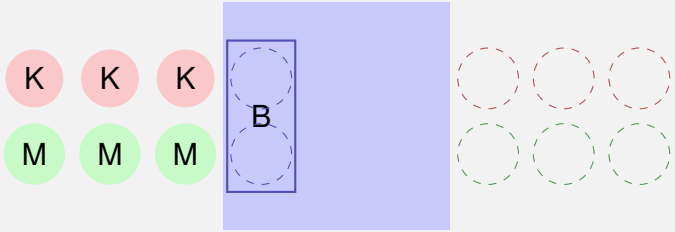
14. Kürzeste Wege

Motivation, Dijkstras Algorithmus auf Distanzgraphen, Algorithmus von Bellman-Ford

[Ottman/Widmayer, Kap. 9.5.1-9.5.2 Cormen et al, Kap. 24.1-24.3]

Flussüberquerung (Missionare und Kannibalen)

Problem: Drei Kannibalen und drei Missionare stehen an einem Ufer eines Flusses. Ein dort bereitstehendes Boot fasst maximal zwei Personen. Zu keiner Zeit dürfen an einem Ort (Ufer oder Boot) mehr Kannibalen als Missionare sein. Wie kommen die Missionare und Kannibalen möglichst schnell über den Fluss? [23]



[23] Es gibt leichte Variationen dieses Problems, es ist auch äquivalent zum Problem der eifersüchtigen Ehemänner

Formulierung als Graph

Zähle alle erlaubten Konfigurationen als Knoten auf und verbinde diese mit einer Kante, wenn Überfahrt möglich ist. Das Problem ist dann ein Problem des kürzesten Pfades

Beispiel

	links	rechts
Missionare	3	0
Kannibalen	3	0
Boot	x	

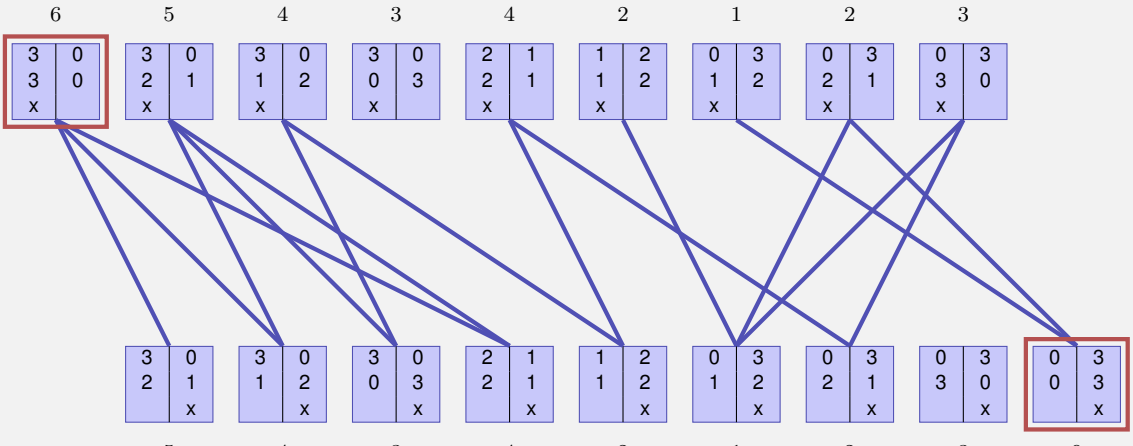
6 Personen am linken Ufer

Überfahrt möglich

	links	rechts
Missionare	2	1
Kannibalen	2	1
Boot		x

4 Personen am linken Ufer

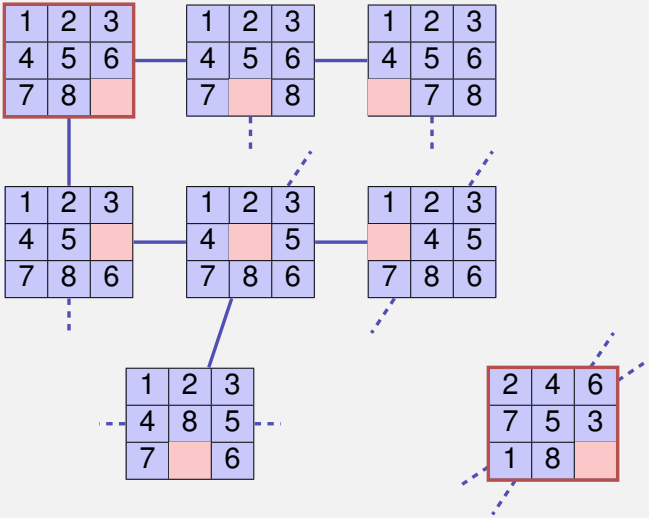
Das ganze Problem als Graph



Anderes Beispiel: Schiebepuzzle

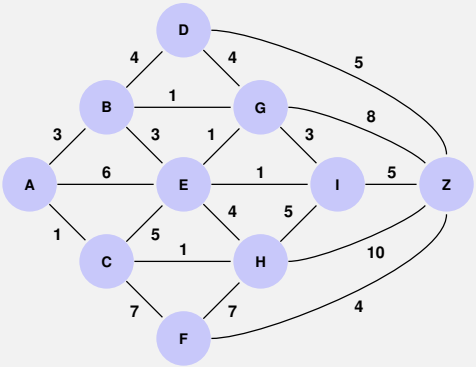
Wollen die schnelleste Lösung finden für

Problem als Graph



Routenfinder

Gegeben Städte A - Z und Distanzen zwischen den Städten.

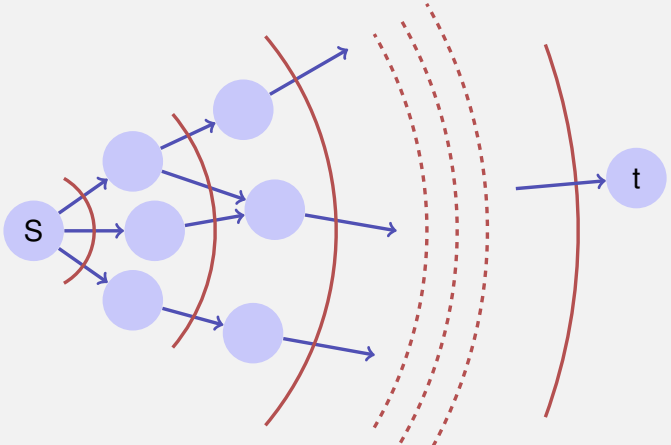


Was ist der kürzeste Weg von A nach Z?

Einfachster Fall

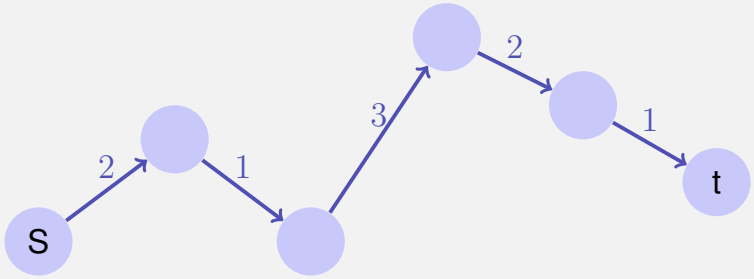
Konstantes Kantengewicht 1 (oBdA)

Lösung: Breitensuche



Gewichtete Graphen

Gegeben: $G = (V, E, c)$, $c : E \to \mathbb{R}$, $s, t \in V$.
Gesucht: Länge (Gewicht) eines kürzesten Weges von s nach t.
Weg: $p = \langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t \rangle$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$ $(0 \leq i < k)$
Gewicht: $c(p) := \sum_{i=0}^{k-1} c((v_i, v_{i+1}))$.



Weg mit Gewicht 9

Kürzeste Wege

Notation: Wir schreiben

$$u \overset{p}{\rightsquigarrow} v \qquad \text{oder} \qquad p : u \rightsquigarrow v$$

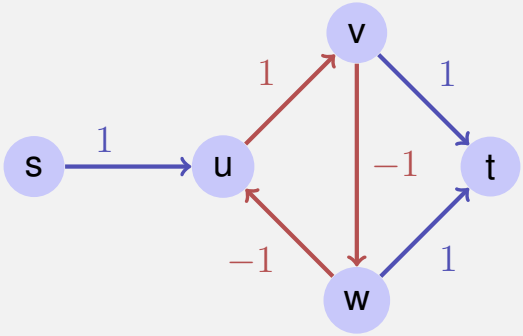
und meinen einen Weg p von u nach v

Notation: $\delta(u, v)$ = Gewicht eines kürzesten Weges von u nach v:

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \infty & \text{kein Weg von } u \text{ nach } v \\ \min\{c(p) : u \overset{p}{\rightsquigarrow} v\} & \text{sonst} \end{cases}$$

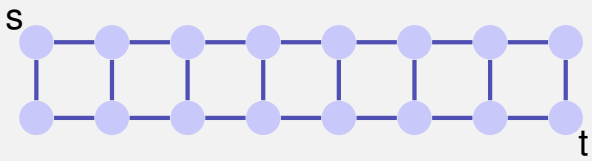
Beobachtungen (1)

Es gibt Situationen, in denen kein kürzester Weg existiert: negative Zyklen könnten auftreten.



Beobachtungen (2)

Es kann exponentiell viele Wege geben.



(mindestens $2^{|V|/2}$ Wege von s nach t)

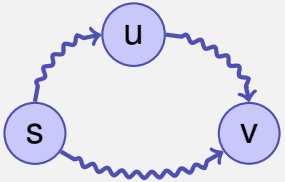
$\Rightarrow$ Alle Wege probieren ist zu ineffizient.

Beobachtungen (3)

Dreiecksungleichung

Für alle $s, u, v \in V$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + \delta(u, v)$$

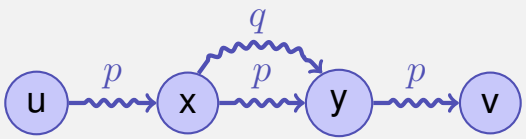


Ein kürzester Weg von s nach v (ohne weitere Einschränkungen) kann nicht länger sein als ein kürzester Weg von s nach v, der u enthalten muss.

Beobachtungen (4)

Optimale Substruktur

Teilpfade von kürzesten Pfaden sind kürzeste Pfade: Sei $p = \langle v_0, \ldots, v_k \rangle$ ein kürzester Pfad von v_0 nach v_k. Dann ist jeder der Teilpfade $p_{ij} = \langle v_i, \ldots, v_j \rangle$ $(0 \leq i < j \leq k)$ ein kürzester Pfad von v_i nach v_j.



Wäre das nicht so, könnte man einen der Teilpfade kürzen, Widerspruch zur Voraussetzung.

Beobachtungen (5)

Kürzeste Wege enthalten keine Zyklen

1. Kürzester Weg enthält negativen Zyklus: es exisitiert kein kürzester Weg. Widerspruch.
2. Weg enthält positiven Zyklus: Weglassen des positiven Zyklus kann den Weg verkürzen: Widerspruch
3. Weg enthält Zyklus vom Gewicht 0: Weglassen des Zyklus verändert das Pfadgewicht nicht. Weglassen (Konvention).

Zutaten für einen Algorithmus

Gesucht: Kürzeste Wege von einem Startknoten s aus.

- Gewicht des kürzesten bisher gefundenen Pfades

$$d_s : V \to \mathbb{R}$$

Zu Beginn: $d_s[v] = \infty$ für alle Knoten $v \in V$.
Ziel: $d_s[v] = \delta(s, v)$ für alle $v \in V$.

- Vorgänger eines Knotens

$$\pi_s : V \to V$$

Zu Beginn $\pi_s[v]$ undefiniert für jeden Knoten $v \in V$

Allgemeiner Algorithmus

1. Initialisiere d_s und π_s: $d_s[v] = \infty$, $\pi_s[v] =$ null für alle $v \in V$
2. Setze $d_s[s] \leftarrow 0$
3. Wähle eine Kante $(u, v) \in E$

   Relaxiere (u, v):
   if $d_s[v] > d[u] + c(u, v)$ then
   $d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u, v)$
   $\pi_s[v] \leftarrow u$
4. Wiederhole 3 bis nichts mehr relaxiert werden kann.
   (bis $d_s[v] \leq d_s[u] + c(u, v) \quad \forall (u, v) \in E$)

Relaxieren ist sicher

Zu jeder Zeit gilt in obigem Algorithmus

$$d_s[v] \geq \delta(s, v) \quad \forall v \in V$$

Relaxieren ist sicher

Zu jeder Zeit gilt in obigem Algorithmus

$$d_s[v] \geq \delta(s,v) \quad \forall v \in V$$

Im Relaxierschritt:

$$\begin{aligned} & \delta(s,v) \leq \delta(s,u) + \delta(u,v) && \text{[Dreiecksungleichung].} \\ & \delta(s,u) \leq d_s[u] && \text{[Induktionsvorraussetzung].} \\ & \delta(u,v) \leq c(u,v) && \text{[Minimalität von } \delta\text{]} \\ \Rightarrow \quad & d_s[u] + c(u,v) \geq \delta(s,v) \end{aligned}$$

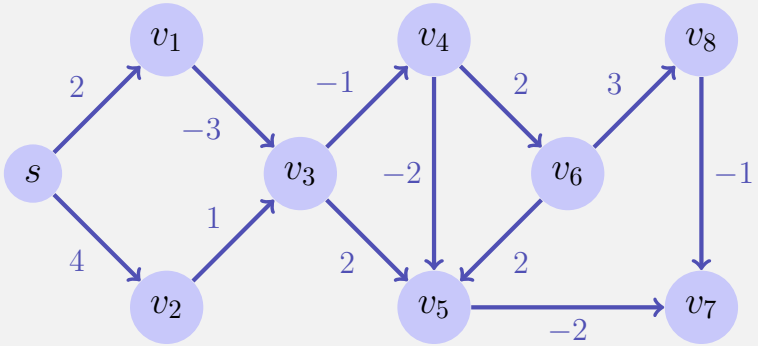
$$\Rightarrow \min\{d_s[v], d_s[u] + c(u,v)\} \geq \delta(s,v)$$

Zentrale Frage

Wie / in welcher Reihenfolge wählt man die Kanten in obigem Algorithmus?

Spezialfalfall: Gerichteter Azyklischer Graph (DAG)

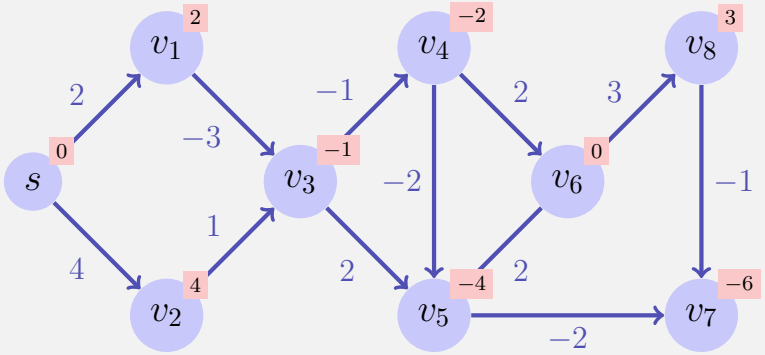
DAG $\Rightarrow$ Topologische Sortierung liefert optimale Besuchsreihenfolge



Top. Sortieren: $\Rightarrow$ Reihenfolge $s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_5, v_8, v_7$.

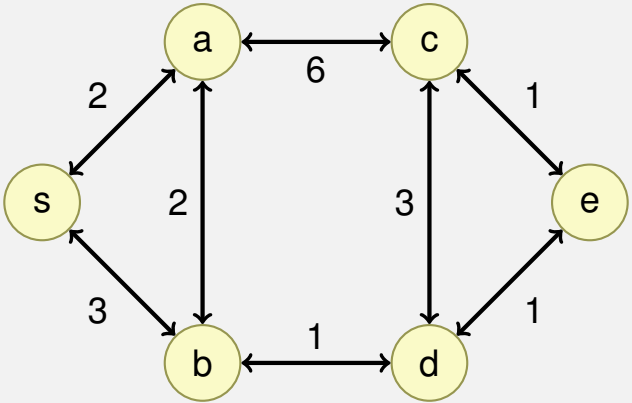
Spezialfalfall: Gerichteter Azyklischer Graph (DAG)

DAG $\Rightarrow$ Topologische Sortierung liefert optimale Besuchsreihenfolge



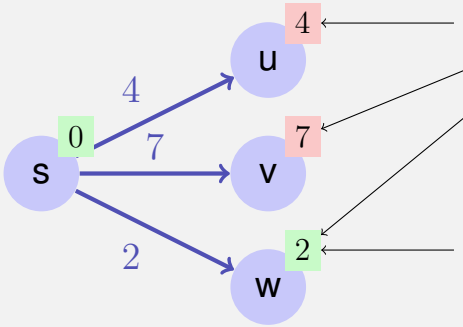
Top. Sortieren: $\Rightarrow$ Reihenfolge $s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_5, v_8, v_7$.

Annahme (vorübergehend)



Alle Gewichte von G sind *positiv*.

Beobachtung (Dijkstra)



obere Schranken

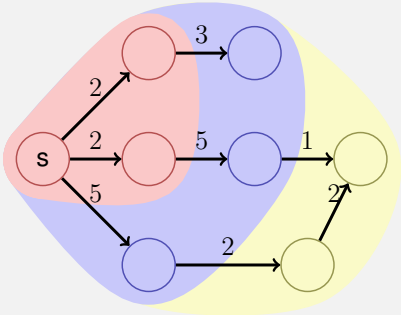
t

kleinste obere Schranke
globales Minimum!
Kann nicht weiter relaxiert werden

Grundidee

Menge V aller Knoten wird unterteilt in

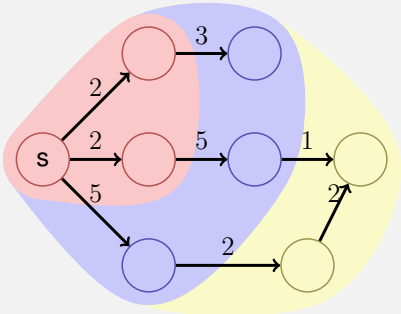
- die Menge M von Knoten, für die schon ein kürzester Weg von s bekannt ist
- die Menge $R = \bigcup_{v \in M} N^+(v) \setminus M$ von Knoten, für die kein kürzester Weg bekannt ist, die jedoch von M direkt erreichbar sind.
- die Menge $U = V \setminus (M \cup R)$ von Knoten, die noch nicht berücksichtigt wurden.



Induktion

Induktion über $|M|$: Wähle Knoten aus R mit kleinster oberer Schranke. Nimm r zu M hinzu, und update R und U.

Korrektheit: Ist innerhalb einer “Wellenfront” einmal ein Knoten mit minimalem Pfadgewicht w gefunden, kann kein Pfad über später gefundene Knoten (mit Gewicht $\geq w$) zu einer Verbesserung führen.

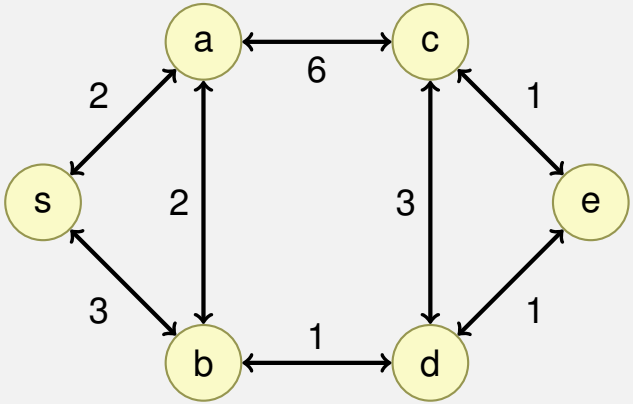


Algorithmus Dijkstra(G, s)

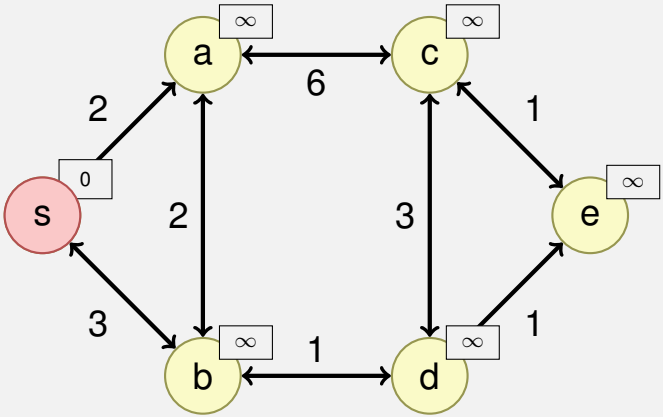
Input: Positiv gewichteter Graph $G = (V, E, c)$, Startpunkt $s \in V$
Output: Minimale Gewichte d der kürzesten Pfade und Vorgängerknoten für jeden Knoten.

foreach $u \in V$ **do**
    $d_s[u] \leftarrow \infty$; $\pi_s[u] \leftarrow$ null
$d_s[s] \leftarrow 0$; $R \leftarrow \{s\}$
while $R \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow$ ExtractMin(R)
    foreach $v \in N^+(u)$ **do**
        if $d_s[u] + c(u, v) < d_s[v]$ **then**
            $d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u, v)$
            $\pi_s[v] \leftarrow u$
            $R \leftarrow R \cup \{v\}$

Beispiel



Beispiel

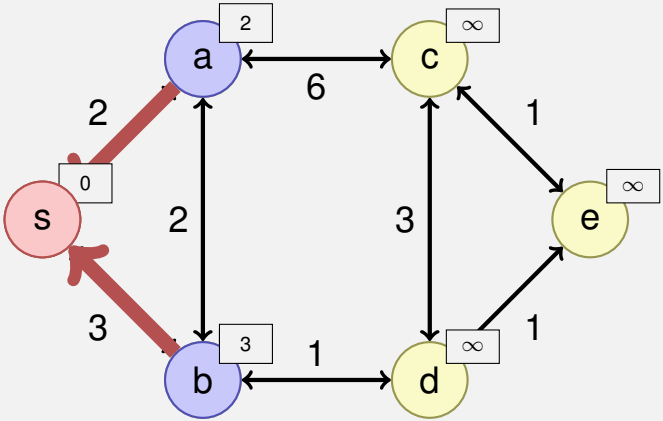


$$M = \{s\}$$

$$R = \{\}$$

$$U = \{a, b, c, d, e\}$$

Beispiel

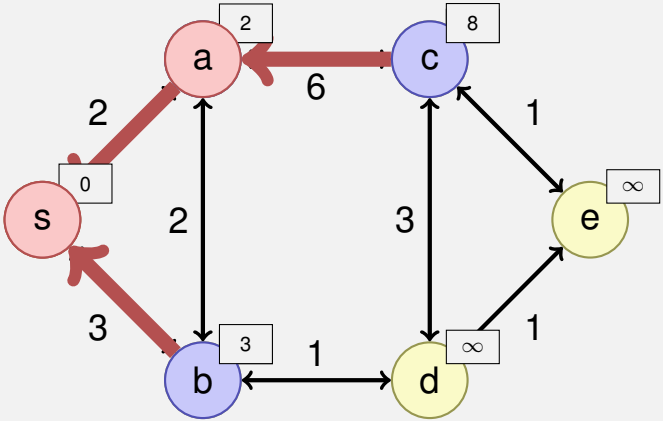


$$M = \{s\}$$

$$R = \{a, b\}$$

$$U = \{c, d, e\}$$

Beispiel

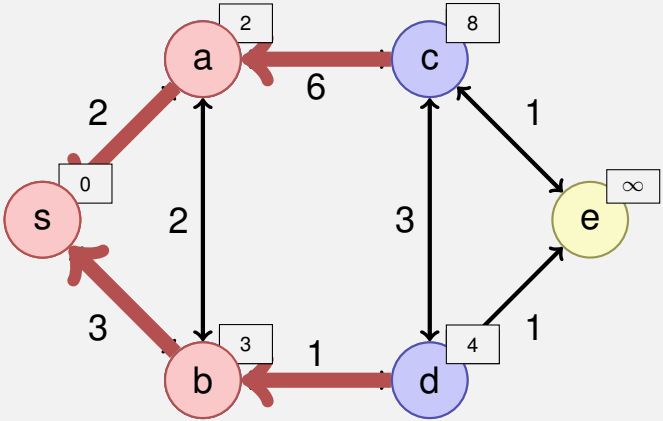


$$M = \{s, a\}$$

$$R = \{b, c\}$$

$$U = \{d, e\}$$

Beispiel

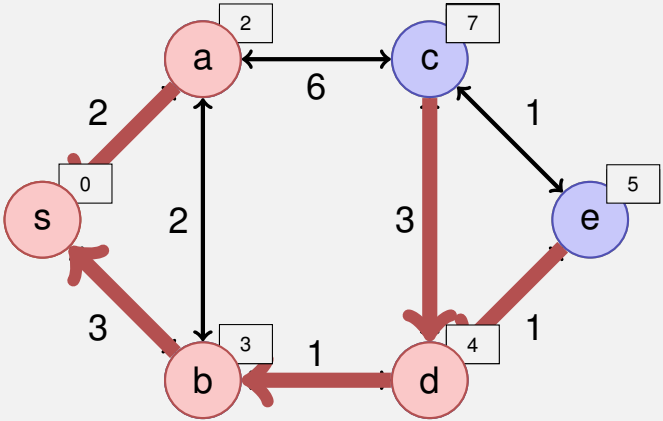


$$M = \{s, a, b\}$$

$$R = \{c, d\}$$

$$U = \{e\}$$

Beispiel

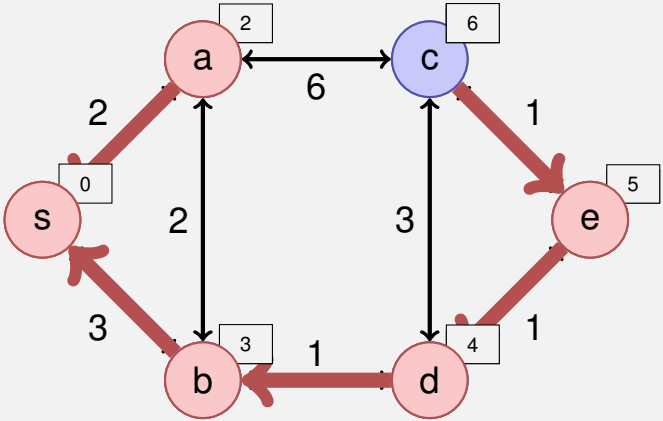


$$M = \{s, a, b, d\}$$

$$R = \{c, e\}$$

$$U = \{\}$$

Beispiel

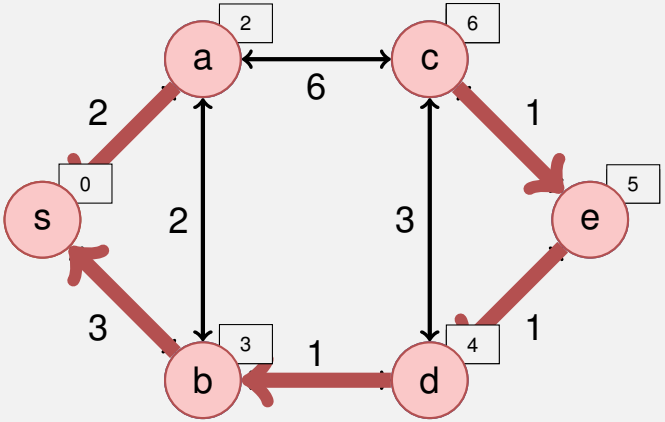


$$M = \{s, a, b, d, e\}$$

$$R = \{c\}$$

$$U = \{\}$$

Beispiel



$$M = \{s, a, b, d, e, c\}$$

$$R = \{\}$$

$$U = \{\}$$

Zur Implementation: Datenstruktur für R?

Benötigte Operationen:

- Insert (Hinzunehmen zu R)
- ExtractMin (über R) und DecreaseKey (Update in R)

foreach $v \in N^+(u)$ **do**
  if $d_s[u] + c(u,v) < d_s[v]$ **then**
    $d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u,v)$
    $\pi_s[v] \leftarrow u$
    if $v \in R$ **then**
      DecreaseKey(R, v) // Update eines $d(v)$ im Heap zu R
    else
      $R \leftarrow R \cup \{v\}$ // Einfügen eines neuen $d(v)$ im Heap zu R

Zur Implementation: Datenstruktur für R?

Benötigte Operationen:

- Insert (Hinzunehmen zu R)
- ExtractMin (über R) und DecreaseKey (Update in R)

foreach $v \in N^+(u)$ **do**
  if $d_s[u] + c(u,v) < d_s[v]$ **then**
    $d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u,v)$
    $\pi_s[v] \leftarrow u$
    if $v \in R$ **then**
      DecreaseKey(R, v) // Update eines $d(v)$ im Heap zu R
    else
      $R \leftarrow R \cup \{v\}$ // Einfügen eines neuen $d(v)$ im Heap zu R

MinHeap!

DecreaseKey

- DecreaseKey: Aufsteigen im MinHeap in $\mathcal{O}(\log |V|)$
- Position im Heap?

[24] Für die lazy deletion benötigt man ein Paar von Kante (oder Zielknoten) und Distanz

DecreaseKey

- DecreaseKey: Aufsteigen im MinHeap in $\mathcal{O}(\log |V|)$
- Position im Heap?
  - Möglichkeit (a): Speichern am Knoten

[24] Für die lazy deletion benötigt man ein Paar von Kante (oder Zielknoten) und Distanz

DecreaseKey

- DecreaseKey: Aufsteigen im MinHeap in $\mathcal{O}(\log |V|)$
- Position im Heap?
  - Möglichkeit (a): Speichern am Knoten
  - Möglichkeit (b): Hashtabelle über Knoten

[24] Für die lazy deletion benötigt man ein Paar von Kante (oder Zielknoten) und Distanz

DecreaseKey

- DecreaseKey: Aufsteigen im MinHeap in $\mathcal{O}(\log |V|)$
- Position im Heap?
  - Möglichkeit (a): Speichern am Knoten
  - Möglichkeit (b): Hashtabelle über Knoten
  - Möglichkeit (c): Knoten nach erfolgreichem Relaxieren erneut einfügen. Knoten beim Entnehmen als "deleted" kennzeichnen (Lazy Deletion).[24]

[24] Für die lazy deletion benötigt man ein Paar von Kante (oder Zielknoten) und Distanz

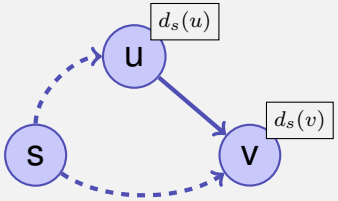
Laufzeit

- $|V|\times$ ExtractMin: $\mathcal{O}(|V| \log |V|)$
- $|E|\times$ Insert oder DecreaseKey: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$
- $1\times$ Init: $\mathcal{O}(|V|)$
- Insgesamt: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$.

Allgemeine Bewertete Graphen

Verbesserungsschritt wie bisherwie bisher, aber mit Rückgabewert:

Relax(u, v) $(u, v \in V, (u, v) \in E)$
if $d_s[u] + c(u, v) < d_s[v]$ **then**
    $d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u, v)$
    $\pi_s[v] \leftarrow u$
    return true
return false



Problem: Zyklen mit negativen Gewichten können Weg verkürzen: es muss keinen kürzesten Weg mehr geben

Dynamic Programming Ansatz (Bellman)

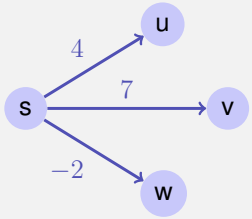
Induktion über Anzahl Kanten. $d_s[i, v]$: Kürzeste Weglänge von s nach v über maximal i Kanten.

$$d_s[i, v] = \min\{d_s[i-1, v], \min_{(u,v)\in E}(d_s[i-1, u] + c(u, v))$$

$$d_s[0, s] = 0, d_s[0, v] = \infty \; \forall v \neq s.$$

Dynamic Programming Ansatz (Bellman)

	s	$\cdots$	v	$\cdots$	w
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	∞	7	∞	-2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$



Algorithmus: Iteriere über letzte Zeile bis die Relaxationsschritte keine Änderung mehr ergeben, maximal aber $n-1$ mal. Wenn dann noch Änderungen, dann gibt es keinen kürzesten Pfad.

Algorithmus Bellman-Ford(G, s)

Input: Graph $G = (V, E, c)$, Startpunkt $s \in V$
Output: Wenn Rückgabe true, Minimale Gewichte d der kürzesten Pfade zu jedem Knoten, sonst kein kürzester Pfad.

foreach $u \in V$ **do**
    $d_s[u] \leftarrow \infty$; $\pi_s[u] \leftarrow$ null
$d_s[s] \leftarrow 0$;
for $i \leftarrow 1$ **to** $|V|$ **do**
    $f \leftarrow$ false
    foreach $(u, v) \in E$ **do**
        $f \leftarrow f \vee \mathrm{Relax}(u, v)$
    if $f =$ false **then return** true
return false;