse LGT]

- Anzahl Tabelleneinträge: $(m+1)\cdot(n+1)$.
- Berechnung jeweils mit konstanter Anzahl Zuweisungen und Vergleichen. Anzahl Schritte $\mathcal{O}(mn)$
- Bestimmen der Lösung: jeweils Verringerung von i oder j. Maximal $\mathcal{O}(n+m)$ Schritte.

Laufzeit insgesamt:

$$\mathcal{O}(mn).$$

Minimale Editierdistanz

Editierdistanz von zwei Zeichenketten $A_n = (a_1, \ldots, a_m)$, $B_m = (b_1, \ldots, b_m)$.

Editieroperationen:

- Einfügen eines Zeichens
- Löschen eines Zeichens
- Änderung eines Zeichens

Frage: Wie viele Editieroperationen sind mindestens nötig, um eine gegebene Zeichenkette A in eine Zeichenkette B zu überführen.

TIGER ZIGER ZIEGER ZIEGE

Minimale Editierdistanz

Gesucht: Günstigste zeichenweise Transformation $A_n \to B_m$ mit Kosten

Operation	Levenshtein	LGT[21]	allgemein
c einfügen	1	1	ins(c)
c löschen	1	1	del(c)
Ersetzen $c \to c'$	$\mathbb{1}(c \neq c')$	$\infty \cdot \mathbb{1}(c \neq c')$	repl(c, c')

Beispiel

T	I	G	E	R		T	I	_	G	E	R		T→Z	+E	-R
Z	I	E	G	E		Z	I	E	G	E	_		Z→T	-E	+R

[21] Längste gemeinsame Teilfolge – Spezialfall des Editierproblems

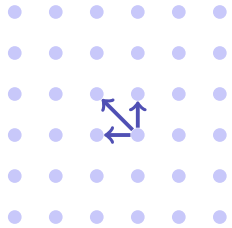
DP

0. $E(n, m)$ = minimale Anzahl Editieroperationen (ED Kosten) für $a_{1\ldots n} \to b_{1\ldots m}$
1. Teilprobleme $E(i, j)$ = ED von $a_{1\ldots i}$. $b_{1\ldots j}$. #TP $= n \cdot m$
2. Raten/Probieren Kosten$\Theta(1)$
   - $a_{1..i} \to a_{1\ldots i-1}$ (löschen)
   - $a_{1..i} \to a_{1\ldots i}b_j$ (einfügen)
   - $a_{1..i} \to a_{1\ldots i_1}b_j$ (ersetzen)
3. Rekursion

$$E(i,j) = \min \begin{cases} \text{del}(a_i) + E(i-1, j), \\ \text{ins}(b_j) + E(i, j-1), \\ \text{repl}(a_i, b_j) + E(i-1, j-1) \end{cases}$$

DP

4. Abhängigkeiten



$\Rightarrow$ Berechnung von links oben nach rechts unten. Zeilen- oder Spaltenweise.

5. Lösung steht in $E(n, m)$

Beispiel (Levenshteinabstand)

$$E[i,j] \leftarrow \min\left\{E[i-1,j]+1, E[i,j-1]+1, E[i-1,j-1]+\mathbb{1}(a_i \neq b_j)\right\}$$

	∅	Z	I	E	G	E
∅	0	1	2	3	4	5
T	1	1	2	3	4	5
I	2	2	1	2	3	4
G	3	3	2	2	2	3
E	4	4	3	2	3	2
R	5	5	4	3	3	3

Editierschritte: von rechts unten nach links oben, der Rekursion folgend. Bottom-Up Beschreibung des Algorithmus: Übung

Bottom-Up DP Algorithmus ED]

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1 Tabelle $E[0,\ldots,m][0,\ldots,n]$. $E[i,j]$: Minimaler Editierabstand der Zeichenketten $(a_1,\ldots,a_i)$ und $(b_1,\ldots,b_j)$

Berechnung eines Eintrags

2 $E[0,i] \leftarrow i\ \forall 0 \leq i \leq m$, $E[j,0] \leftarrow i\ \forall 0 \leq j \leq n$. Berechnung von $E[i,j]$ sonst mit $E[i,j] =$
$\min\{\text{del}(a_i) + E(i-1,j), \text{ins}(b_j) + E(i,j-1), \text{repl}(a_i,b_j) + E(i-1,j-1)\}$

Bottom-Up DP Algorithmus ED

Berechnungsreihenfolge

3 Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.

Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

4 Beginne bei $j = m$, $i = n$. Falls $E[i,j] = \text{repl}(a_i,b_j) + E(i-1,j-1)$ gilt, gib $a_i \rightarrow b_j$ aus und fahre fort mit $(j,i) \leftarrow (j-1,i-1)$; sonst, falls $E[i,j] = \text{del}(a_i) + E(i-1,j)$ gib $\text{del}(a_i)$ aus fahre fort mit $j \leftarrow j-1$; sonst, falls $E[i,j] = \text{ins}(b_j) + E(i,j-1)$, gib $\text{ins}(b_j)$ aus und fahre fort mit $i \leftarrow i-1$. Terminiere für $i = 0$ und $j = 0$.