

Lernziele

- Sie verstehen, wie eine Lösung eines rekursives Problems in Java umgesetzt werden kann.
- Sie wissen, wie Methoden in einem *Aufrufstapel* abgearbeitet werden.

12. Rekursion

Mathematische Rekursion, Terminierung, der Aufrufstapel, Beispiele, Rekursion vs. Iteration, Lindenmayer Systeme

344

345

Mathematische Rekursion

- Viele mathematische Funktionen sind sehr natürlich *rekursiv* definierbar.
- Das heisst, die Funktion erscheint in ihrer eigenen Definition.

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \leq 1 \\ n \cdot (n - 1)!, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

346

Rekursion in Java: Genauso!

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \leq 1 \\ n \cdot (n - 1)!, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

```
// POST: return value is n!  
public static int fac (int n) {  
    if (n <= 1)  
        return 1;  
    else  
        return n * fac (n-1);  
}
```

347

Unendliche Rekursion

- ist so schlecht wie eine Endlosschleife...
- ...nur noch schlechter ("verbrennt" Zeit **und** Speicher)

```
private static void f() {  
    f(); // f() -> f() -> ... stack overflow  
}
```

Rekursive Funktionen: Terminierung

Wie bei Schleifen brauchen wir

- Fortschritt Richtung Terminierung

fac(n) :
terminiert sofort für $n \leq 1$, andernfalls wird die Funktion rekursiv mit Argument $< n$ aufgerufen.

„n wird mit jedem Aufruf kleiner.“

348

349

Rekursive Funktionen: Auswertung

Beispiel: fac(4)

```
// POST: return value is n!  
public static int fac (int n) {  
    if (n <= 1) return 1;  
    return n * fac(n-1); // n > 1  
}
```

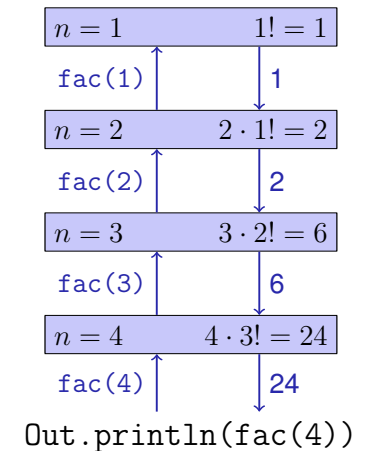
Initialisierung des formalen Arguments: $n = 4$
Rekursiver Aufruf mit Argument $n - 1 == 3$

350

Der Aufrufstapel

Bei jedem Methodenaufruf:

- Wert des Aufrufarguments kommt auf einen Stapel
- Es wird immer mit dem obersten Wert gearbeitet
- Am Ende des Aufrufs wird der oberste Wert wieder vom Stapel gelöscht



351

Euklidischer Algorithmus

- findet den grössten gemeinsamen Teiler $\text{gcd}(a, b)$ zweier natürlicher Zahlen a und b
- basiert auf folgender mathematischen Rekursion:

$$\text{gcd}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{falls } b = 0 \\ \text{gcd}(b, a \bmod b), & \text{andernfalls} \end{cases}$$

352

Euklidischer Algorithmus in Java

$$\text{gcd}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{falls } b = 0 \\ \text{gcd}(b, a \bmod b), & \text{andernfalls} \end{cases}$$

```
public static int gcd (int a, int b) {  
    if (b == 0)  
        return a;  
    else  
        return gcd (b, a % b);  
}
```

Terminierung: $a \bmod b < b$, also wird b in jedem rekursiven Aufruf kleiner.

353

Fibonacci-Zahlen

$$F_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ...

354

Fibonacci-Zahlen in Java

Laufzeit

`fib(50)` dauert „ewig“, denn es berechnet
 F_{48} 2-mal, F_{47} 3-mal, F_{46} 5-mal, F_{45} 8-mal, F_{44} 13-mal,
 F_{43} 21-mal ... F_1 ca. 10^9 mal (!)

```
public static int fib (int n) {  
    if (n == 0) return 0;  
    if (n == 1) return 1;  
    return fib (n-1) + fib (n-2); // n > 1  
}
```

Korrektheit und Terminierung sind klar.

356

Schnelle Fibonacci-Zahlen

Idee:

- Berechne jede Fibonacci-Zahl nur einmal, in der Reihenfolge $F_0, F_1, F_2, \dots, F_n$!
- Merke dir jeweils die zwei letzten berechneten Zahlen (Variablen a und b)!
- Berechne die nächste Zahl als Summe von a und b!

Schnelle Fibonacci-Zahlen in Java

```
public static int fib (int n){
    if (n == 0) return 0;
    if (n <= 2) return 1;
    int a = 1; // F_1
    int b = 1; // F_2
    for (int i = 3; i <= n; ++i){
        int a_old = a; // F_{i-2}
        a = b; // F_{i-1}
        b += a_old; // F_{i-1} += F_{i-2} -> F_i
    }
    return b;
}
```

sehr schnell auch bei fib(50)

$(F_{i-2}, F_{i-1}) \rightarrow (F_{i-1}, F_i)$

357

358

Rekursion und Iteration

Rekursion kann *immer* simuliert werden durch

- Iteration (Schleifen)
- expliziten „Aufrufstapel“ (z.B. Feld).

Oft sind rekursive Formulierungen einfacher, aber manchmal auch weniger effizient.

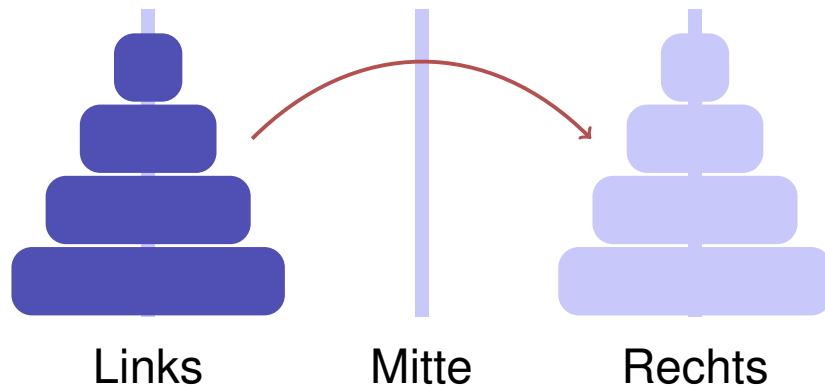
Die Macht der Rekursion

- Einige Probleme scheinen ohne Rekursion kaum lösbar zu sein. Mit Rekursion werden sie plötzlich einfacher lösbar.
- Beispiele: *Die Türme von Hanoi*, das n -Damen-Problem, Parsen von Ausdrücken, Sudoku-Löser, Umgekehrte Aus- oder Eingabe, Suchen in Bäumen, Divide-And-Conquer (z.B. Sortieren) → Informatik II

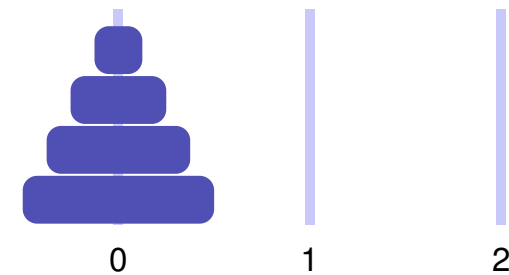
359

360

Experiment: Die Türme von Hanoi



Die Türme von Hanoi - Code



Bewege 4 Scheiben von 0 nach 2 mit Hilfsstapel 1:

```
move(4, 0, 1, 2);
```

361

366

Die Türme von Hanoi - Code

```
move(4, 0, 1, 2);  
==
```

- 1 Bewege 3 Scheiben von 0 nach 1 mit Hilfsstapel 2:
`move(3, 0, 2, 1);`
- 2 Bewege 1 Scheibe von 0 nach 2
`move(1, 0, 1, 2);`
- 3 Bewege 3 Scheiben von 1 nach 2 mit Hilfsstapel 0
`move(3, 1, 0, 2);`

367

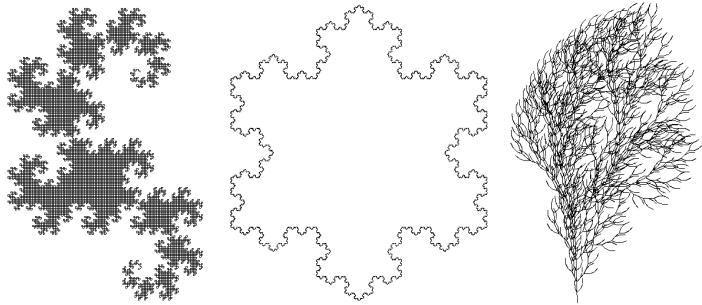
Die Türme von Hanoi - Code

```
public static void move(int n, int source, int aux, int dest){  
    if (n==1){  
        Out.println("move " + source + "-->" + dest);  
    } else {  
        move(n-1, source, dest, aux);  
        move(1, source, aux, dest);  
        move(n-1, aux, source, dest);  
    }  
}
```

368

Lindenmayer-Systeme (L-Systeme)

Fraktale aus Strings und Schildkröten



L-Systeme wurden vom ungarischen Biologen Aristid Lindenmayer (1925–1989) zur Modellierung von Pflanzenwachstum erfunden.

Definition und Beispiel

- Alphabet Σ
- Σ^* : alle endlichen Wörter über Σ
- Produktion $P : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$
- Startwort $s_0 \in \Sigma^*$

	$\{F, +, -\}$
c	$P(c)$
F	F + F +
+	+
-	-
F	

Definition

Das Tripel $\mathcal{L} = (\Sigma, P, s_0)$ ist ein L-System.

Die beschriebene Sprache

Wörter $w_0, w_1, w_2, \dots \in \Sigma^*$:

$$P(F) = F + F +$$

$$w_0 := s_0$$

$$w_0 := F$$

$$w_1 := P(w_0)$$

$$w_1 := F + F +$$

$$w_2 := P(w_1)$$

$$w_2 := F + F + + F + F + +$$

$$P(F)P(+)P(F)P(+)$$

⋮

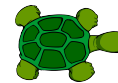
⋮

Definition

$$P(c_1c_2 \dots c_n) := P(c_1)P(c_2) \dots P(c_n)$$

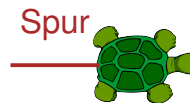
Turtle-Grafik

Schildkröte mit Position und Richtung

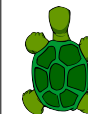


Schildkröte versteht 3 Befehle:

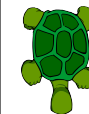
F: Gehe einen Schritt vorwärts ✓



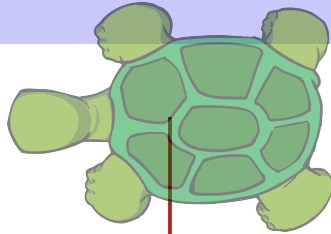
+ : Drehe dich um 90 Grad ✓



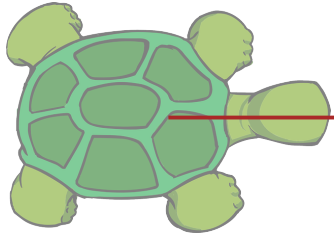
- : Drehe dich um -90 Grad ✓



Wörter zeichnen!



$$w_1 = F + F + \checkmark$$



373

lindenmayer:

Hauptprogramm

Wort $w_0 \in \Sigma^*$:

```
public static void main(String[] args){
    Out.print("Maximal Recursion Depth = ");
    int depth = In.readInt();
    Turtle t = new Turtle();
    produce(t,"F",depth);
    t.show();
}
```

$w = w_0 = F$

374

lindenmayer:

Produktion

```
// POST: recursively iterate over the production of the characters
//       of a word.
//       When recursion limit is reached, the word is "drawn"
static void produce (Turtle turtle, String word, int depth){
    if (depth > 0) {
        for (int k = 0; k < word.length(); ++k){  $w = w_i \rightarrow w = w_{i+1}$ 
            produce(turtle, replace(word.charAt(k)), depth-1);
        }
    } else {
        draw(turtle,word);  $\text{Zeichne } w = w_n!$ 
    }
}
```

375

lindenmayer:

replace

```
// POST: returns the production of c
static String replace (char c){
    switch (c) {
        case 'F':
            return "F+F+";
        default:
            return Character.toString(c); // trivial production  $c \rightarrow c$ 
    }
}
```

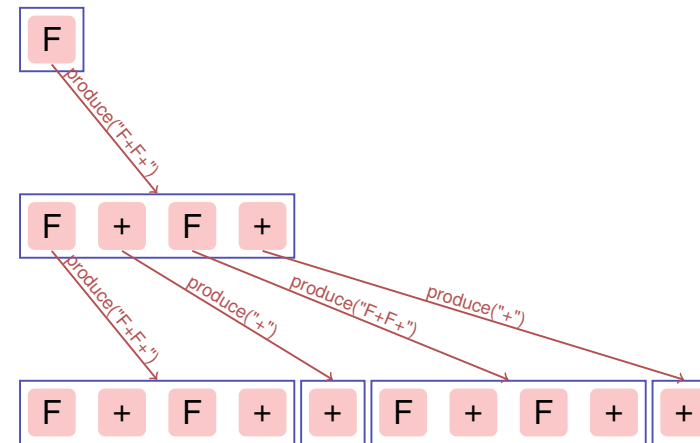
376

lindenmayer:

draw

```
// POST: draws the turtle graphic interpretation of word
static void draw (Turtle turtle, String word) {
  for (int k = 0; k < word.length(); ++k){
    switch (word.charAt(k)) {
      case 'F':
        turtle.forward(1); // move one step forward
        break;
      case '+':
        turtle.left(90); // turn counterclockwise by 90 degrees
        break;
    }
  }
}
```

Die Rekursion

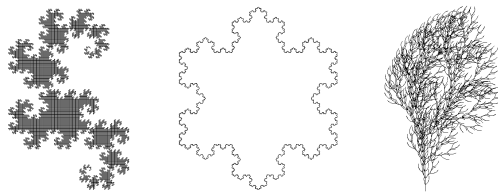


377

378

L-Systeme: Erweiterungen

- Beliebige Symbole ohne grafische Interpretation (dragon)
- Beliebige Drehwinkel (snowflake)
- Sichern und Wiederherstellen des Schildkröten-Zustandes → Pflanzen (bush)



Challenge: Wir freuen uns auf Ihre Beiträge

379