9. Hashing

Hashtabellen, Pre-Hashing, Hashing, Kollisionsauflösung durch Verketten, Einfaches gleichmässiges Hashing, Gebräuchliche Hashfunktionen, Tabellenvergrösserung, offene Addressierung: Sondieren [Ottman/Widmayer, Kap. 4.1-4.3.2, 4.3.4, Cormen et al, Kap. 11-11.4]

Motivierendes Beispiel

Ziel: Effiziente Verwaltung einer Tabelle aller n ETH-Studenten

Mögliche Anforderung: Schneller Zugriff (Einfügen, Löschen, Finden) von Datensätzen nach Name.

Wörterbuch (Dictionary)

Abstrakter Datentyp (ADT) D zur Verwaltung einer Menge von Einträgen[4] i mit Schlüsseln $k \in \mathcal{K}$. Operationen

- D.`insert`(i): Hinzufügen oder Überschreiben von i im Wörterbuch D.
- D.`delete`(i): Löschen von i aus dem Wörterbuch D. Nicht vorhanden $\Rightarrow$ Fehlermeldung.
- D.`search`(k): Liefert Eintrag mit Schlüssel k, wenn er existiert.

[4] Schlüssel-Wert Paare (k, v), im Folgenden betrachten wir hauptsächlich die Schlüssel.

Wörterbücher in Python

Wörterbuch ⟶
```
fruits = {
        "banana": 2.95, "kiwi": 0.70,
        "pear": 4.20, "apple": 3.95
}
```

Einfügen ⟶
```
fruits["melon"] = 3.95
```
Verändern ⟶
```
fruits["banana"] = 1.90
```
Suchen ⟶
```
print("banana", fruits["banana"])
print("melon in fruits", "melon" in
fruits)print("onion in fruits"
, "onion" in fruits)
```
Löschen ⟶
```
del fruits["strawberry"]
```
Iterieren ⟶
```
for name,price in fruits.items():
        print(name,"->",price)
```

Wörterbücher in Java

Wörterbuch →
```
Map<String,Double> fruits =
        new HashMap<String,Double>();
```

Einfügen →
```
fruits.put("banana", 2.95);
fruits.put("kiwi", 0.70);
fruits.put("strawberry", 9.95);
fruits.put("pear", 4.20);
fruits.put("apple", 3.95);
```

Verändern →
```
fruits.put("banana", 2.90);
```

Suchen →
```
Out.println("banana " + fruits.get("banana"));
```

Löschen →
```
fruits.remove("banana");
```

Iterieren →
```
for (String s: fruits.keySet())
        Out.println(s+" " + fruits.get(s));
```


Motivation / Verwendung

Wahrscheinlich *die* gängigste Datenstruktur

- Unterstützt in vielen Programmiersprachen (C++, Java, Python, Ruby, Javascript, C# ...)
- Offensichtliche Verwendung
  - Datenbanken / Tabellenkalkulation
  - Symboltabellen in Compilern und Interpretern
- Weniger offensichtlich
  - Substring Suche (Google, grep)
  - Ähnlichkeit von Texten (Dokumentenvergleich, DNA)
  - Dateisynchronisation
  - Kryptographie: Filetransfer / Identifikation

1. Idee: Direkter Zugriff (Array)

Index	Eintrag
0	-
1	-
2	-
3	[3,wert(3)]
4	-
5	-
⋮	⋮
k	[k,wert(k)]
⋮	⋮

Probleme

1. Schlüssel müssen nichtnegative ganze Zahlen sein
2. Grosser Schlüsselbereich ⇒ grosses Array

Lösung zum ersten Problem: Pre-hashing

Prehashing: Bilde Schlüssel ab auf positive Ganzzahlen mit einer Funktion $ph : \mathcal{K} \to \mathbb{N}$

- Theoretisch immer möglich, denn jeder Schlüssel ist als Bitsequenz im Computer gespeichert
- Theoretisch auch: $x = y \Leftrightarrow ph(x) = ph(y)$
- In der Praxis: APIs bieten Funktionen zum pre-hashing an. (Java: `object.hashCode()`, C++: `std::hash<>`, Python: `hash(object)`)
- APIs bilden einen Schlüssel aus der Schlüsselmenge ab auf eine Ganzzahl mit beschränkter Grösse.[5]

[5] Somit gilt die Implikation $ph(x) = ph(y) \Rightarrow x = y$ **nicht** mehr für alle x,y.

Prehashing Beispiel: String

Zuordnung Name $s = s_1 s_2 \dots s_{l_s}$ zu Schlüssel

$$ph(s) = \left(\sum_{i=1}^{l_s} s_{l_s - i + 1} \cdot b^i \right) \bmod 2^w$$

b so, dass verschiedene Namen möglichst verschiedene Schlüssel erhalten.

w Wortgrösse des Systems (z.B. 32 oder 64).

Beispiel (Java), mit $b = 31$, $w = 32$ Ascii-Werte s_i.

Anna $\mapsto 2045632$

Jacqueline $\mapsto 2042089953442505 \bmod 2^{32} = 507919049$

Implementation Prehashing (String) in Java

$$ph_{b,m}(s) = \left(\sum_{i=0}^{l-1} s_{l-i+1} \cdot b^i \right) \bmod m$$

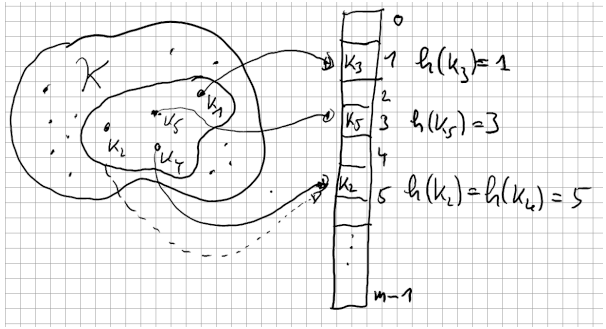
Mit $b = 31$ und $m = 2^{32}$ erhält man in Java[6]

```
int prehash(String s){
  int h = 0;
  for (int k = 0; k < s.length(); ++k){
    h = h * b + s.charAt(k);
  }
  return h;
}
```

[6] Machen Sie sich klar, warum das funktioniert

Lösung zum zweiten Problem: Hashing

Reduziere des Schlüsseluniversum: Abbildung (Hash-Funktion)
$h : \mathcal{K} \to \{0, ..., m-1\}$ ($m \approx n$ = Anzahl Einträge in der Tabelle)



Kollision: $h(k_i) = h(k_j)$.

Nomenklatur

Hashfunktion h: Abbildung aus der Menge der Schlüssel $\mathcal{K}$ auf die Indexmenge $\{0, 1, \dots, m-1\}$ eines Arrays (*Hashtabelle*).

$$h : \mathcal{K} \to \{0, 1, \dots, m-1\}.$$

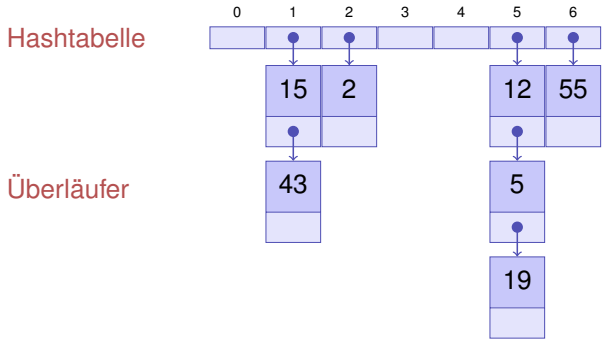
Meist $|\mathcal{K}| \gg m$. Es gibt also $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$ mit $h(k_1) = h(k_2)$ (*Kollision*).

Eine Hashfunktion sollte die Menge der Schlüssel möglichst gleichmässig auf die Positionen der Hashtabelle verteilen.

Behandlung von Kollisionen: Verkettung

Beispiel $m = 7$, $\mathcal{K} = \{0, \ldots, 500\}$, $h(k) = k \bmod m$.
Schlüssel 12 , 55 , 5 , 15 , 2 , 19 , 43

Direkte Verkettung der Überläufer



Algorithmen zum Hashing mit Verkettung

- `insert`(i) Prüfe ob Schlüssel k vom Eintrag i in Liste an Position $h(k)$. Falls nein, füge i am Ende der Liste ein; andernfalls ersetze das Element durch i.
- `find`(k) Prüfe ob Schlüssel k in Liste an Position $h(k)$. Falls ja, gib die Daten zum Schlüssel k zurück. Andernfalls Rückgabe eines leeren Elements `null`.
- `delete`(k) Durchsuche die Liste an Position $h(k)$ nach k. Wenn Suche erfolgreich, entferne das entsprechende Listenelement.

Worst-case Analyse

Schlechtester Fall: alle Schlüssel werden auf den gleichen Index abgebildet.

$\Rightarrow \Theta(n)$ pro Operation im schlechtesten Fall. ☹

Einfaches Gleichmässiges Hashing

Starke Annahmen: Jeder beliebige Schlüssel wird

- mit gleicher Wahrscheinlichkeit (Uniformität)
- und unabhängig von den anderen Schlüsseln (Unabhängigkeit)

auf einen der m verfügbaren Slots abgebildet.

Einfaches Gleichmässiges Hashing

Unter der Voraussetzung von einfachem gleichmässigen Hashing:
Erwartete Länge einer Kette, wenn n Elemente in eine Hashtabelle mit m Elementen eingefügt werden

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\text{Länge Kette j}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}(k_i = j)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(k_i = j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m} = \frac{n}{m}\end{aligned}$$

$\alpha = n/m$ heisst *Belegungsfaktor* oder *Füllgrad* der Hashtabelle.

Einfaches Gleichmässiges Hashing

Theorem

Sei eine Hashtabelle Verkettung gefüllt mit Füllgrad $\alpha = \frac{n}{m} < 1$. Unter der Annahme vom einfachen gleichmässigen Hashing hat die nächste Operation erwartete Laufzeitkosten von $\leq 1 + \alpha$.

Folgerung: ist die Anzahl der Slots m der Hashtabelle immer mindestens proportional zur Anzahl Elemente n in der Hashtabelle, $n \in \mathcal{O}(m) \Rightarrow$ Erwartete Laufzeit der Operationen Suchen, Einfügen und Löschen ist $\mathcal{O}(1)$.

Vor und Nachteile der Verkettung

Vorteile der Strategie:

- Belegungsfaktoren $\alpha > 1$ möglich
- Entfernen von Schlüsseln einfach

Nachteile

- Speicherverbrauch der Verkettung

Ein Beispiel einer gebräuchlichen Hashfunktion

Divisionsmethode

$$h(k) = k \bmod m$$

Ideal: m Primzahl, nicht zu nahe bei Potenzen von 2 oder 10

Aber oft: $m = 2^k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

Andere Methode: Multiplikationsmethode (siehe Cormen et al, Kap. 11.3).

Tabellenvergrösserung

- Wissen nicht a priori, wie gross n sein wird.
- Benötigen $m = \Theta(n)$ zu jeder Zeit.

Grösse der Tabelle muss angepasst werden. Hash-Funktion ändert sich $\Rightarrow$ *Rehashing*

- Alloziere Array A' mit Grösse $m' > m$
- Füge jeden Eintrag von A erneut in A' ein (mit erneutem Hashing)
- Setze $A \leftarrow A'$.
- Kosten: $\mathcal{O}(n + m + m')$.

Wie wählt man m'?

Tabellenvergrösserung

- 1.Idee $n = m \Rightarrow m' \leftarrow m + 1$
  Bei jedem Einfügen vergrössern. Kosten
  $\Theta(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \Theta(n^2)$ ☹
- 2.Idee $n = m \Rightarrow m' \leftarrow 2m$ Vergrössern nur wenn $m = 2^i$:
  $\Theta(1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + n) = \Theta(n)$
  Einige Einfügeoperationen kosten lineare Zeit, aber im Durchschnitt kosten sie $\Theta(1)$ ☺

Jede Operation vom Hashing mit Verketten hat erwartet amortisierte Kosten $\Theta(1)$.

($\Rightarrow$ Amortisierte Analyse)

Amortisierte Analyse

Generelles Vorgehen bei dynamischen Arrays (z.B. Java: `ArrayList`, Python: `List`)

- Die Datenstruktur speichert neben dem Datenarray zwei Grössen: Grösse des Arrays (Kapazität m) und Anzahl verwendete Einträge (Grösse n).
- Grösse verdoppeln und Einträge kopieren, wenn die Liste voll ist $n = m \Rightarrow m \leftarrow 2n$. Kosten $\Theta(m)$.
- Laufzeitkosten bei $n = 2^k$ Einfügeoperationen:
  $\Theta(1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^k) = \Theta(2^{k+1} - 1) = \Theta(n)$.

Kosten pro Operation *gemittelt über alle Operationen* = *amortisierte Kosten* = $\Theta(1)$ pro Einfügeoperation.

Offene Addressierung[7]

Speichere die Überläufer direkt in der Hashtabelle mit einer *Sondierungsfunktion* $s : \mathcal{K} \times \{0, 1, \ldots, m-1\} \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$

Tabellenposition des Schlüssels entlang der *Sondierungsfolge*

$$S(k) := (s(k, 0), s(k, 1), \ldots, s(k, m-1)) \mod m$$

Sondierungsfolge muss für jedes $k \in \mathcal{K}$ eine Permutation sein von $\{0, 1, \ldots, m-1\}$

[7] Begriffsklärung: Dieses Verfahren nutzt *offene Addressierung* (Positionen in der Hashtabelle nicht fixiert), ist aber *ein geschlossenes Hashverfahren* (Einträge bleiben in der Hashtabelle)

Algorithmen zur offenen Addressierung

- `insert`(i) Suche Schlüssel k von i in der Tabelle gemäss Sondierungssequenz $S(k)$. Ist k nicht vorhanden, füge k an die erste freie Position in der Sondierungsfolge ein. Andernfalls Fehlermeldung.
- `find`(k) Durchlaufe Tabelleneinträge gemäss $S(k)$. Wird k gefunden, gib die zu k gehörenden Daten zurück. Andernfalls Rückgabe eines leeres Elements `null`.
- `delete`(k) Suche k in der Tabelle gemäss $S(k)$. Wenn k gefunden, ersetze k durch den speziellen Schlüssel `removed`.

Lineares Sondieren

$s(k, j) = h(k) + j \Rightarrow S(k) = (h(k), h(k) + 1, \ldots, h(k) + m - 1) \mod m$

Beispiel $m = 7$, $\mathcal{K} = \{0, \ldots, 500\}$, $h(k) = k \mod m$.
Schlüssel 12 , 55 , 5 , 15 , 2 , 19

0	1	2	3	4	5	6
5	15	2	19		12	55

Diskussion

Beispiel $\alpha = 0.95$

Erfolglose Suche betrachtet im Durchschnitt 200 Tabelleneinträge! (hier ohne Herleitung).

? Grund für die schlechte Performance?

! *Primäre Häufung:* Ähnliche Hashaddressen haben ähnliche Sondierungsfolgen $\Rightarrow$ lange zusammenhängende belegte Bereiche.

Quadratisches Sondieren

$s(k, j) = h(k) + \lceil j/2 \rceil^2 (-1)^{j+1}$
$S(k) = (h(k), h(k) + 1, h(k) - 1, h(k) + 4, h(k) - 4, \ldots) \mod m$

Beispiel $m = 7$, $\mathcal{K} = \{0, \ldots, 500\}$, $h(k) = k \mod m$.
Schlüssel 12 , 55 , 5 , 15 , 2 , 19

0	1	2	3	4	5	6
19	15	2		5	12	55

Diskussion

Beispiel $\alpha = 0.95$

Erfolglose Suche betrachtet im Durchschnitt 22 Tabelleneinträge (hier ohne Herleitung)

? Grund für die schlechte Performance?

! *Sekundäre Häufung:* Synonyme k und k' (mit $h(k) = h(k')$) durchlaufen dieselbe Sondierungsfolge.

Double Hashing

Zwei Hashfunktionen $h(k)$ und $h'(k)$. $s(k, j) = h(k) + j \cdot h'(k)$.
$S(k) = (h(k), h(k) + h'(k), h(k) + 2h'(k), \ldots, h(k) + (m-1)h'(k)) \mod m$

Beispiel:
$m = 7$, $\mathcal{K} = \{0, \ldots, 500\}$, $h(k) = k \bmod 7$, $h'(k) = 1 + k \bmod 5$.
Schlüssel 12 , 55 , 5 , 15 , 2 , 19

0	1	2	3	4	5	6
5	15	2	19		12	55

Double Hashing

- Sondierungsreihenfolge muss Permutation aller Hashadressen bilden. Also $h'(k) \neq 0$ und $h'(k)$ darf m nicht teilen, z.B. garantiert mit m prim.
- h' sollte möglichst unabhängig von h sein (Vermeidung sekundärer Häufung).

Unabhängigkeit weitgehend erfüllt von $h(k) = k \bmod m$ und $h'(k) = 1 + k \bmod (m-2)$ (m prim).

Gleichmässiges Hashing

Starke Annahme: Die Sondierungssequenz $S(k)$ eines Schlüssels k ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der $m!$ vielen Permutationssequenzen von $\{0, 1, \ldots, m-1\}$.

(Double Hashing kommt dem am ehesten nahe)

Analyse gleichmässiges Hashing mit offener Addressierung

Theorem

Sei eine Hashtabelle mit offener Addressierung gefüllt mit Füllgrad $\alpha = \frac{n}{m} < 1$*. Unter der Annahme vom gleichmässigen Hashing hat die nächste Operation erwartete Laufzeitkosten von* $\leq \frac{1}{1-\alpha}$*.*

Ohne Beweis, siehe z.B. Cormen et al, Kap. 11.4