10. Wiederholung Natürliche Suchbäume und Heaps

[Ottman/Widmayer, Kap. 2.3, 5.1, Cormen et al, Kap. 6, 12.1 - 12.3]

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing:

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing: im schlechtesten Fall lineare Zugriffszeit. Manche Operationen gar nicht unterstützt:

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing: im schlechtesten Fall lineare Zugriffszeit.
Manche Operationen gar nicht unterstützt:

- Aufzählen von Schlüssel in aufsteigender Anordnung

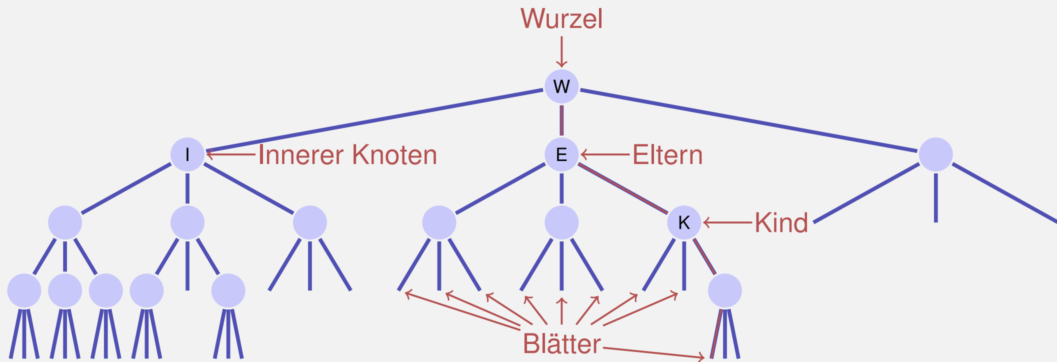
Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing: im schlechtesten Fall lineare Zugriffszeit. Manche Operationen gar nicht unterstützt:

- Aufzählen von Schlüssel in aufsteigender Anordnung
- Nächst kleinerer Schlüssel zu gegebenem Schlüssel

Nomenklatur



- Ordnung des Baumes: Maximale Anzahl Kindknoten, hier: 3
- Höhe des Baumes: maximale Pfadlänge Wurzel – Blatt (hier: 4)

Binäre Bäume

Ein binärer Baum ist entweder

- ein Blatt, d.h. ein leerer Baum, oder
- ein innerer Knoten mit zwei Bäumen T_l (linker Teilbaum) und T_r (rechter Teilbaum) als linken und rechten Nachfolger.

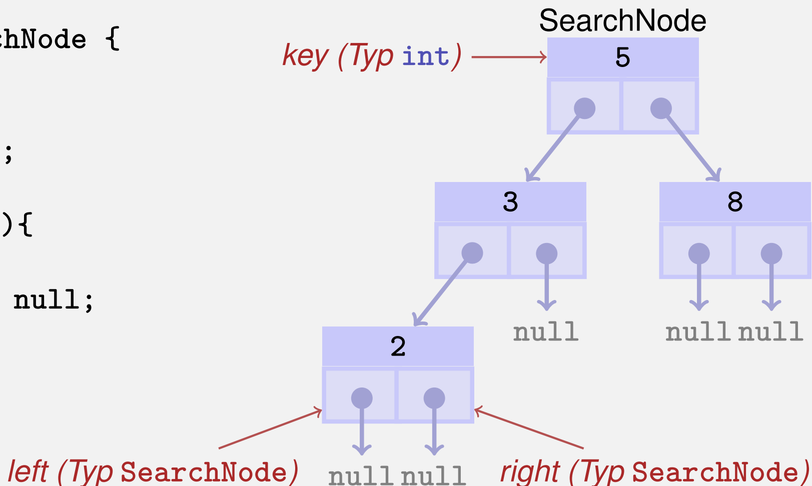
In jedem Knoten v speichern wir

- einen Schlüssel $v.\mathrm{key}$ und
- zwei Zeiger $v.\mathrm{left}$ und $v.\mathrm{right}$ auf die Wurzeln der linken und rechten Teilbäume.
- Ein Blatt wird durch den **null**-Zeiger repräsentiert

Baumknoten in Java

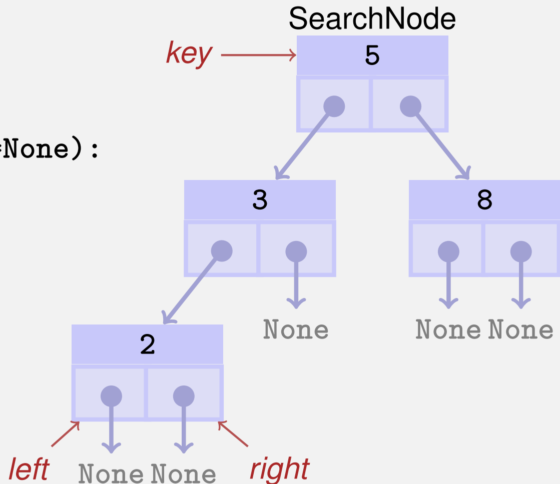
```java
public class SearchNode {
  int key;
  SearchNode left;
  SearchNode right;

  SearchNode(int k){
    key = k;
    left = right = null;
  }
}
```



Baumknoten in Python

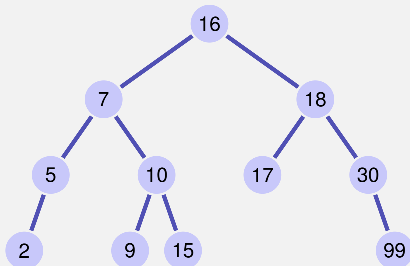
```python
class SearchNode:
  def __init__(self, k, l=None, r=None):
    self.key = k
    self.left, self.right = l, r
    self.flagged = False
```



Binärer Suchbaum

Ein binärer Suchbaum ist ein binärer Baum, der die *Suchbaumeigenschaft* erfüllt:

- Jeder Knoten `v` speichert einen Schlüssel
- Schlüssel im linken Teilbaum `v.left` kleiner als `v.key`
- Schlüssel im rechten Teilbaum `v.right` grösser als `v.key`

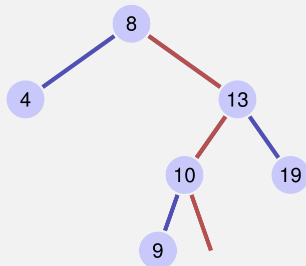


Suchen

Input: Binärer Suchbaum mit Wurzel r,
Schlüssel k
Output: Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

$v \leftarrow r$
while $v \neq$ **null do**
  if $k = v.\text{key}$ **then**
    return v
  else if $k < v.\text{key}$ **then**
    $v \leftarrow v.\text{left}$
  else
    $v \leftarrow v.\text{right}$

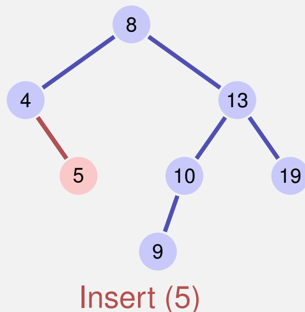
return null



Einfügen eines Schlüssels

Einfügen des Schlüssels k

- Suche nach k.
- Wenn erfolgreich: Fehlerausgabe
- Wenn erfolglos: Einfügen des Schlüssels am erreichten Blatt.

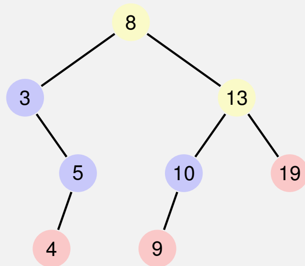


Knoten entfernen

Drei Fälle möglich

- Knoten hat keine Kinder
- Knoten hat ein Kind
- Knoten hat zwei Kinder

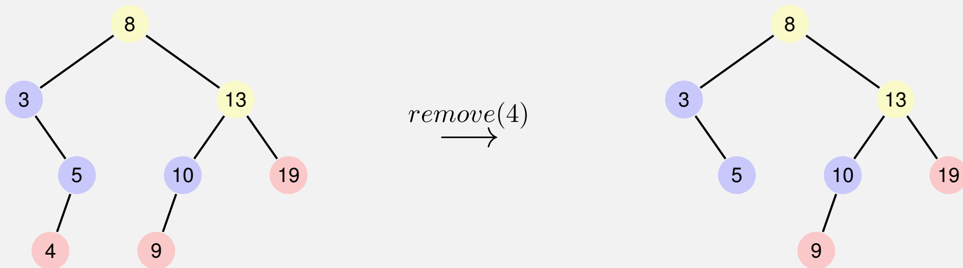
[Blätter zählen hier nicht]



Knoten entfernen

Knoten hat keine Kinder

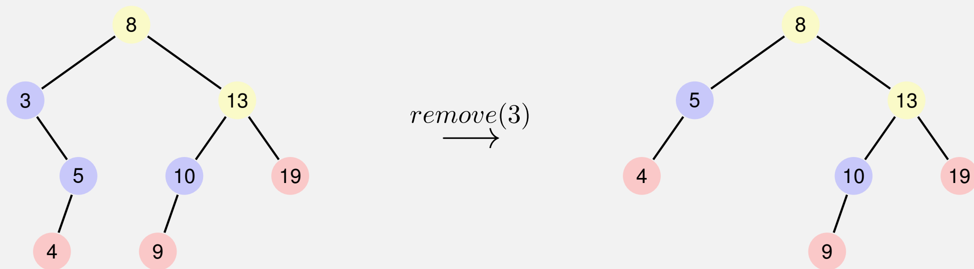
Einfacher Fall: Knoten durch Blatt ersetzen.



Knoten entfernen

Knoten hat ein Kind

Auch einfach: Knoten durch das einzige Kind ersetzen.



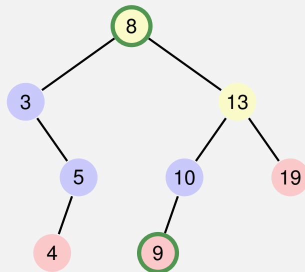
Knoten entfernen

Knoten v hat zwei Kinder

Beobachtung: Der kleinste Schlüssel im rechten Teilbaum `v.right` (der *symmetrische Nachfolger* von `v`)

- ist kleiner als alle Schlüssel in `v.right`
- ist grösser als alle Schlüssel in `v.left`
- und hat kein linkes Kind.

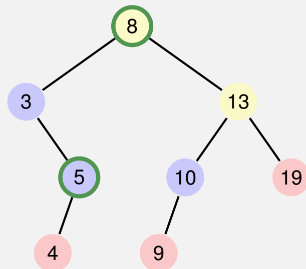
Lösung: ersetze v durch seinen symmetrischen Nachfolger



Aus Symmetriegründen...

Knoten v hat zwei Kinder

Auch möglich: ersetze v durch seinen symmetrischen Vorgänger



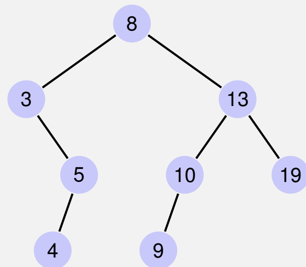
Algorithmus SymmetricSuccessor(v)

Input: Knoten v eines binären Suchbaumes
Output: Symmetrischer Nachfolger von v

$w \leftarrow v.\text{right}$
$x \leftarrow w.\text{left}$
while $x \neq$ **null do**
  $w \leftarrow x$
  $x \leftarrow x.\text{left}$
return w

Traversierungsarten

- Hauptreihenfolge (preorder): v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- Nebenreihenfolge (postorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v.
  4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8
- Symmetrische Reihenfolge (inorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann v, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 19



Höhe eines Baumes

Die Höhe $h(T)$ eines Baumes T mit Wurzel r ist gegeben als

$$h(r) = \begin{cases} 0 & \text{falls } r = \textbf{null} \\ 1 + \max\{h(r.\mathrm{left}), h(r.\mathrm{right})\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Laufzeit der Suche ist somit im schlechtesten Fall $\mathcal{O}(h(T))$

Analyse

Suchen, Einfügen und Löschen eines Elementes v aus einem Baum T benötigt im schlechtesten Fall $\mathcal{O}(h(T))$ Elementarschritte.

Mögliche Höhen

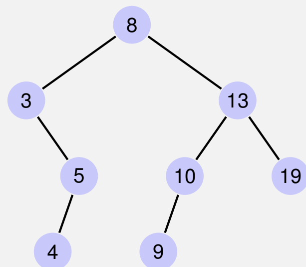
1. Die maximale Höhe h_n eines Baumes mit n inneren Knoten ergibt sich durch $h_1 = 1$ und $h_{n+1} \leq 1 + h_n$ als $h_n \geq n$.
2. Die minimale Höhe h_n eines (ideal balancierten) Baumes mit n inneren Knoten erfüllt $n \leq \sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1$.

Somit

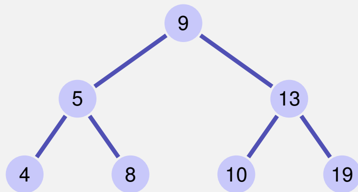
$$\lceil \log_2(n+1) \rceil \leq h \leq n$$

Weitere unterstützte Operationen

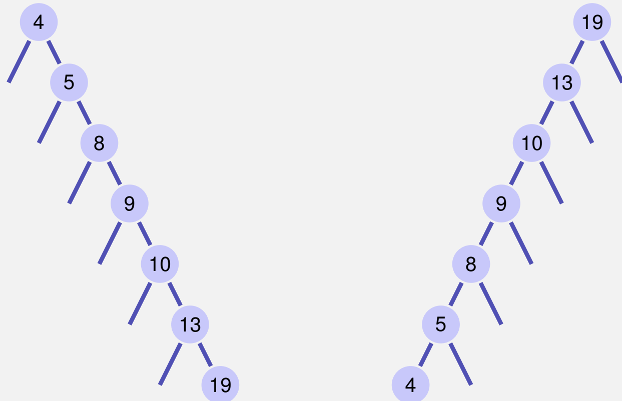
- Min(T): Auslesen des Minimums in $\mathcal{O}(h)$
- ExtractMin(T): Auslesen und Entfernen des Minimums in $\mathcal{O}(h)$
- List(T): Ausgeben einer sortierten Liste der Elemente von T
- Join(T_1, T_2): Zusammenfügen zweier Bäume mit $\max(T_1) < \min(T_2)$ in $\mathcal{O}(n)$.



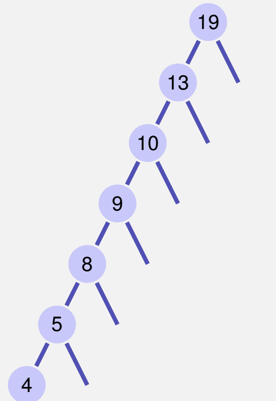
Degenerierte Suchbäume



Insert 9,5,13,4,8,10,19
bestmöglich
balanciert



Insert 4,5,8,9,10,13,19
Lineare Liste



Insert 19,13,10,9,8,5,4
Lineare Liste

[Probabilistisch]

Ein Suchbaum, welcher aus einer zufälligen Sequenz von Zahlen erstellt wird hat erwartete Pfadlänge von $\mathcal{O}(\log n)$.

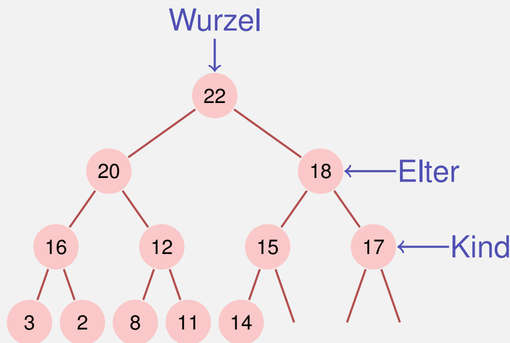
Achtung: das gilt nur für Einfügeoperation. Wird der Baum zufällig durch Einfügen und Entfernen gebildet, ist die erwartete Pfadlänge $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.

Balancierte Bäume stellen beim Einfügen und Entfernen (z.B. durch *Rotationen*) sicher, dass der Baum balanciert bleibt und liefern eine $\mathcal{O}(\log n)$ Worst-Case-Garantie.

[Max-]Heap[8]

Binärer Baum mit folgenden Eigenschaften

1. vollständig, bis auf die letzte Ebene
2. Lücken des Baumes in der letzten Ebene höchstens rechts.
3. *Heap-Bedingung:* Max-(Min-)Heap: Schlüssel eines Kindes kleiner (grösser) als der des Elternknotens

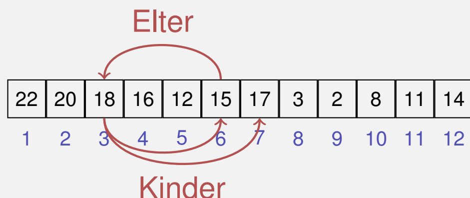


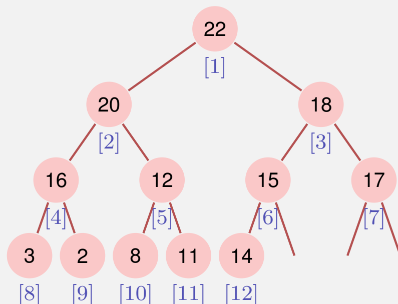
[8]Heap (Datenstruktur), nicht: wie in “Heap und Stack” (Speicherallokation)

Heap und Array

Baum $\rightarrow$ Array:

- Kinder$(i) = \{2i, 2i+1\}$
- Elter$(i) = \lfloor i/2 \rfloor$





Abhängig von Startindex![9]

[9] Für Arrays, die bei 0 beginnen: $\{2i, 2i+1\} \rightarrow \{2i+1, 2i+2\}$, $\lfloor i/2 \rfloor \rightarrow \lfloor (i-1)/2 \rfloor$

Höhe eines Heaps

Vollständiger binärer Baum der Höhe[10] h hat

$$1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{h-1} = \sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1$$

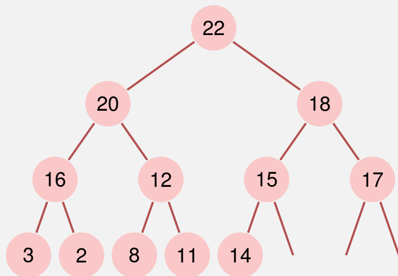
Knoten. Somit gilt für einen Heap der Höhe h:

$$2^{h-1} - 1 < n \leq 2^h - 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 2^{h-1} < n + 1 \leq 2^h$$

Also insbesondere $h(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ und $h(n) \in \Theta(\log n)$.

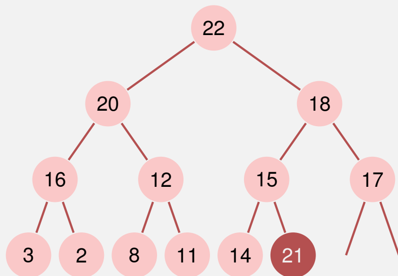
[10] Hier: Anzahl Kanten von der Wurzel zu einem Blatt

Einfügen



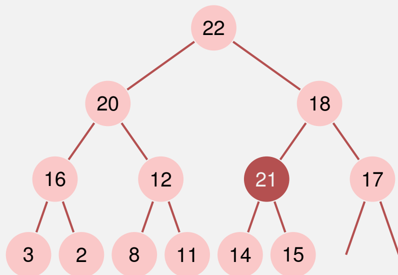
Einfügen

- Füge neues Element an erste freie Stelle ein. Verletzt Heap Eigenschaft potentiell.



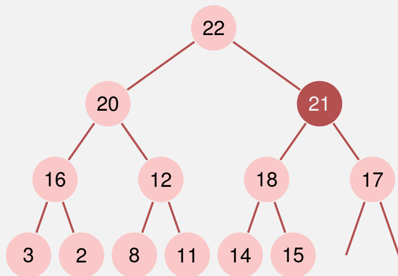
Einfügen

- Füge neues Element an erste freie Stelle ein. Verletzt Heap Eigenschaft potentiell.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Aufsteigen.



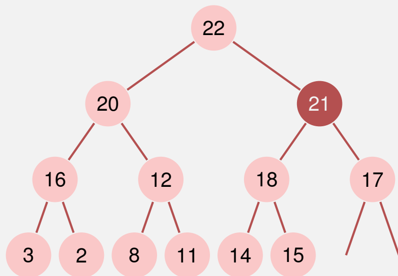
Einfügen

- Füge neues Element an erste freie Stelle ein. Verletzt Heap Eigenschaft potentiell.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Aufsteigen.

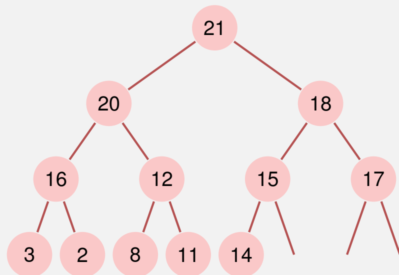


Einfügen

- Füge neues Element an erste freie Stelle ein. Verletzt Heap Eigenschaft potentiell.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Aufsteigen.
- Anzahl Operationen im schlechtesten Fall: $\mathcal{O}(\log n)$

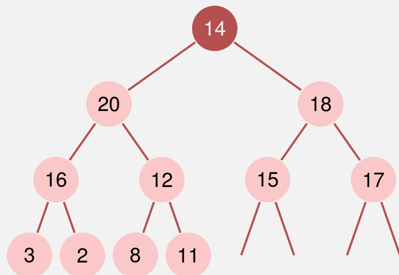


Maximum entfernen



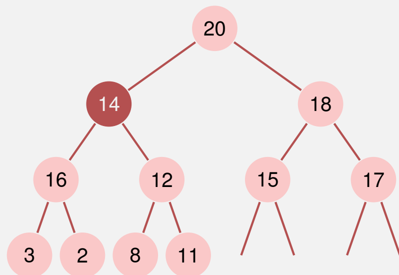
Maximum entfernen

- Ersetze das Maximum durch das unterste rechte Element.



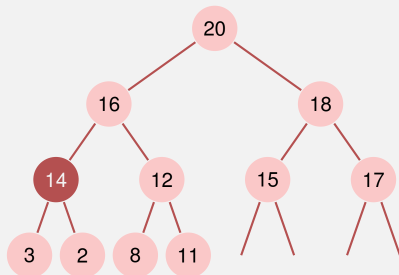
Maximum entfernen

- Ersetze das Maximum durch das unterste rechte Element.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Absinken (in Richtung des grösseren Kindes).



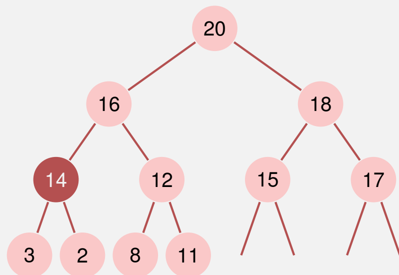
Maximum entfernen

- Ersetze das Maximum durch das unterste rechte Element.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Absinken (in Richtung des grösseren Kindes).



Maximum entfernen

- Ersetze das Maximum durch das unterste rechte Element.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Absinken (in Richtung des grösseren Kindes).
- Anzahl Operationen im schlechtesten Fall: $\mathcal{O}(\log n)$



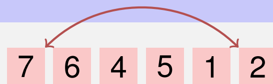
Algorithmus Versickern(A, i, m)

Input: Array A mit Heapstruktur für die Kinder von i. Letztes Element m.

Output: Array A mit Heapstruktur für i mit letztem Element m.

```
while 2i ≤ m do
    j ← 2i; // j linkes Kind
    if j < m and A[j] < A[j + 1] then
        j ← j + 1; // j rechtes Kind mit grösserem Schlüssel
    if A[i] < A[j] then
        swap(A[i], A[j])
        i ← j; // weiter versickern
    else
        i ← m; // versickern beendet
```

Heap Sortieren



$A[1,...,n]$ ist Heap.
Solange $n > 1$

- swap($A[1]$, $A[n]$)
- Versickere($A, 1, n-1$);
- $n \leftarrow n - 1$

Heap Sortieren

7	6	4	5	1	2

Tauschen $\Rightarrow$

2	6	4	5	1	7

$A[1, ..., n]$ ist Heap.
Solange $n > 1$

- swap($A[1]$, $A[n]$)
- Versickere($A, 1, n-1$);
- $n \leftarrow n - 1$

Heap Sortieren

	7	6	4	5	1	2
Tauschen $\Rightarrow$	2	6	4	5	1	7
Versickern $\Rightarrow$	6	5	4	2	1	7

$A[1, ..., n]$ ist Heap.
Solange $n > 1$

- swap($A[1]$, $A[n]$)
- Versickere($A, 1, n - 1$);
- $n \leftarrow n - 1$

Heap Sortieren

$A[1, ..., n]$ ist Heap.
Solange $n > 1$

- swap($A[1]$, $A[n]$)
- Versickere($A, 1, n-1$);
- $n \leftarrow n - 1$

		7	6	4	5	1	2
Tauschen	$\Rightarrow$	2	6	4	5	1	7
Versickern	$\Rightarrow$	6	5	4	2	1	7
Tauschen	$\Rightarrow$	1	5	4	2	6	7

Heap Sortieren

$A[1, ..., n]$ ist Heap.
Solange $n > 1$

- swap($A[1]$, $A[n]$)
- Versickere($A, 1, n-1$);
- $n \leftarrow n - 1$

		7	6	4	5	1	2
Tauschen	$\Rightarrow$	2	6	4	5	1	7
Versickern	$\Rightarrow$	6	5	4	2	1	7
Tauschen	$\Rightarrow$	1	5	4	2	6	7
Versickern	$\Rightarrow$	5	4	2	1	6	7
Tauschen	$\Rightarrow$	1	4	2	5	6	7
Versickern	$\Rightarrow$	4	1	2	5	6	7
Tauschen	$\Rightarrow$	2	1	4	5	6	7
Versickern	$\Rightarrow$	2	1	4	5	6	7
Tauschen	$\Rightarrow$	1	2	4	5	6	7

Heap erstellen

Beobachtung: Jedes Blatt eines Heaps ist für sich schon ein korrekter Heap.

Folgerung:

Heap erstellen

Beobachtung: Jedes Blatt eines Heaps ist für sich schon ein korrekter Heap.

Folgerung: Induktion von unten!

Algorithmus HeapSort(A, n)

Input: Array A der Länge n.
Output: A sortiert.

```
// Heap Bauen.
for i ← n/2 downto 1 do
    Versickere(A, i, n);
// Nun ist A ein Heap.
for i ← n downto 2 do
    swap(A[1], A[i])
    Versickere(A, 1, i − 1)
// Nun ist A sortiert.
```

Analyse: Sortieren eines Heaps

Versickere durchläuft maximal $\log n$ Knoten. An jedem Knoten 2 Schlüsselvergleiche. $\Rightarrow$ Heap Sortieren kostet im schlechtesten Fall $2n \log n$ Vergleiche.

Anzahl der Bewegungen vom Heap Sortieren auch $\mathcal{O}(n \log n)$.

[Analyse: Heap bauen]

Aufrufe an Versickern: $n/2$. Also Anzahl Vergleiche und Bewegungen $v(n) \in \mathcal{O}(n \log n)$.

---

[11] $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 ... \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + ...$

[Analyse: Heap bauen]

Aufrufe an Versickern: $n/2$. Also Anzahl Vergleiche und Bewegungen $v(n) \in \mathcal{O}(n \log n)$.

Versickerpfade sind aber im Mittel viel kürzer:

$$v(n) = \sum_{l=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \underbrace{2^l}_{\text{Anzahl Heaps auf Level l}} \cdot \underbrace{(\lfloor \log n \rfloor - l)}_{\text{Höhe Heaps auf Level l}} = \sum_{k=0}^{\lfloor \log n \rfloor} 2^{\lfloor \log n \rfloor - k} \cdot k$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{n}{2^k} \cdot k = n \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{k}{2^k} \in \mathcal{O}(\mathbf{n})$$

mit $s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (0 < x < 1)$ [11] und $s(\frac{1}{2}) = 2$

---

[11] $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 ... \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + ...$

11. AVL Bäume

Balancierte Bäume [Ottman/Widmayer, Kap. 5.2-5.2.1, Cormen et al, Kap. Problem 13-3]

Ziel

Suchen, Einfügen und Entfernen eines Schlüssels in Baum mit n Schlüsseln, welche in zufälliger Reihenfolge eingefügt wurden im Mittel in $\mathcal{O}(\log_2 n)$ Schritten.

Schlechtester Fall jedoch: $\Theta(n)$ (degenerierter Baum).

Ziel: Verhinderung der Degenerierung. Künstliches, bei jeder Update-Operation erfolgtes Balancieren eines Baumes

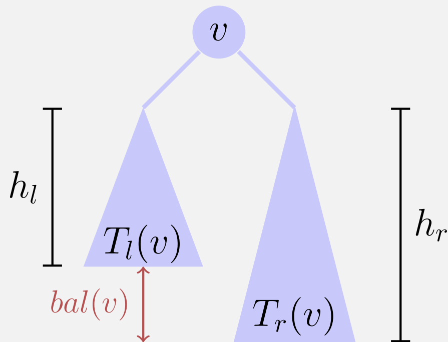
Balancierung: garantiere, dass ein Baum mit n Knoten stets eine Höhe von $\mathcal{O}(\log n)$ hat.

Adelson-Venskii und Landis (1962): AVL-Bäume

Balance eines Knotens

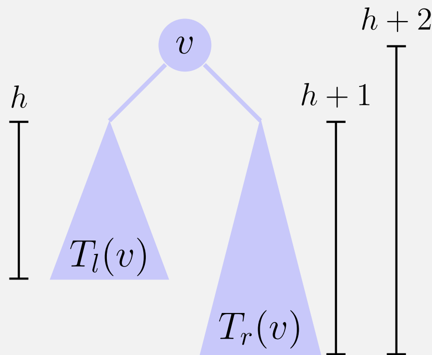
Die *Balance* eines Knotens v ist definiert als die Höhendifferenz seiner beiden Teilbäume $T_l(v)$ und $T_r(v)$

$$\mathrm{bal}(v) := h(T_r(v)) - h(T_l(v))$$

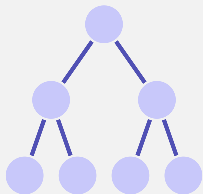


AVL Bedingung

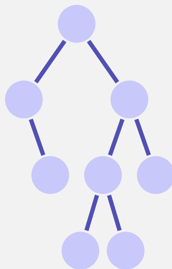
AVL Bedingung: für jeden Knoten v *eines Baumes gilt* $\mathrm{bal}(v) \in \{-1, 0, 1\}$



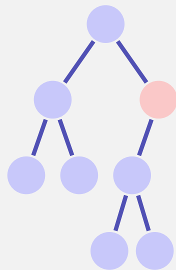
(Gegen-)Beispiele



AVL Baum der Höhe 2



AVL Baum der Höhe 3

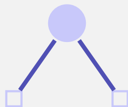


Kein AVL Baum

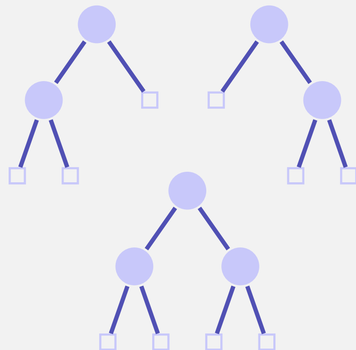
Anzahl Blätter

- 1. Beobachtung: Ein Suchbaum mit n Schlüsseln hat genau $n+1$ Blätter. Einfaches Induktionsargument.
  - Der Suchbaum mit $n=0$ Schlüsseln hat $m=1$ Blätter
  - Wird ein Schlüssel (Knoten) hinzugefügt ($n \to n+1$), so ersetzt er ein Blatt und fügt zwei Blätter hinzu ($m \to m-1+2=m+1$).
- 2. Beobachtung: untere Grenze für Anzahl Blätter eines Suchbaums zu gegebener Höhe erlaubt Abschätzung der maximalen Höhe eines Suchbaums zu gegebener Anzahl Schlüssel.

Untere Grenze Blätter



AVL Baum der Höhe 1 hat $N(1) := 2$ Blätter



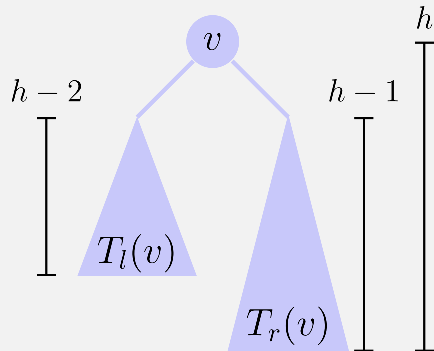
AVL Baum der Höhe 2 hat mindestens $N(2) := 3$ Blätter

Untere Grenze Blätter für $h > 2$

- Höhe eines Teilbaums $\geq h - 1$.
- Höhe des anderen Teilbaums $\geq h - 2$.

Minimale Anzahl Blätter $N(h)$ ist

$$N(h) = N(h-1) + N(h-2)$$



Insgesamt gilt $N(h) = F_{h+2}$ mit *Fibonacci-Zahlen* $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n > 1$.

Fibonacci Zahlen, geschlossene Form

Es gilt

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i)$$

mit den Wurzeln $\phi, \hat{\phi}$ der Gleichung vom goldenen Schnitt $x^2 - x - 1 = 0$:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

$$\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$$

[Fibonacci Zahlen, Induktiver Beweis]

$$F_i \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i) \qquad [*] \qquad \left(\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

1. Klar für $i = 0, i = 1$.
2. Sei $i > 2$ und Behauptung $[*]$ wahr für alle F_j, $j < i$.

$$F_i \overset{def}{=} F_{i-1} + F_{i-2} \overset{[*]}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{i-1} - \hat{\phi}^{i-1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{i-2} - \hat{\phi}^{i-2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{i-1} + \phi^{i-2}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{\phi}^{i-1} + \hat{\phi}^{i-2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{i-2}(\phi + 1) - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\phi}^{i-2}(\hat{\phi} + 1)$$

($\phi, \hat{\phi}$ erfüllen $x + 1 = x^2$)

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{i-2}(\phi^2) - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\phi}^{i-2}(\hat{\phi}^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i).$$

Baumhöhe

Da $|\hat{\phi}| < 1$, gilt insgesamt

$$N(h) \in \Theta\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^h\right) \subseteq \Omega(1.618^h)$$

und somit

$$\begin{aligned} N(h) &\geq c \cdot 1.618^h \\ \Rightarrow \quad h &\leq 1.44 \log_2 n + c'. \end{aligned}$$

Ein AVL Baum ist asymptotisch nicht mehr als 44% höher als ein perfekt balancierter Baum.[12]

[12] Ein perfekt balancierter Baum hat Höhe $\lceil \log_2 n + 1 \rceil$

Einfügen

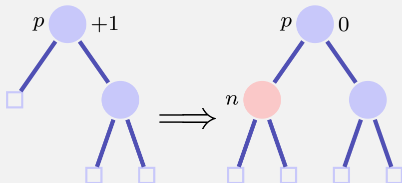
Balancieren

- Speichern der Balance für jeden Knoten
- Baum rebalancieren bei jeder Update-Operation

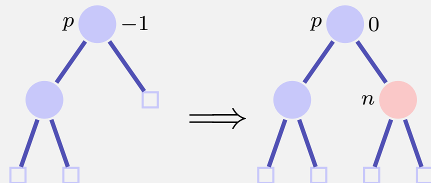
Neuer Knoten n wird eingefügt:

- Zuerst einfügen wie bei Suchbaum.
- Prüfe die Balance-Bedingung für alle Knoten aufsteigend von n zur Wurzel.

Balance am Einfügeort



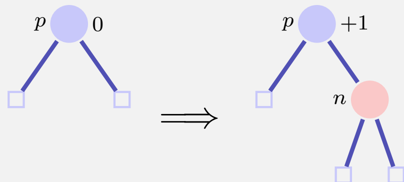
Fall 1: $\mathrm{bal}(p) = +1$



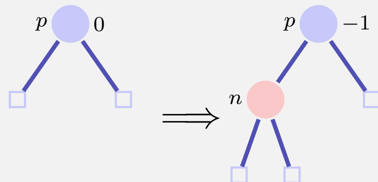
Fall 2: $\mathrm{bal}(p) = -1$

Fertig in beiden Fällen, denn der Teilbaum ist nicht gewachsen.

Balance am Einfügeort



Fall 3.1: $\mathrm{bal}(p) = 0$ rechts



Fall 3.2: $\mathrm{bal}(p) = 0$, links

In beiden Fällen noch nicht fertig. Aufruf von `upin(p)`.

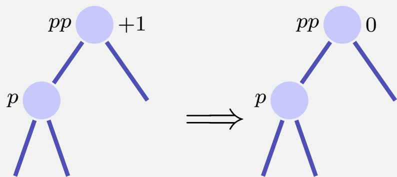
upin(p) - Invariante

Beim Aufruf von `upin(p)` gilt, dass

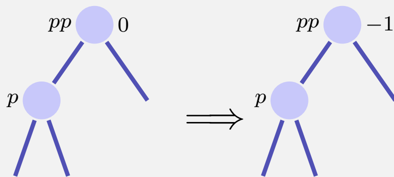
- der Teilbaum ab p gewachsen ist und
- $\mathrm{bal}(p) \in \{-1, +1\}$

upin(p)

Annahme: p ist linker Sohn von pp[13]



Fall 1: $\text{bal}(pp) = +1$, fertig.



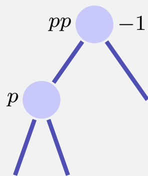
Fall 2: $\text{bal}(pp) = 0$, `upin(pp)`

In beiden Fällen gilt nach der Operation die AVL-Bedingung für den Teilbaum ab pp

[13] Ist p rechter Sohn: symmetrische Fälle unter Vertauschung von $+1$ und -1

upin(p)

Annahme: p ist linker Sohn von pp



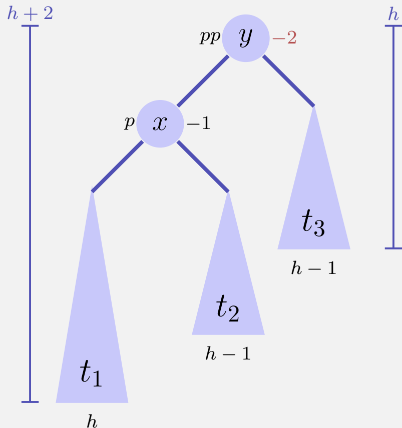
Fall 3: $\mathrm{bal}(pp) = -1$,

Dieser Fall ist problematisch: das Hinzufügen von n im Teilbaum ab pp hat die AVL-Bedingung verletzt. Rebalancieren!

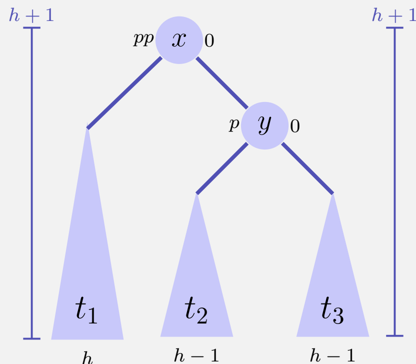
Zwei Fälle $\mathrm{bal}(p) = -1$, $\mathrm{bal}(p) = +1$

Rotationen

Fall 1.1 $\mathrm{bal}(p) = -1.$ [14]



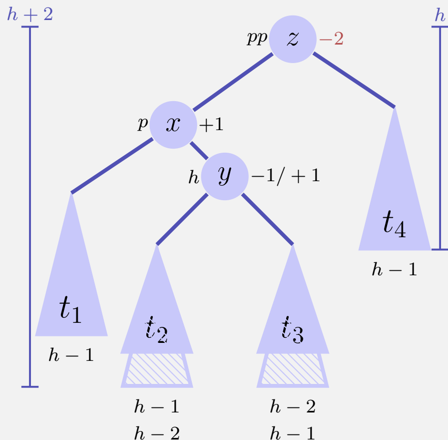
$\Longrightarrow$
Rotation nach rechts



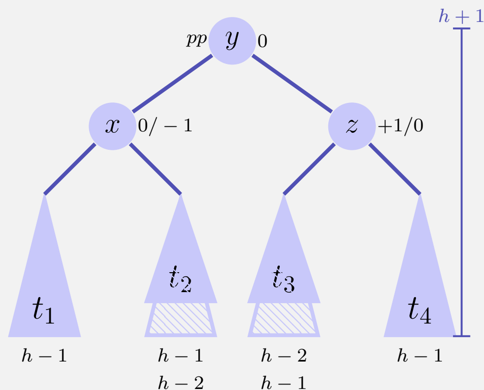
[14] p rechter Sohn $\Rightarrow \mathrm{bal}(pp) = \mathrm{bal}(p) = +1$, Linksrotation

Rotationen

Fall 1.2 $\mathrm{bal}(p) = +1$. [15]



$\Longrightarrow$ Doppel-rotation links-rechts



[15] p rechter Sohn $\Rightarrow \mathrm{bal}(pp) = +1$, $\mathrm{bal}(p) = -1$, Doppelrotation rechts links

Analyse

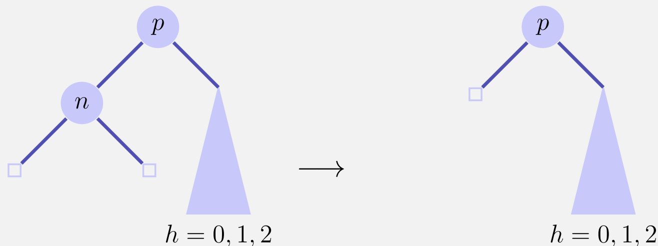
- Höhe des Baumes: $\mathcal{O}(\log n)$.
- Einfügen wie beim binären Suchbaum.
- Balancieren durch Rekursion vom Knoten zur Wurzel. Maximale Pfadlänge $\mathcal{O}(\log n)$.

Das Einfügen im AVL-Baum hat Laufzeitkosten von $\mathcal{O}(\log n)$.

Löschen

Fall 1: Knoten n hat zwei Blätter als Kinder Sei p Elternknoten von n.
$\Rightarrow$ Anderer Teilbaum hat Höhe $h' = 0$, 1 oder 2

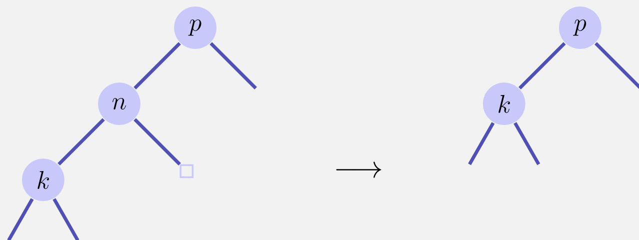
- $h' = 1$: $\text{bal}(p)$ anpassen.
- $h' = 0$: $\text{bal}(p)$ anpassen. Aufruf `upout(p)`.
- $h' = 2$: Rebalancieren des Teilbaumes. Aufruf `upout(p)`.



Löschen

Fall 2: Knoten n hat einen inneren Knoten k als Kind

- Ersetze n durch k. `upout(k)`



Löschen

Fall 3: Knoten n hat zwei inneren Knoten als Kinder

- Ersetze n durch symmetrischen Nachfolger. `upout(k)`
- Löschen des symmetrischen Nachfolgers wie in Fall 1 oder 2.

upout(p)

Sei pp der Elternknoten von p

(a) p linkes Kind von pp

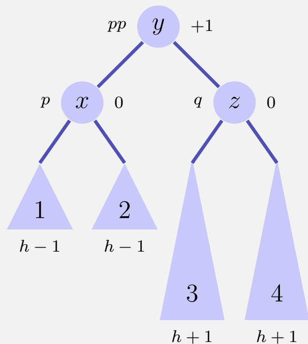
1. $\mathrm{bal}(pp) = -1 \;\Rightarrow\; \mathrm{bal}(pp) \leftarrow 0$. `upout(pp)`
2. $\mathrm{bal}(pp) = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{bal}(pp) \leftarrow +1$.
3. $\mathrm{bal}(pp) = +1 \Rightarrow$ nächste Folien.

(b) p rechtes Kind von pp: Symmetrische Fälle unter Vertauschung von $+1$ und -1.

upout(p)

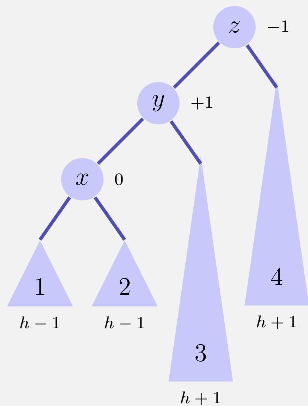
Fall (a).3: $\text{bal}(pp) = +1$. Sei q Bruder von p

(a).3.1: $\text{bal}(q) = 0$.[16]



$\Longrightarrow$

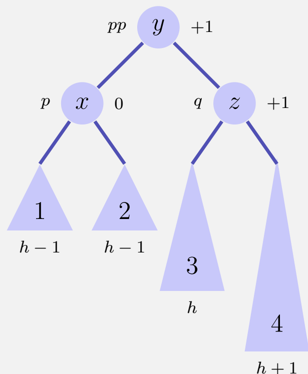
Linksrotation (y)

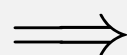


[16] (b).3.1: $\text{bal}(pp) = -1$, $\text{bal}(q) = -1$, Rechtsrotation.

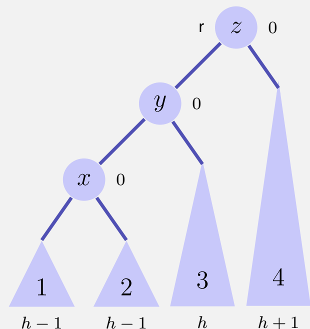
upout(p)

Fall (a).3: $\mathrm{bal}(pp) = +1$. (a).3.2: $\mathrm{bal}(q) = +1$.[17]





Linksrotation (y)

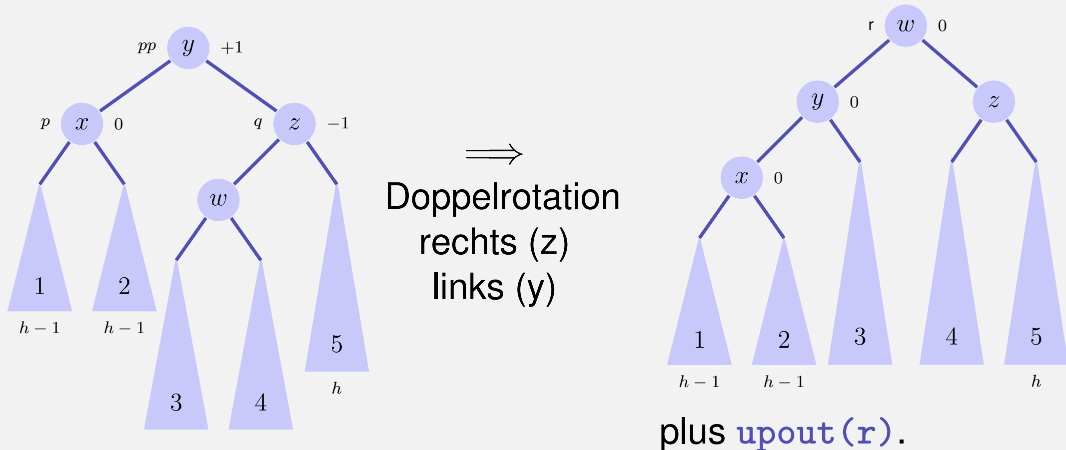


plus `upout(r)`.

[17] (b).3.2: $\mathrm{bal}(pp) = -1$, $\mathrm{bal}(q) = +1$, Rechtsrotation+upout

upout(p)

Fall (a).3: $\text{bal}(pp) = +1$. (a).3.3: $\text{bal}(q) = -1$.[18]



plus upout(r).

[18] (b).3.3: $\text{bal}(pp) = -1$, $\text{bal}(q) = -1$, Links-Rechts-Rotation + upout

Zusammenfassung

- AVL-Bäume haben asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(\log n)$ (schlechtester Fall) für das Suchen, Einfügen und Löschen von Schlüsseln
- Einfügen und Löschen ist verhältnismässig aufwändig und für kleine Probleme relativ langsam.