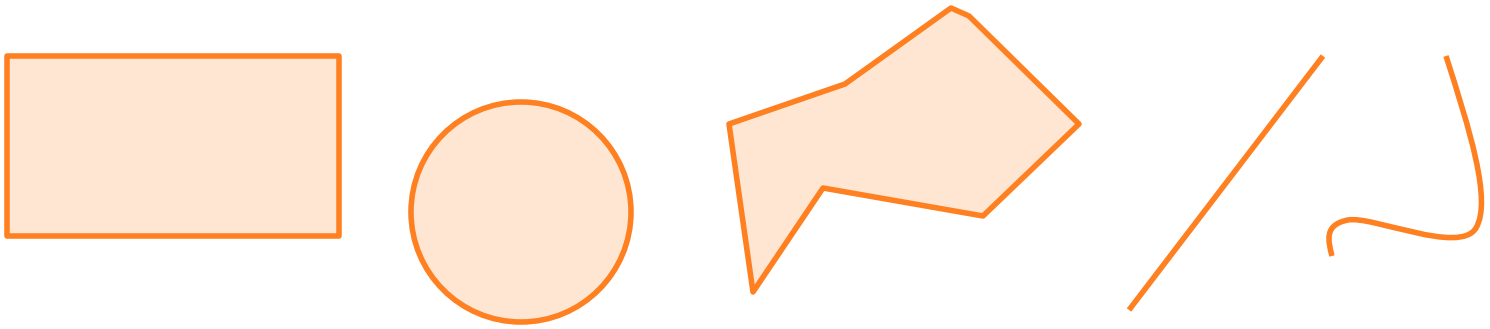
Motivation Zeichenprogramm, Vererbung, Polymorphie, Fallstudie
Numerische Integration: Rechteck-, Trapez- und Simpson-Regel, Monte-Carle Integration

6. OBJEKTORIENTIERTE PROGRAMMIERUNG

Vererbung – Motivation

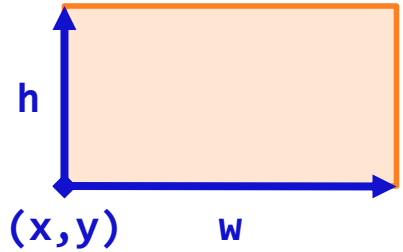
- Beispielhaftes Ziel: erweiterter Fundus an geometrischen Figuren
  - Rechteck, Kreis, Polygon, Linie, Kurve etc.

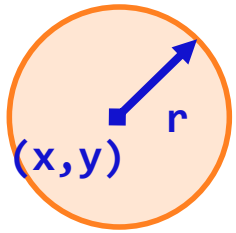


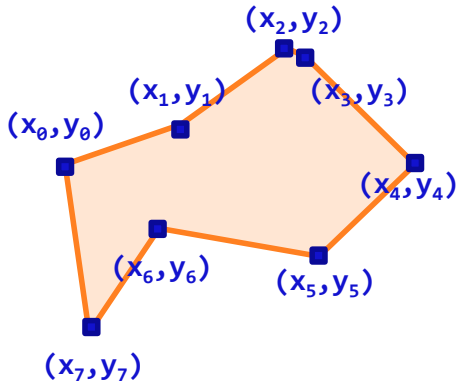
- Gemeinsame Eigenschaften
  - Randfarbe, Randdicke, Füllfarbe, Muster etc.
- Gemeinsame Operationen
  - Zeichnen, Füllen, PointInX, Schneiden mit Geraden, etc.

Vererbung – Motivation

- Unterschiede
  - Repräsentation
    - Rechteck: x,y,w,h,
    - Kreis: x,y,r,
    - Polygon: Liste von Eckpunkten
  - Operationen
    - Zeichnen / Füllen verschieden aufwändig
    - Schnitt mit Gerade oder Erkennung eines innenliegenden Punktes anders zu implementieren
    - etc.







Vererbung – Motivation

Annahme: wir wollen ein Zeichenprogramm schreiben, welches über eine (verkettete) Liste auf seine geometrischen Objekte zugreift.

Wie lässt sich das realisieren?

Eine Möglichkeit (ohne OOP):

- Packe alle nötige Information für ein geometrisches Objekt in dieselbe Datenstruktur
- Füge eine «Schaltervariable» hinzu, mit der über die Art («den Typ») des Objektes entschieden werden kann.

Vererbung – Motivation

Realisierung ohne Vererbung:

```
public class Figure {
   enum Type {Rectangle, Circle};
   // «Umschalter» nach Art des Objektes
   Type typ;
   // Parameter für jede mögliche Figur (Kreis / Rechteck)
   Color col;
   int x,y,w,h,r;

   // Konstruktor für Rechteck
   Figure (Color rcol, int rx, int ry, int rw, int rh) {
      col = rcol; x = rx; y = ry; w = rw; h = rh;
      typ = Type.Rectangle;
   }
   // Konstruktor für Kreis
   Figure (Color ccol, int cx, int cy, int cr) {
      col = ccol; x = cx; y = cy; r = cr;
      typ = Type.Circle;
   }
    ...
}
```

Aufzählung (Enumeration) von benannten Konstanten. Zuweisung und Vergleich des gleichen Typs möglich.

Wegen der Typprüfung besser als die Verwendung von einfachen Konstanten wie 0 oder 1.

Vererbung – Motivation

Realisierung ohne Vererbung:

```
public class Figure {

...
   public Color GetColor() { … }
   public void SetColor(Color col) { … }

   void DrawCircle(BufferedImage img) { … }
   void DrawRectangle(BufferedImage img) { … }

   public void draw(BufferedImage img) {
      switch (typ) {
         case Rectangle:
            DrawRectangle(img);
            break;
         case Circle:
            DrawCircle(img);
            break;
      }
   }
}
```

Je nach Wert von Variable typ wird DrawCircle oder DrawRectangle aufgerufen

Switch-Statement funktioniert wie eine If-Kaskade. Hier äquivalent:

```
if (typ = Type.Rectangle)
  DrawRectange(img)
else if (typ = Type.Circle)
  DrawCircle(img)
```

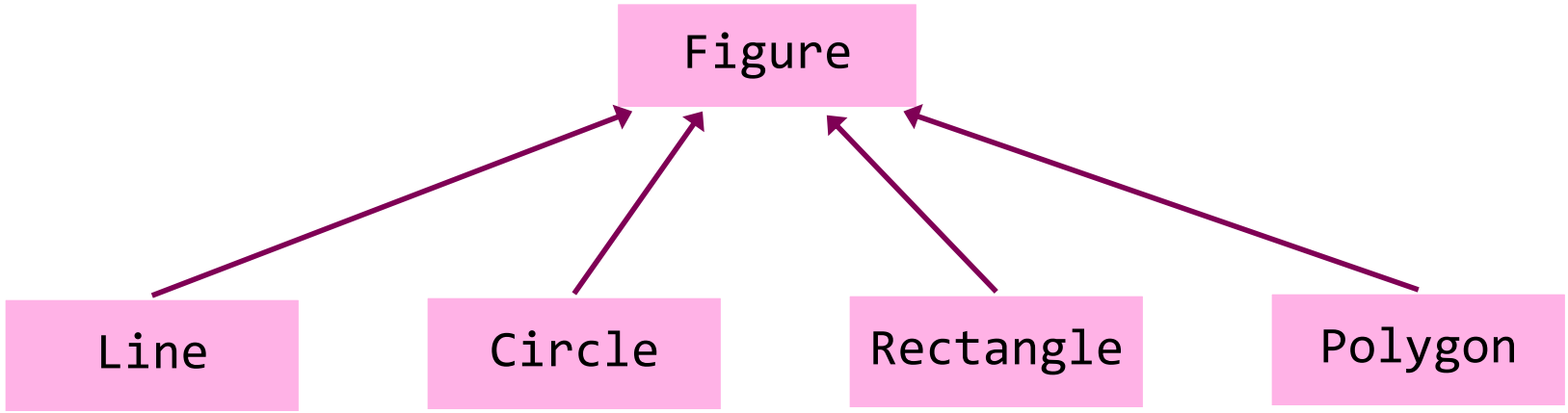
Vererbung – Motivation

Nachteile obigen Vorgehens?

- Abundante Information
  - z.B. `w,h` nicht genutzt für den Kreis
  - z.B. `DrawCircle` nicht verwendet für Rechteck
- Administrativer Overhead
  - Der Programmierer muss Fallunterscheidung programmieren
- Nicht-invasives Erweitern des Codes unmöglich.
  - Möchte man einen neuen Typ von Figur hinzufügen, so muss man den ursprünglichen Code verändern.

Vererbung – Motivation

- Idee zur Vermeidung obiger Nachteile: Darstellung jeder geometrischen Figur als Erweiterung eines zugrunde liegenden Grundtyps `Figure`



- Gemeinsame Eigenschaften verbleiben (nur) in der Basisklasse Shape. Erklärung folgt.

Vererbung

Klassen können Eigenschaften *(ver)erben:*

```
public class Figure {
  Color col;

  // Default-Konstruktor jeder Figur
  Figure() { col = Color.black; }

  public void SetColor(Color c){ col = c; }
  public Color GetColor() { return col; }
}


public class Circle extends Figure {
  int x,y,r;

  // Konstruktor eines Kreises
  Circle (int cx, int cy, int cr) {
    x = cx; y = cy; r = cr;
  }

  ...
}
```

Datenfelder, welche für alle Figuren deklariert sind

Methoden, welche für alle Figuren deklariert sind

Datenfelder, welche nur für `Circle` deklariert sind

Vererbung

Klassen können Eigenschaften *(ver)erben:*

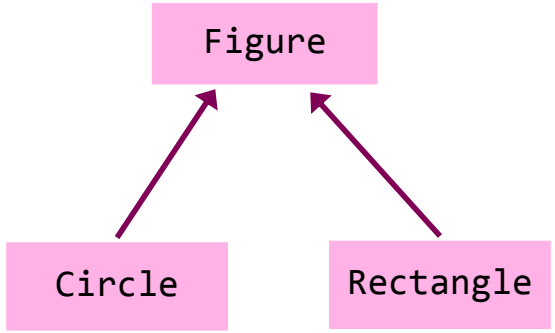
```
public class Figure {
  Color col;

  // Default-Konstruktor jeder Figur
  Figure() { col = Color.black; }

  public void SetColor(Color c){ col = c; }
  public Color GetColor() { return col; }
}


public class Rectangle extends Figure {
  int x,y,w,h;

  // Konstruktor eines Rechtecks
  Rectangle (int rx, int ry, int rw, rh) {
    x = rx; y = ry; w = rw; h = rh;
  }

  ...
}
```

Datenfelder, welche nur für `Rectangle` deklariert sind

Vererbung

Klassen können Eigenschaften *(ver)erben*:

```
public class Figure { ... }
public class Circle extends Figure { ... }
public class Rectangle extends Figure { ... }

public class TestFigures {

  public static void main(String[] args) {
    ...
    Rectangle rectangle=new Rectangle(100,100,200,100);
    Circle circle= new Circle(100,100,50);
    circle.SetColor(Color.blue);
    rectangle.SetColor(Color.red);
    ...
    }

}
```



Aufruf der Methoden der Basisklasse `Figure`

➔ Wiederverwendbarkeit gemeinsam nutzbaren Codes durch *Generalisierung*

Vererbung – Nomenklatur

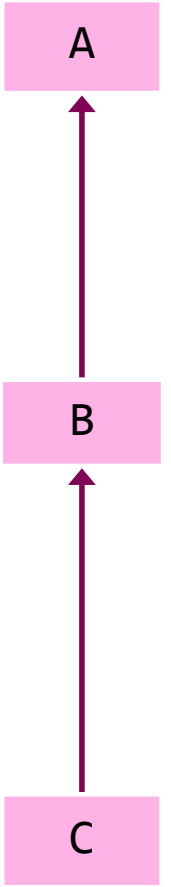
```
class A {
   ...
}

class B extends A {
   ...
}

class C extends B {
   ...
}
```

Basisklasse
(Superklasse)

Abgeleitete Klasse
(Subklasse)

«B und C *erben von* A»

«C *erbt von* B»



Vererbung – Kompatibilität

Ein abgeleitetes Objekt kann überall dort verwendet werden, wo ein Basisobjekt gefordert ist, aber nicht umgekehrt.

```
Rectangle rectangle = new Rectangle(0,0,10,10);
Figure figure = rectangle;  // ok: Rectangle extends Figure
figure.SetColor(Color.red);
Rectangle r = new Circle(0,0,10);  // type mismatch: cannot convert from Circle to Rectangle
Figure c = new Circle(0,0,10);  // ok: Circle extends Figure
Circle circle = c;  // type mismatch: cannot convert from Figure to Circle
```

Vererbung – Sichtbarkeit

- In der abgeleiteten Klasse können Variablen und Methoden der Basisklasse direkt verwendet werden
- Voraussetzung: Sichtbarkeit gewährleistet

Sichtbarkeiten nach Modifizierer

Modifizierer	Klasse	Paket	Sub-Klasse	Global
public	✓	✓	✓	✓
protected	✓	✓	✓	
(keiner)	✓	✓		
private	✓			

```
public class Rectangle extends Figure {
  ...
  // zusätzlicher Konstruktor
  Rectangle (Color col; int rx, int ry, int rw, rh) {
    x = rx; y = ry; w = rw; h = rh;
   SetColor(col);
  }
  ...
}
```

ruft die Methode SetColor in der Basisklasse `figure` auf

Typprüfung

Wenn von einem Objekt bekannt ist, dass es *zur Laufzeit* von abgeleitetem Typ ist, so kann man mit einem cast mit dynamischer Typprüfung zuweisen:

```
Figure figure = new Rectangle(0,0,10,10);
Rectangle r = (Rectangle)figure; // ok: dynamisch geprüft
figure = new Circle(0,0,100);
Rectangle r2 = (Rectangle)figure; //Fehler zur Laufzeit,
                                  Compiler akzeptiert das!
```

Um Fehler zur Laufzeit zu verhindern, oder allgemein einen Typ selbst prüfen zu können, kann man `instanceof` verwenden:

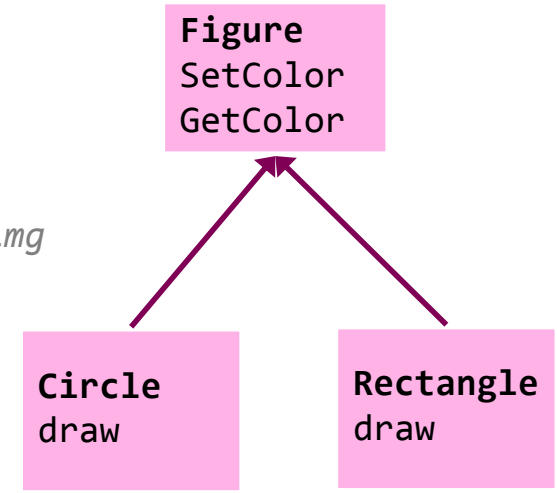
```
if (figure instanceof Rectangle)
  System.out.println("figure is rectangle");
else
  System.out.println("figure is not rectangle");
```

Polymorphie – Motivation

Ziel: Zeichnen der Figur entsprechend Ihrer Eigenschaften.

Vorgehen (noch ohne Polymorphie): Anbringen einer entsprechenden Methode, z.B. bei Kreis und Rechteck:

```
public class Circle extends Figure {
  ...
    public void draw(BufferedImage img) {
        ... // Zeichne Kreis an x,y mir Radius r im Bild img
    }
}

public class Rectangle extends Figure {
  ...
    public void draw(BufferedImage img) {
        ... // Zeichne Rechteck an x,y mit Massen w,h im Bild img
    }
}
```



Polymorphie – Motivation

Ziel: Zeichnen der Figur entsprechend Ihrer Eigenschaften.

Vorgehen (noch ohne Polymorphie): Nun kann die jeweilige Methode `draw` aufgerufen werden

```
public static void main(String[] args) {
    int width = 400;
    int height = 300;
    BufferedImage img
        = new BufferedImage(width, height, BufferedImage.TYPE_INT_ARGB);
     ImageViewer panel = new ImageViewer(img);
    Rectangle rectangle=new Rectangle(100,100,200,100);
    Circle circle= new Circle(100,100,50);
    circle.SetColor(Color.blue);
    rectangle.draw(img);
    circle.draw(img);
    panel.repaint();
}
```

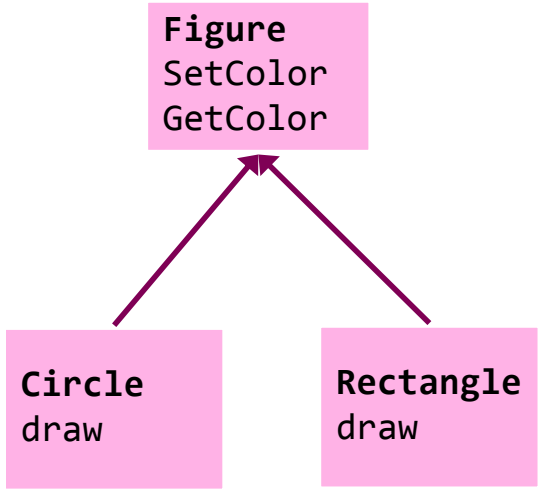
Ruft die jeweilge draw Methode auf, gemäss statischem Typ.

Polymorphie – Motivation

Ziel: Zeichnen der Figur entsprechend Ihrer Eigenschaften.

Problem dieses Vorgehens: so wie bisher deklariert, muss der statische Typ beim Aufruf stimmen.

```
public static void main(String[] args) {
    ...
    circle.draw(img);
    Figure figure = circle;
    figure.draw(img); // Fehler: Methode draw bei
                         figure nicht definiert
    ...
}
```



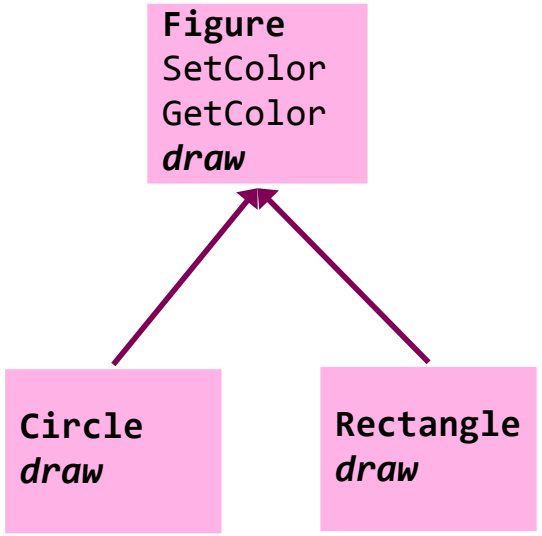
Das ist insbesondere unpraktisch, wenn man z.B. eine verkettete Liste von Figuren führen will und die jeweilig passende `draw` Methode aufrufen möchte. Das war ja unser erklärtes Ziel!

Polymorphie

Polymorphie (in Java): Deklariert man eine (nicht statische) Methode mit gleichem Namen und gleicher Signatur in der Basisklasse und in abgeleiteten Klassen, so wird *zur Laufzeit* automatisch über die auszuführende Variante entschieden.

Man sagt, die Methode wird in der abgeleiteten Klasse *überschrieben*.

```
public class Figure {
  ...
  public void draw(BufferenImage img) { }
}

public class Circle extends Figure {
  ...
  public void draw(BufferedImage img) {  ... // draw circle  }
}

public class Rectangle extends Figure {
  ...
  public void draw(BufferedImage img) {  ... // draw rect  }
}
```



Polymorphie

Bei überschriebenen Methoden wird der dynamische Typ gewählt («dynamic dispatching»)

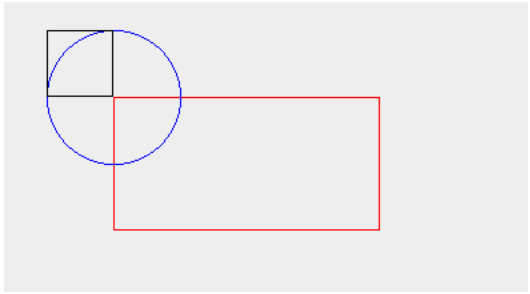
```
public class TestDynamicDispatch {

    public static void main(String[] args) {
        int width = 400;
        int height = 300;
        BufferedImage img = new BufferedImage(width, height, BufferedImage.TYPE_INT_ARGB);
        ImageViewer panel = new ImageViewer(img);

        Figure f1 = new Rectangle(100,100,200,100);
        Figure f2 = new Circle(100,100,50);
        f1.draw(img); // wählt draw von Rectangle
        f2.draw(img); // wählt draw von Circle

        panel.repaint();
    }
}
```

Für C++-Kenner: in Java sind Methoden per Default virtuell. Es gibt kein «virtual» Schlüsselwort.

Polymorphie

Ziel erreicht!

```
public class TestFigureList {

    public static void DrawFigures(BufferedImage img, LinkedList<Figure> figures){
        ListIterator<Figure> it = figures.listIterator(0);
        while (it.hasNext())
        {
            Figure figure = it.next();
            figure.draw(img);
        }
    }

    public static void main(String[] args) {
        ...
        LinkedList<Figure> figures = new LinkedList<Figure>();
        figures.add(new Rectangle(Color.red, 100,100,200,100));
        figures.add(new Circle(Color.blue, 100,100,50));
        figures.add(new Rectangle(50,50,50,50));
        DrawFigures(img, figures);
        panel.repaint();
    }
}
```



Erweiterbarkeit

Mit den Konzepten der Vererbung und Polymorphie kann nun «nichtinvasiv» erweitert werden.

Neue Figuren können nun ohne Veränderung des anderen Quellcodes hinzugenommen und verwendet werden:

```
public class Line extends Figure{
    int x1,y1,x2,y2;

    Line (int lx1,int ly1,int lx2, int ly2)
    {
        x1 = lx1; x2 = lx2; y1 = ly1; y2 = ly2;
    }

    public void draw(BufferedImage img)
    {
        ...  // Bresenham Algorithmus
    }
}
```

Zusammenfassung der Konzepte

.. der objektorientierten Programmierung

Kapselung, Information Hiding

- Verbergen des Zustands und der Implementierungsdetails von Objekten
- Definition einer Schnittstelle zum Zugriff auf interne Datenstruktur → Abstraktion
- Ermöglicht das Sicherstellen von Invarianten

Zusammenfassung der Konzepte

.. der objektorientierten Programmierung

Vererbung

- Objekte können Eigenschaften von Objekten erben
- Abgeleitete Objekte können neue Eigenschaften besitzen oder vorhandene überschreiben
- Macht Code- und Datenwiederverwendung möglich

Zusammenfassung der Konzepte

.. der objektorientierten Programmierung

Polymorphie

- Ein Bezeichner kann abhängig von seiner Verwendung unterschiedliche Datentypen annehmen.
- Unterschiedliche Datentypen können bei gleichem Zugriff auf ihr gemeinsames Interface verschieden reagieren.
- Macht „nicht invasive” Erweiterung von Bibliotheken möglich.

Fallstudie: Numerische Integration

Ziel: Erstellung eines Softwareframeworks zur numerischen Integration («Quadratur») einer gegebenen Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

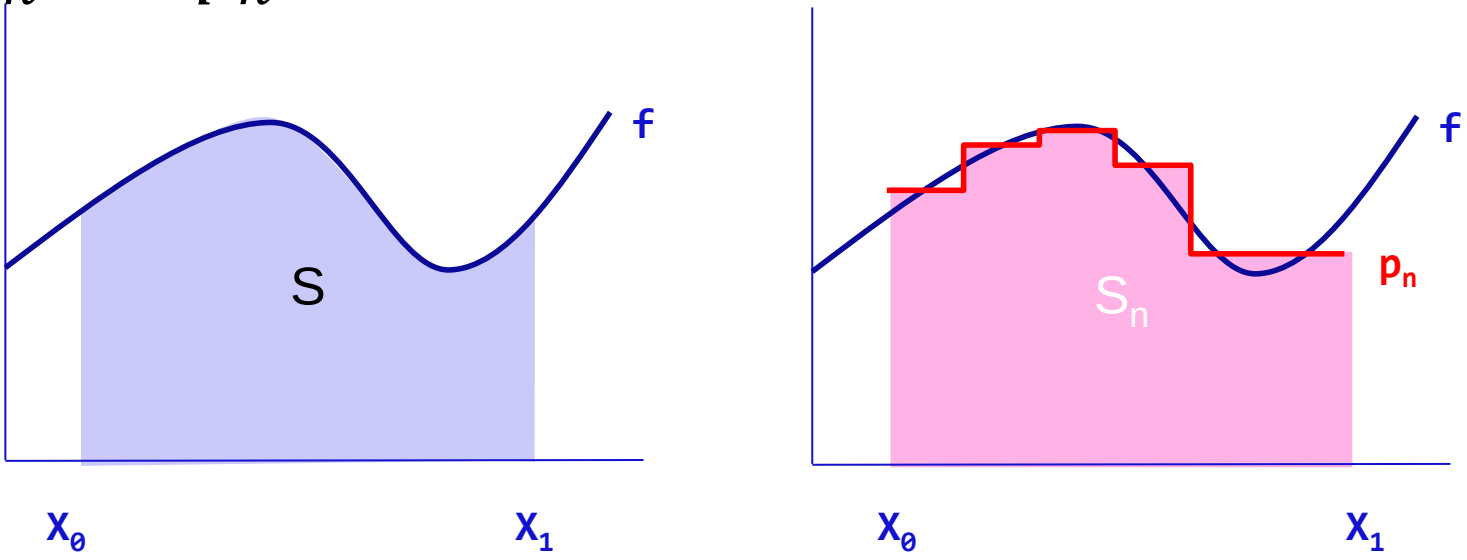
Problem aus Sicht der Softwareentwicklung: in Java gibt es keine Variablen von Funktionstyp. Wie können wir trotzdem ein generischen Tool bauen?

Antwort: wir verwenden Vererbung und Polymorphie für die generische Darstellung von reellwertigen Funktionen.

Numerische Integration

Einfachster Ansatz: Approximiere die Funktion f im gewünschten Integrationsintervall $[x_0, x_1]$ durch eine stückweise konstante Funktion p_n mit n Stücken.

Approximiere das Integral I von f durch das Integral I_n von p_n



Generischer Integrator

Abstrakte Funktionenklasse:

```
public abstract class Function {

    public abstract double Evaluate(double x);

}
```

abstract :

- Abstrakte Klassen können nicht instanziert werden
- Abstrakte Funktionen benötigen keinen Body, müssen jedoch von erbenden Klassen, welche nicht abstract sind, implementiert werden.

Abstrakter Integrierer:

```
public abstract class Integrator {

    int n;

    public void SetNumberPieces(int pieces) {

        n = pieces;

    }

    public abstract double Integrate(Function f, double x0, double x1);

}
```

Konkretisierung

Integrierer mit Rechteckregel

```
public class RectangleIntegrator extends Integrator {

   RectangleIntegrator(int pieces){
      n= pieces;
   }

   public double Integrate(Function f, double x0, double x1)
   {
      double sum = 0;
      double width=(x1-x0)/n; // Intervallbreite
      for (int i = 0; i<n; ++i)
      {
         double x = x0 + (i+0.5)*width; // Mitte des Intervalls
         double y = f.Evaluate(x); // Abgreifen des Funktionswertes
         sum += y*width; // Rechteckinhalt addieren
      }
      return sum;
   }
}
```

Zwei Funktionen

Parabel

$$f(x) = x^2$$

```
class Square extends Function
{
    public double Evaluate (double x){return x*x;}
}
```

Dichte der Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

```
class Normal extends Function
{
    double mu;
    double sigma;

    Normal(double m, double s)  {
        mu = m; sigma = s;
    }

    public double Evaluate(double x) {
        return 1/Math.sqrt(2*Math.PI)/sigma
                * Math.exp(-(x-mu)*(x-mu)/(2*sigma*sigma));
    }
}
```

Testbeispiel

```
public class TestIntegration {

public static void main(String[] args) {
    Integrator integrator = new RectangleIntegrator(100);
    Function sq = new Square();
    Function N = new Normal(0,1);

    System.out.println("I(sq,0,2)= " +    integrator.Integrate(sq, 0, 2) );

    for (int i=1; i<=3;++i)
        System.out.println("I(N,"+(-i) + "," + i + ")= "
                           + integrator.Integrate(N,-i,i));
    }
}
```

Ausgabe:

```
I(sq,0,2)= 2.6666000000000003
I(N,-1,1)= 0.6826975580161088
I(N,-2,2)= 0.9545141330225693
I(N,-3,3)= 0.9973041900876916
```

Deutung für normalverteilte Zufallsvariablen:

Innerhalb von 1 Standardabweichung liegen 68% der Daten

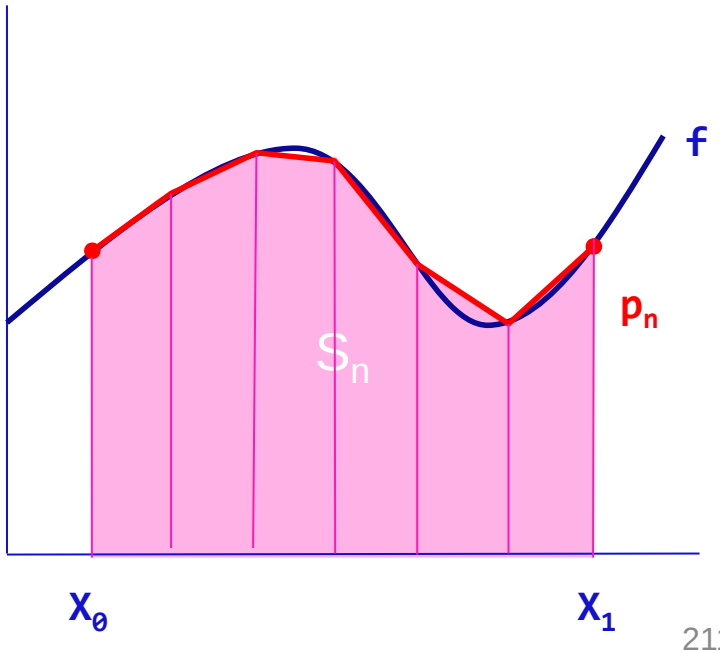
Innerhalb von 2 Standardabweichungen liegen 95% der Daten

Innerhalb von 3 Standardabwiechungen liegen 99.7% der Daten

Andere Integrationsregeln

Trapezregel: Stückweise affine Approximation

```
public class TrapezoidalIntegrator extends Integrator{
    TrapezoidalIntegrator(int pieces){
        n= pieces;
    }

    public double Integrate(Function f, double x0, double x1){
        double sum = 0;
        double width=(x1-x0)/n;
        for (int i = 0; i<n; ++i)
        {
            double x = x0 + i*width;
            double y = f.Evaluate(x)
                        + f.Evaluate(x+width);
            sum += y*width/2;
        }
        return sum;
    }
}
```



Beobachtung

Trapezregel ist für viele Funktionen kaum besser als die Rechteckregel.

- Eine Inspektion des Algorithmus zeigt, dass Rechteckregel und Trapezregel auch nahezu dasselbe tun.
- Für eine lineare Funktion stimmen die Regeln sogar überein.
- Die Rechteckregel überschätzt in der Regel das Integral, die Trapezregel unterschätzt.

Beispiel: Numerische Integration von sin(x) im Intervall $[0, \pi]$

n	Rechteck	Trapez
1	3.14159	0
2	2.22144	1.57079
4	2.05234	1.89611
8	2.01290	1.97423
16	2.00321	1.99357
32	2.00080	1.99839
64	2.00020	1.99960
128	2.00005	1.99990

Präzisierung*

Betrachtung eines Einzelstückes der numerischen Integration am Intervall $[l, r]$.

Annahme: Funktion f genügend oft differenzierbar

Taylor-Entwicklung um $\tilde{x} = \frac{l+r}{2}$

$$f(x) = f(\tilde{x}) + (x - \tilde{x}) f'(\tilde{x}) + \frac{(x-\tilde{x})^2}{2} \mathrm{f}''(\tilde{x}) + \frac{(x-\tilde{x})^3}{6} \mathrm{f}^{(3)}(\tilde{x}) + \frac{(x-\tilde{x})^4}{24} \mathrm{f}^{(4)}(\tilde{x}) + \ \ldots$$

Integration von f ergibt (mit $\Delta = r - l$)

$$\int_l^r f(x)dx = \Delta \cdot f(\tilde{x}) + \frac{\Delta^3}{24} \cdot f''(\tilde{x}) + \mathrm{O}(\Delta^5)$$

Dieser Term stellt genau die Rechteckregel dar!

Präzisierung*

Seien $I(f)$ das exakte Integral, $I^R(f)$ und $I^T(f)$ die Approximationen mit Rechteck- / Trapezregel.

Dann gelten

$$I^R(f) = I(f) - \frac{\Delta^3}{24} f''(\tilde{x}) + O(\Delta^5)$$

$$I^T(f) = I(f) + \frac{\Delta^3}{12} f''(\tilde{x}) + O(\Delta^5)$$

Der Fehler ist immerhin mit der dritten Potenz der Länge der Stücke kontrollierbar

Das verhilft zu folgendem Trick

$$2 \cdot I^R(f) + I^T(f) = 3 \cdot I(f) + O(\Delta^5)$$

Noch besser: Der Fehler fällt mit der 5ten Poztenz!!

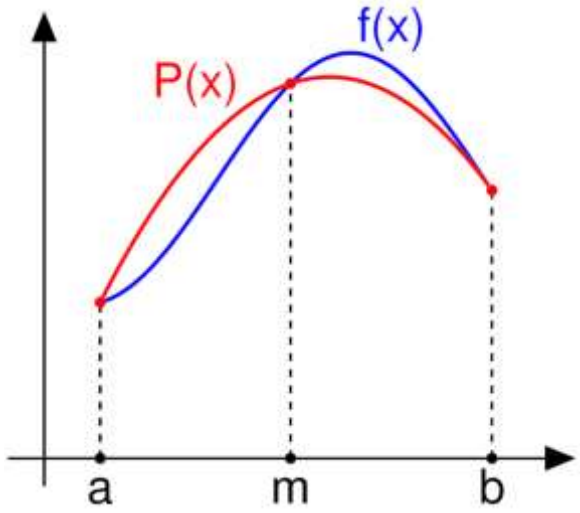
Daraus folgt die Simpson Regel

$$I(f) \approx I^S(f) := \frac{r-l}{6}\left(f(x_l) + 4f\left(\frac{r+l}{2}\right) + f(x_r)\right)$$

Simpson Regel*

Die Simpson-Integration korrespondiert mit quadratischer Interpolation von f

```
public class SimpsonIntegrator extends Integrator{
    SimpsonIntegrator(int pieces){
        n= pieces;
    }

    public double Integrate(Function f, double x0, double x1) {
        double sum = 0;
        double width=(x1-x0)/n;
        for (int i = 0; i<n; ++i)
        {
            double x = x0 + i*width;
            double y = f.Evaluate(x)+f.Evaluate(x+width)
                          + 4*f.Evaluate(x+width/2);
            sum += y*width/6;
        }
        return sum;
    }
}
```



Quadratische Interpolation

Quelle: Wikipedia

Newton Cotes Formeln*

- Die Newton-Cotes Formeln sind numerische Quadraturformeln zur approximativen Berechnung von Integralen durch Interpolation von Funktionen mit Lagrange Polynomen.
- Rechteck-, Trapez- und Simpson-Regeln sind Beispiele dieser Formeln.
- Eine andere berühmte numerische Integrationsmethode ist die Gauss-Quadratur
- Darüber hinaus sind Verfahren interessant, die das Abtastgitter in x-Richtung adaptiv wählen. Solche Verfahren sind wichtig bei Funktionen, die nicht überall gleich «glatt» sind.

Monte Carlo Integration

Nach dem Gesetz der grossen Zahlen konvergiert das empirische Mittel von identischen, unabhängig gezogenen Zufallsvariablen gegen den Erwartungswert der Zufallsvariablen*.

Es gilt also

$$f_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \rightarrow_{f.s.} \mathbb{E}(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\mu(x)$$

Wenn man die Zufallszahlen X_i geichverteilt im Intervall $[x_0, x_1]$ zieht, so kann man das Integral von f also wie folgt approximieren

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx (x_1 - x_0) \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$$

*in Wahrscheinlichkeit, sogar fast sicher

Monte Carlo Integration

Berechnet Mittelwert der Funktionswerte über dem Intervall *durch Sampling* und gibt dessen Produkt mit der Intervallbreite zurück.

```
public class MonteCarloIntegrator extends Integrator{

    MonteCarloIntegrator(int pieces){
        n= pieces;
    }

    public double Integrate(Function f, double x0, double x1) {
        double sum = 0;
        for (int i = 0; i<n; ++i)
        {
            double x = x0 + Math.random()*(x1-x0);
            sum += f.Evaluate(x);
        }
        return (x1-x0)*sum/n;
    }
}
```

Experiment: Vergleich der Verfahren

- Approximation des Integrals $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = 2$

n	Rechteck	Trapez	Simpson	MonteCarlo
1	3.14159265	0	2.0943951	1.87890144
2	2.22144147	1.57079633	2.00455975	1.51525667
4	2.05234431	1.8961189	2.00026917	2.0769775
8	2.01290909	1.9742316	2.00001659	1.8314429
16	2.00321638	1.99357034	2.00000103	1.76335613
32	2.00080342	1.99839336	2.00000006	1.96607781
64	2.00020081	1.99959839	2	2.06425794
128	2.0000502	1.9998996	2	1.94378659
256	2.00001255	1.9999749	2	2.01618607
512	2.00000314	1.99999373	2	2.03129742
1024	2.00000078	1.99999843	2	1.9790763