Komplexität eines Algorithmus, Grössenordnung, Landau-Symbole, Beispiel einer Komplexitätsberechnung (Mergesort)

4. KOMPLEXITÄT

Komplexität eines Algorithmus

Algorithmen verbrauchen Ressourcen

- Rechenzeit
- Speicher
- (Energie)

Zunehmend wichtig. Aber zu kompliziert für diese Vorlesung

Wichtiges Ziel: Ressourcenverbrauch minimieren

- Beispiel einer Frage: Wie hoch ist der Ressourcenverbrauch beim Berechnen des Medians mit Mergesort?
- Präzisierte Frage: Im besten Fall, im schlechtesten Fall, im Durchschnitt?

Begriffe

- Betrachten Probleme mit einem gewissen *Problemumfang* n
  - Anzahl Eingabewerte, Anzahl der Bits der Eingabe
- Aufwand (Zeit / Speicherplatz) typischerweise von n abhängig
  - Wird daher als Funktion $f(n)$ angegeben
- Beim Zeitaufwand wird i.A. von konstanten Faktoren abstrahiert
  - z.B. $f(n) = n \log n$ statt (genauer) $3 + 7\, n \log n$
  - Beim Speicherverbrauch wird oft nicht von Konstanten abstrahiert

Begriffe

- Oft ist der Aufwand eines Algorithmus nicht nur von der Problemgrösse n, sondern von den konkreten Eingabewerten (bzw. deren Reihenfolge) abhängig, daher unterscheidet man:
  - günstigster Fall („best case“)
  - mittlerer Fall („average case“)
  - ungünstigster Fall („worst case“)
- Oft ist man nur am (i.Allg. leichter zu bestimmenden) asymptotischen Aufwand (für $n \to \infty$) als Funktion von n interessiert
- Achtung: für „kleine“ n kann ein Algorithmus mit schlechterem asymptotischen Aufwand besser sein (→ break even points)!
- Komplexität eines Problems = geringstmöglicher Aufwand, der mit dem dafür besten Lösungsalgorithmus erreicht werden kann
- Manche Probleme sind inhärent aufwendig / schwierig / „komplex“

Komplexitätsgrössenordnung

- Zweck: Angabe der Grössenordnung der Komplexität eines Algorithmus als Funktion der Eingabegrösse
  - Zeitkomplexität meist Anzahl "Schritte"
  - Von unwesentlichen Konstanten wird abstrahiert
- Schreibweise
  - $O(1)$ konstant
  - $O(\log n)$ logarithmisch
  - $O(n)$ linear
  - $O(n^2)$ quadratisch
  - $O(n^k), k > 0$ polynomial

  "gut"
  - $O(c^n)$ exponentiell

  "böse"

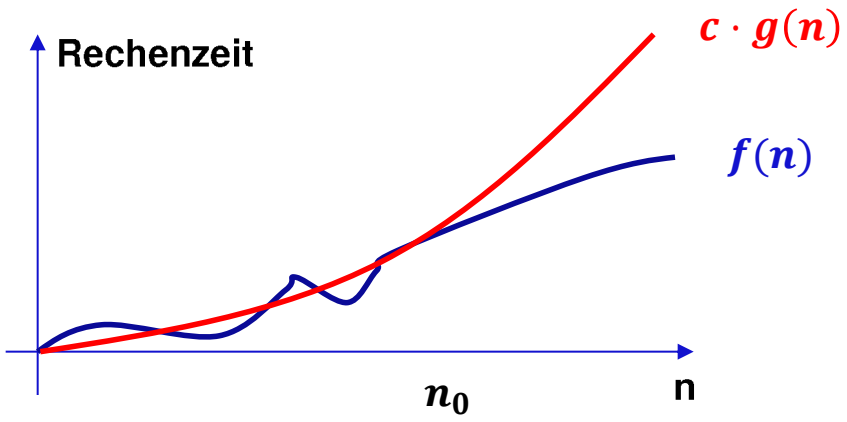
Man sagt
"Grössenordnung x"
"O von x"
"Gross-O von x"

O(x)

Gross-O Notation

Wir sagen ein Algorithmus f *ist* $O(g)$ (oder "von der Ordnung g") wenn für die exakte Komplexität von f gilt:

Es gibt eine Konstante c und eine positive ganze Zahl n_0, so dass $f(n) \leq c \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

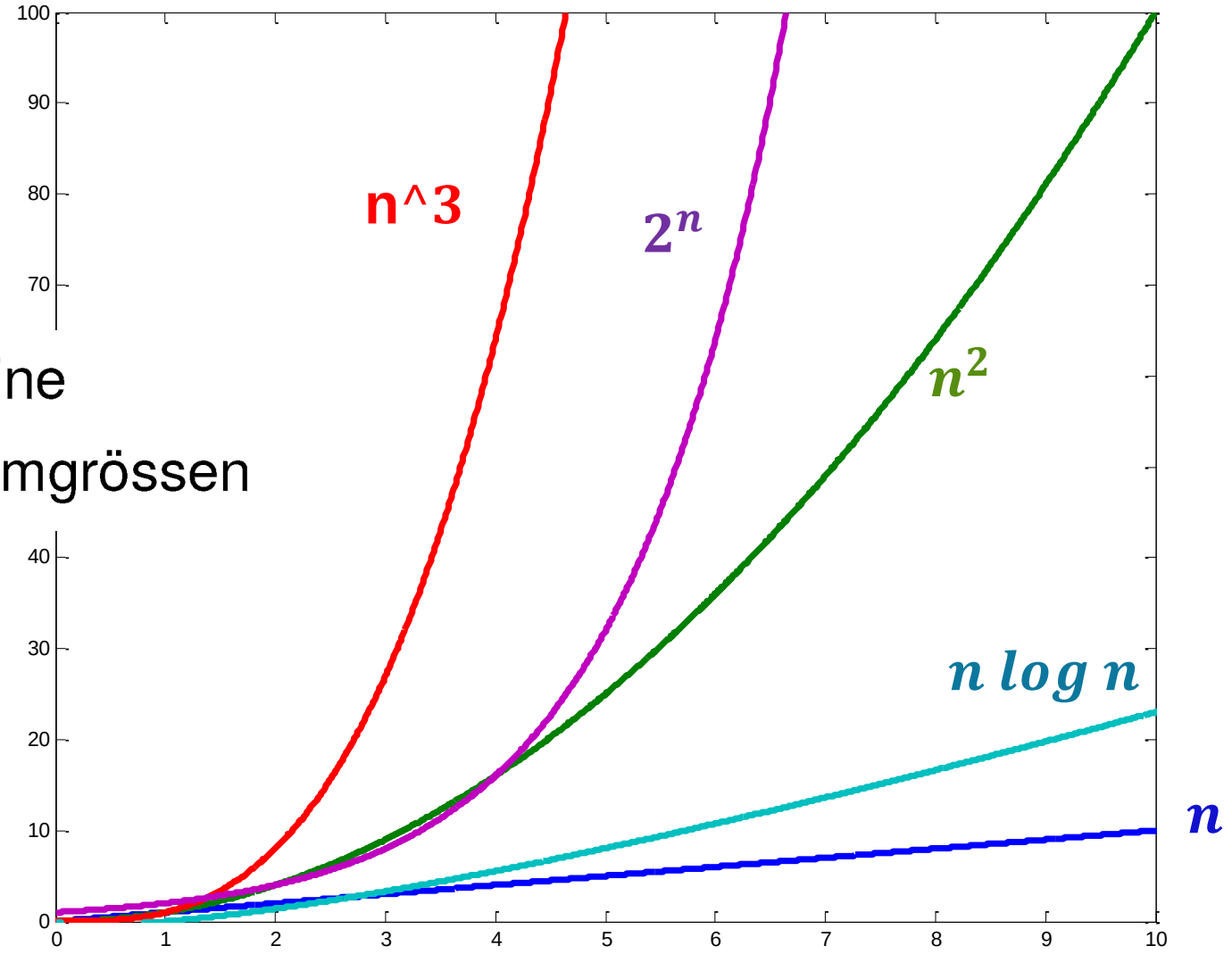


Asymptotische Aussage. Charakterisiert meist nicht Verhalten für kleine Problemgrössen.

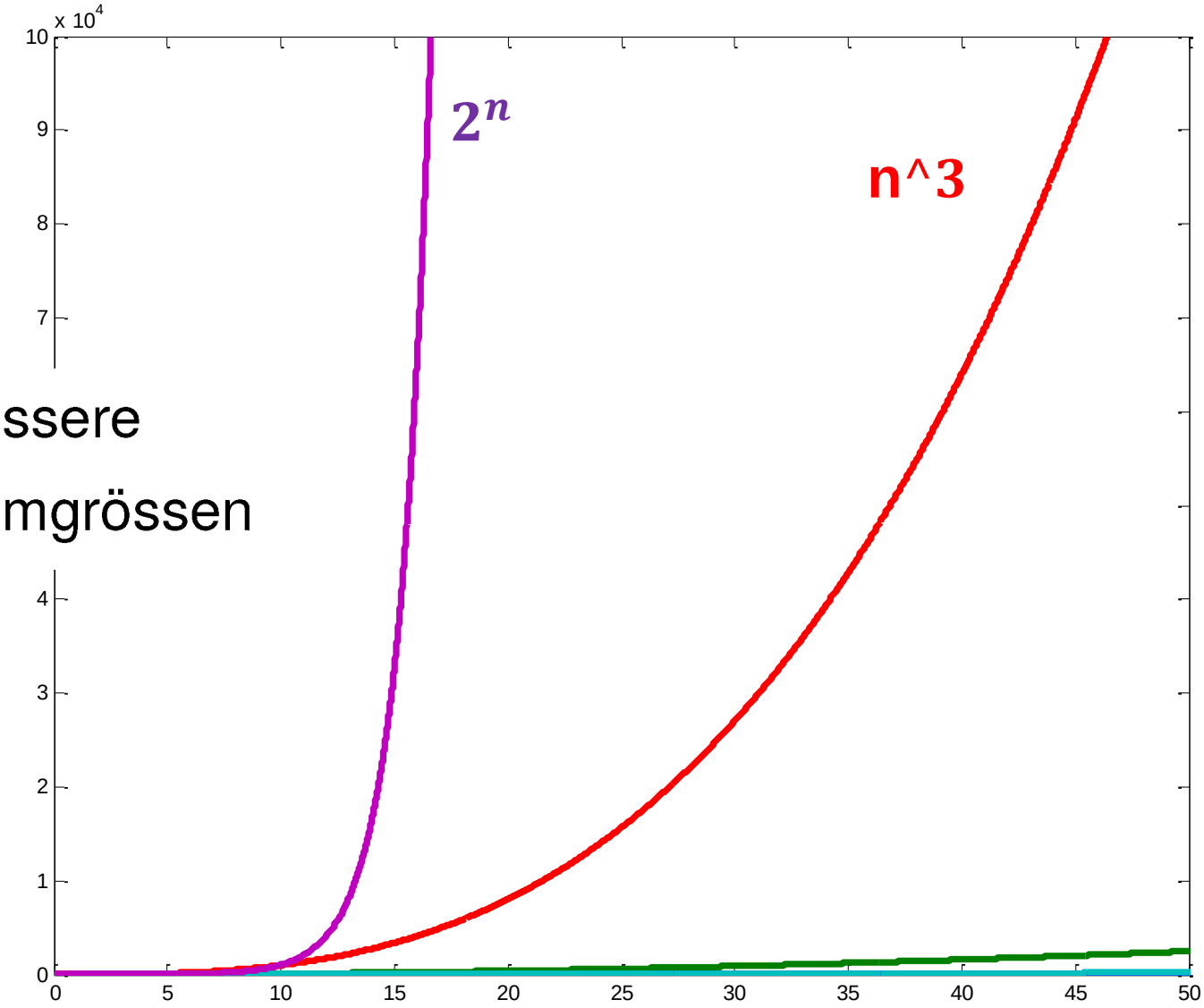
Laufzeiten und Problemgrössen

für kleine

Problemgrössen



Laufzeiten und Problemgrössen



für grössere

Problemgrössen

Zeitbedarf bei vergrössertem Problemumfang

- Beispiel: Bei $1\mu s$ für n=1

	n=1	n=100	n=10000	$n=10^6$
$\log n$	$1\ \mu s$	$7\ \mu s$	$13\ \mu s$	$20\ \mu s$
n	$1\ \mu s$	$100\ \mu s$	$0.01\ s$	$1\ s$
n^2	$1\ \mu s$	$0.01\ s$	$1.7\ min$	$11.5\ Tage$
2^n	$1\ \mu s$	10^{14} Jahrh.	$\sim \infty$	$\sim \infty$

Eine gute Strategie?

Dann kaufe ich mir eben eine bessere Maschine

Wenn ich heute ein Problem der Grössenordnung N lösen kann, dann kann ich mit einer zehn mal (!) so schnellen Maschine ...

f(n)	alter und neuer Problemumfang
$\log n$	$N \rightarrow N\text{^}10$
n	$N \rightarrow 10\ N$
$n \log n$	$N \rightarrow$ fast $10N$ $(\rightarrow 10N$ für $N \rightarrow \infty)$
$n\text{^}2$	$N \rightarrow \mathbf{\sqrt{10}\ N \sim 3.16\ N}$
$n\text{^}3$	$N \rightarrow \mathbf{10^{\frac{1}{3}} N \sim 2.15\ N}$
$2\text{^}n$	$N \rightarrow \mathbf{N + \log_2 10 \sim N + 3.3}$

Komplexitätsklassen formeller*

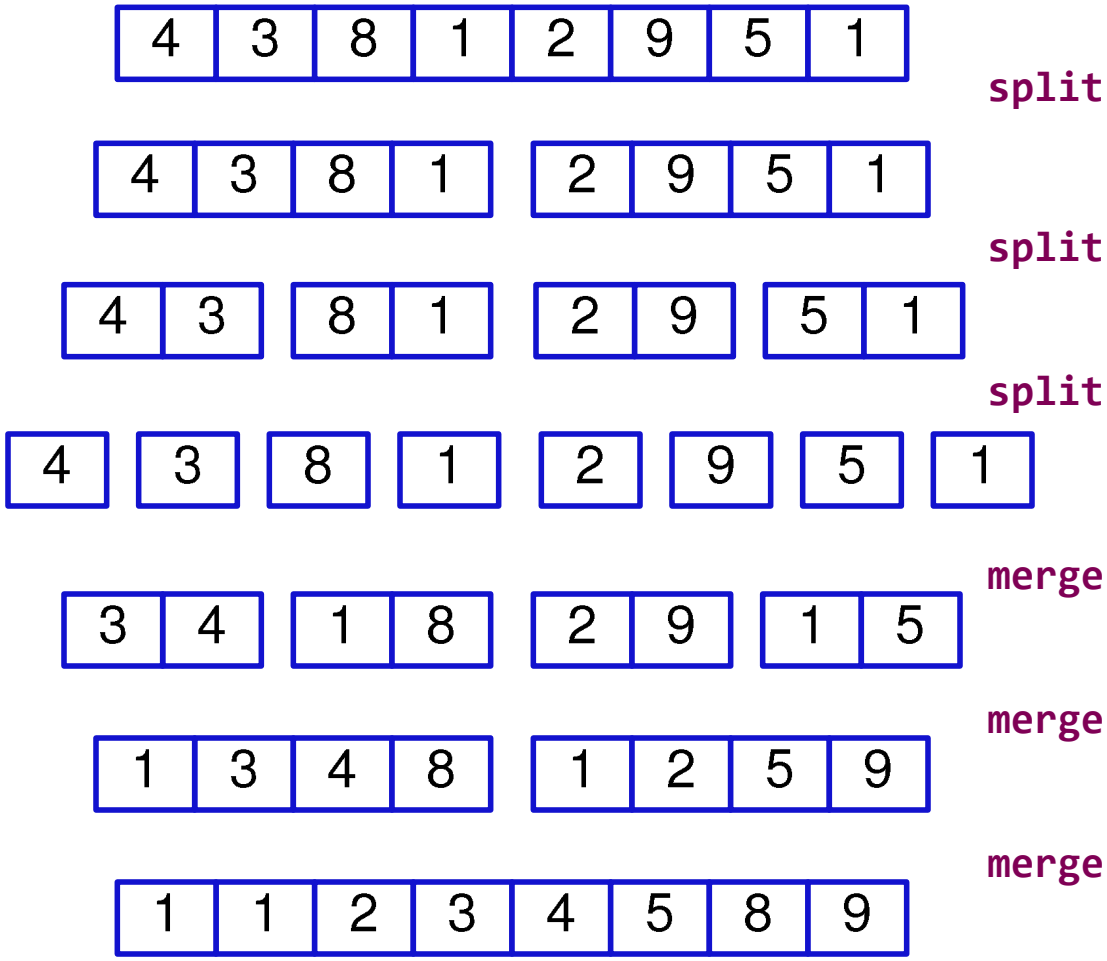
- Etwas formeller bezeichnet das *Landau-Symbol*
  $O(f) = \{h \mid \exists c > 0, \exists n_0 \in N: \forall n > n_0: h(n) \leq cf(n)\}$
  eigentlich eine Klasse von Funktionen.
- Man schreibt zwar manchmal salopp $g = O(f)$, meint jedoch $g \in O(f)$

- Es gibt auch Beschränkung von unten
  $\Omega(f) = \{h \mid \exists c > 0, \text{für unendlich viele } n: h(n) \geq cf(n)\}$
- und "beides"

$$\Theta(f) = \Omega(f) \cap O(f)$$

Beispiel einer Komplexitätsberechnung

- Mergesort, vereinfachende Annahme: $n = 2^d$
  zur Erinnerung:



Beispiel einer Komplexitätsberechnung

- Aufwand für Merge:

$$T(n) = n + 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right), \text{ wenn } n > 1$$

$$T(1) = 1$$

Warum?

- Komplexitätsberechnung Rekursion → Iteration

$$T(2^d) = 2^d + 2 \cdot T(2^{d-1})$$
$$= 2^d + 2 \cdot \left(2^{d-1} + 2\,T(2^{d-2})\right)$$
$$= 2^d + 2 \cdot \left(2^{d-1} + 2 \cdot (2^{d-2} + 2 \cdot T(2^{d-3})\right)$$
$$= 2^0 \cdot 2^d + 2^1 \cdot 2^{d-1} + 2^2 \cdot 2^{d-2} + \cdots + 2^{d-1} \cdot 2 + 2^d T(1)$$
$$= 2^d \cdot d + 2^d = n \log_2 n + n$$
$$= O(n \log n)$$

d Terme

Beispiel einer Komplexitätsberechnung

Wenn man die Formel $n + n \log n$ aufgrund der Problemstruktur schon erraten hat, dann kann man auch *induktiv* beweisen:

- Behauptung
  $n \log n$ ist eine Lösung der Rekursionsgleichung

$$T(n) = \begin{cases} n + 2\,T\left(\frac{n}{2}\right) & \text{falls } n > 1 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \end{cases}$$

- Induktion
  - Anfang: $T(1) = 1 + 1 \log 1 = 1$ klar
  - Schritt: $T(n) = n + 2\,T\left(\frac{n}{2}\right)$
    $= n + 2\left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2}\log\frac{n}{2}\right) = n + n + n(\log n - 1) = n + n \log n$ ✓