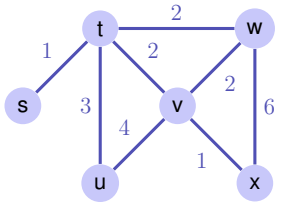
15. Minimale Spannbäume

Motivation, Greedy, Algorithmus von Kruskal, Allgemeine Regeln, Union-Find Struktur, Algorithmus von Jarnik, Prim, Dijkstra, [Ottman/Widmayer, Kap. 9.6, 6.2, 6.1, Cormen et al, Kap. 23, 19]

Problem

Gegeben: Ungerichteter, zusammenhängender, gewichteter Graph $G = (V, E, c)$.

Gesucht: Minimaler Spannbaum $T = (V, E')$: zusammenhängender, zyklenfreier Teilgraph $E' \subset E$, so dass $\sum_{e \in E'} c(e)$ minimal.



Beispiele von Anwendungen

- Netzwerk-Design: finde das billigste / kürzeste Netz oder Leitungssystem, welches alle Knoten miteinander verbindet.
- Approximation einer Lösung des Travelling-Salesman Problems: finde einen möglichst kurzen Rundweg, welcher jeden Knoten einmal besucht. [25]

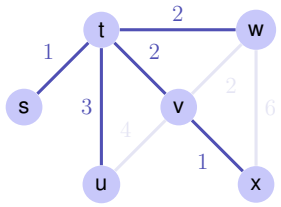
[25] Der beste bekannte Algorithmus zur exakten Lösung des TS Problems hat exponentielle Laufzeit

Greedy Verfahren

- Gierige Verfahren berechnen eine Lösung schrittweise, indem lokal beste Lösungen gewählt werden.
- Die meisten Probleme sind nicht mit einer greedy Strategie lösbar.
- Das Problem des Minimalen Spannbaumes kann mit einem gierigen Verfahren effizient gelöst werden.

Greedy Idee (Kruskal, 1956)

Konstruiere T indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

Algorithmus MST-Kruskal(G)

Input: Gewichteter Graph $G = (V, E, c)$
Output: Minimaler Spannbaum mit Kanten A.

Sortiere Kanten nach Gewicht $c(e_1) \leq ... \leq c(e_m)$
$A \leftarrow \emptyset$
for $k = 1$ **to** $|E|$ **do**
  if $(V, A \cup \{e_k\})$ kreisfrei **then**
    $A \leftarrow A \cup \{e_k\}$
return (V, A, c)

[Korrektheit]

Zu jedem Zeitpunkt ist (V, A) ein Wald, eine Menge von Bäumen.

MST-Kruskal betrachtet jede Kante e_k einmal und wählt e_k oder verwirft e_k

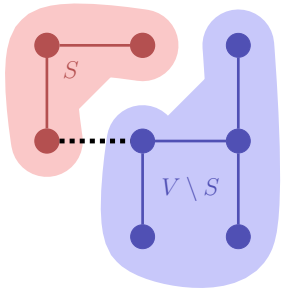
Notation (Momentaufnahme im Algorithmus)

- A: Menge gewählte Kanten
- R: Menge verworfener Kanten
- U: Menge der noch unentschiedenen Kanten

[Schnitt]

Ein Schnitt von G ist eine Partition $S, V \setminus S$ von V. ($S \subseteq V$).

Eine Kante kreuzt einen Schnitt, wenn einer Ihrer Endpunkte in S und der andere in $V \setminus S$ liegt.



[Regeln]

1. Auswahlregel: Wähle einen Schnitt, den keine gewählte Kante kreuzt. Unter allen unentschiedenen Kanten, welche den Schnitt kreuzen, wähle die mit minimalem Gewicht.
2. Verwerfregel: Wähle einen Kreis ohne verworfene Kanten. Unter allen unentschiedenen Kanten im Kreis verwerfe die mit maximalem Gewicht.

[Regeln]

Kruskal wendet beide Regeln an:

1. Ein gewähltes e_k verbindet zwei Zusammenhangskomponenten, sonst würde ein Kreis erzeugt werden. e_k ist beim Verbinden minimal, man kann also einen Schnitt wählen, den e_k mit minimalem Gewicht kreuzt.
2. Ein verworfenes e_k ist Teil eines Kreises. Innerhalb des Kreises hat e_k maximales Gewicht.

[Korrektheit]

Theorem

Jeder Algorithmus, welcher schrittweise obige Regeln anwendet bis $U = \emptyset$ ist korrekt.

Folgerung: MST-Kruskal ist korrekt.

[Auswahlinvariante]

Invariante: Es gibt stets einen minimalen Spannbaum, der alle gewählten und keine der verworfenen Kanten enthält.

Wenn die beiden Regeln die Invariante erhalten, dann ist der Algorithmus sicher korrekt. Induktion:

- Zu Beginn: $U = E$, $R = A = \emptyset$. Invariante gilt offensichtlich.
- Invariante bleibt nach jedem Schritt des Algorithmus erhalten.
- Am Ende: $U = \emptyset$, $R \cup A = E \Rightarrow (V, A)$ ist Spannbaum.

Beweis des Theorems: zeigen nun, dass die beiden Regeln die Invariante erhalten.

[Auswahlregel erhält Invariante]

Es gibt stets einen minimalen Spannbaum T, der alle gewählten und keine der verworfenen Kanten enthält.

Wähle einen Schnitt, den keine gewählte Kante kreuzt. Unter allen unentschiedenen Kanten, welche den Schnitt kreuzen, wähle eine Kante e mit minimalem Gewicht.

- Fall 1: $e \in T$ (fertig)
- Fall 2: $e \notin T$. Dann hat $T \cup \{e\}$ einen Kreis, der e enthält. Kreis muss einen zweite Kante e' enthalten, welche den Schnitt auch kreuzt.[26] Da $e' \notin R$ ist $e' \in U$. Somit $c(e) \leq c(e')$ und $T' = T \setminus \{e'\} \cup \{e\}$ ist auch minimaler Spannbaum (und $c(e) = c(e')$).

[26] Ein solcher Kreis enthält mindestens einen Knoten in S und einen in $V \setminus S$ und damit mindestens zwei Kanten zwischen S und $V \setminus S$.

[Verwerfregel erhält Invariante]

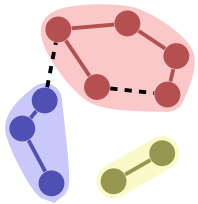
Es gibt stets einen minimalen Spannbaum T, der alle gewählten und keine der verworfenen Kanten enthält.

Wähle einen Kreis ohne verworfene Kanten. Unter allen unentschiedenen Kanten im Kreis verwerfe die Kante e mit maximalem Gewicht.

- Fall 1: $e \notin T$ (fertig)
- Fall 2: $e \in T$. Entferne e von T, Das ergibt einen Schnitt. Diesen Schnitt muss eine weitere Kante e' aus dem Kreis kreuzen. Da $c(e') \leq c(e)$ ist $T' = T \setminus \{e\} \cup \{e'\}$ auch minimal (und $c(e) = c(e')$).

Zur Implementation

Gegeben eine Menge von Mengen $i \equiv A_i \subset V$. Zur Identifikation von Schnitten und Kreisen: Zugehörigkeit der beiden Endpunkte einer Kante zu einer der Mengen.



Zur Implementation

Allgemeines Problem: Partition (Menge von Teilmengen) z.B. $\{\{1,2,3,9\},\{7,6,4\},\{5,8\},\{10\}\}$

Benötigt: Abstrakter Datentyp „Union-Find“ mit folgenden Operationen

- Make-Set(i): Hinzufügen einer neuen Menge i.
- Find(e): Name i der Menge, welche e enthält.
- Union(i,j): Vereingung der Mengen mit Namen i und j.

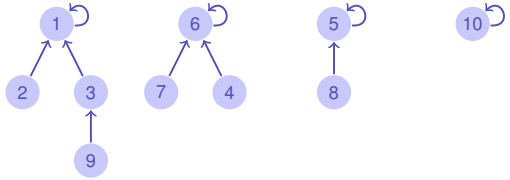
Union-Find Algorithmus MST-Kruskal(G)

Input: Gewichteter Graph $G = (V, E, c)$
Output: Minimaler Spannbaum mit Kanten A.

Sortiere Kanten nach Gewicht $c(e_1) \leq ... \leq c(e_m)$
$A \leftarrow \emptyset$
for $k = 1$ **to** $|V|$ **do**
  MakeSet(k)
for $k = 1$ **to** m **do**
  $(u, v) \leftarrow e_k$
  if Find(u) $\neq$ Find(v) **then**
    Union(Find(u), Find(v))
    $A \leftarrow A \cup e_k$
  else // konzeptuell: $R \leftarrow R \cup e_k$
return (V, A, c)

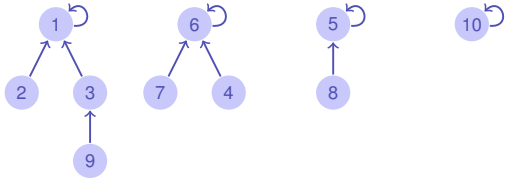
Implementation Union-Find

Idee: Baum für jede Teilmenge in der Partition, z.B.
$\{\{1, 2, 3, 9\}, \{7, 6, 4\}, \{5, 8\}, \{10\}\}$



Baumwurzeln = Namen (Stellvertreter) der Mengen,
Bäume = Elemente der Mengen

Implementation Union-Find



Repräsentation als Array:

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parent	1	1	1	6	5	6	5	5	3	10

Implementation Union-Find

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parent	1	1	1	6	5	6	5	5	3	10

Make-Set(i)	$p[i] \leftarrow i$; **return** i
Find(i)	**while** $(p[i] \neq i)$ **do** $i \leftarrow p[i]$ **return** i
Union(i, j) [27]	$p[j] \leftarrow i$;

[27] i und j müssen Namen (Wurzeln) der Mengen sein. Andernfalls verwende Union(Find(i),Find(j))

Optimierung der Laufzeit für Find

Baum kann entarten: Beispiel Union$(8,7)$, Union$(7,6)$, Union$(6,5)$, ...

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	..
Parent	1	1	2	3	4	5	6	7	..

Laufzeit von Find im schlechtesten Fall in $\Theta(n)$.

Optimierung der Laufzeit für Find

Idee: Immer kleineren Baum unter grösseren Baum hängen.
Benötigt zusätzliche Grösseninformation (Array) g

Make-Set(i)	$p[i] \leftarrow i$; $g[i] \leftarrow 1$; **return** i
Union(i,j)	**if** $g[j] > g[i]$ **then** swap(i,j) $p[j] \leftarrow i$ **if** $g[i] = g[j]$ **then** $g[i] \leftarrow g[i]+1$

$\Rightarrow$ Baumtiefe (und schlechteste Laufzeit für Find) in $\Theta(\log n)$

[Beobachtung]

Theorem

Obiges Verfahren Vereinigung nach Grösse konserviert die folgende Eigenschaft der Bäume: ein Baum mit Höhe h hat mindestens 2^h Knoten.

Unmittelbare Folgerung: Laufzeit Find = $\mathcal{O}(\log n)$.

[Beweis]

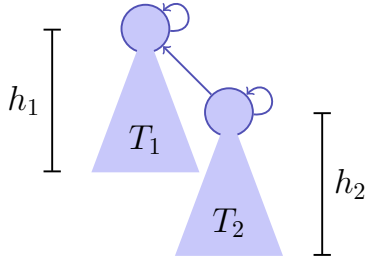
Induktion: nach Vorraussetzung haben Teilbäume jeweils mindestens 2^{h_i} Knoten. ObdA: $h_2 \leq h_1$.

- $h_2 < h_1$:

$$h(T_1 \oplus T_2) = h_1 \Rightarrow g(T_1 \oplus T_2) \geq 2^h$$

- $h_2 = h_1$:

$$g(T_1) \geq g(T_2) \geq 2^{h_2}$$
$$\Rightarrow g(T_1 \oplus T_2) = g(T_1) + g(T_2) \geq 2 \cdot 2^{h_2} = 2^{h(T_1 \oplus T_2)}$$



Weitere Verbesserung

Bei jedem Find alle Knoten direkt an den Wurzelknoten hängen.

Find(i):

$j \leftarrow i$
while $(p[i] \neq i)$ **do** $i \leftarrow p[i]$
while $(j \neq i)$ **do**
  $t \leftarrow j$
  $j \leftarrow p[j]$
  $p[t] \leftarrow i$
return i

Laufzeit: amortisiert *fast* konstant (Inverse der Ackermannfunktion).[28]

[28] Wird hier nicht vertieft.

Laufzeit des Kruskal Algorithmus

- Sortieren der Kanten: $\Theta(|E| \log |E|) = \Theta(|E| \log |V|)$. [29]
- Initialisieren der Union-Find Datenstruktur $\Theta(|V|)$
- $|E|\times$ Union(Find(x),Find(y)): $\mathcal{O}(|E| \log |E|) = \mathcal{O}(|E| \log |V|)$.

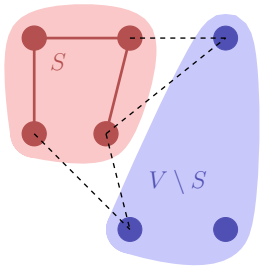
Insgesamt $\Theta(|E| \log |V|)$.

[29] da G zusammenhängend: $|V| \leq |E| \leq |V|^2$

Algorithmus von Jarnik (1930), Prim, Dijkstra (1959)

Idee: Starte mit einem $v \in V$ und lasse von dort unter Verwendung der Auswahlregel einen Spannbaum wachsen:

$A \leftarrow \emptyset$
$S \leftarrow \{v_0\}$
for $i \leftarrow 1$ **to** $|V|$ **do**
  Wähle billigste (u, v) mit $u \in S$, $v \notin S$
  $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
  $S \leftarrow S \cup \{v\}$ // (Färbung)



Anmerkung: man benötigt keine Union-Find Datenstruktur. Es genügt, Knoten zu färben, sobald sie zu S hinzugenommen werden.

Laufzeit

Trivial $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.

Verbesserung (wie bei Dijkstras Kürzeste Pfade):

- Mit Min-Heap, Kosten:
  - Initialisierung (Knotenfärbung) $\mathcal{O}(|V|)$
  - $|V|\times$ ExtractMin = $\mathcal{O}(|V| \log |V|)$,
  - $|E|\times$ Insert oder DecreaseKey: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$,

$\mathcal{O}(|E| \cdot \log |V|)$