29. Flüsse in Netzen

Flussnetzwerk, Fluss, Maximaler Fluss
Restkapazität, Restnetzwerk, Erweiterungsweg

Ford-Fulkerson Algorithmus, Edmonds-Karp Algorithmus

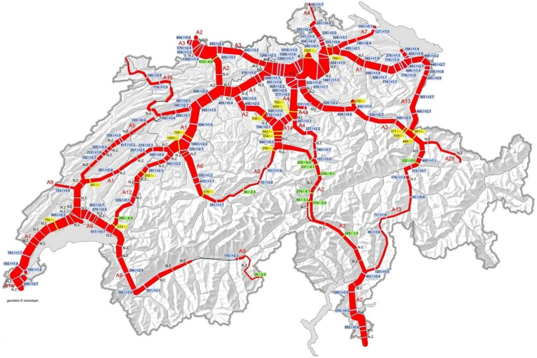
Schnitte, Max-Flow Min-Cut Theorem

[Ottman/Widmayer, Kap. 9.7, 9.8.1], [Cormen et al, Kap. 26.1-26.3]

Folienredesign: Manuela Fischer – vielen Dank!

Maximaler Verkehrsfluss

Gegeben: Strassennetzwerk mit Kapazitäten



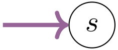
Gesucht: Maximaler Verkehrsfluss zwischen Zürich und Genf

Flussnetzwerk

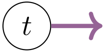
gerichteter, gewichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{R}^{>0}$

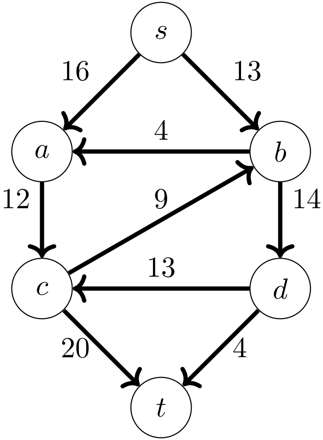
- ohne antiparallele Kanten:
  $(u, v) \in E \;\Rightarrow\; (v, u) \notin E$

- Quelle $s \in V$ ohne eingehende Kanten:
  $\forall v \in V: (v, s) \notin E$



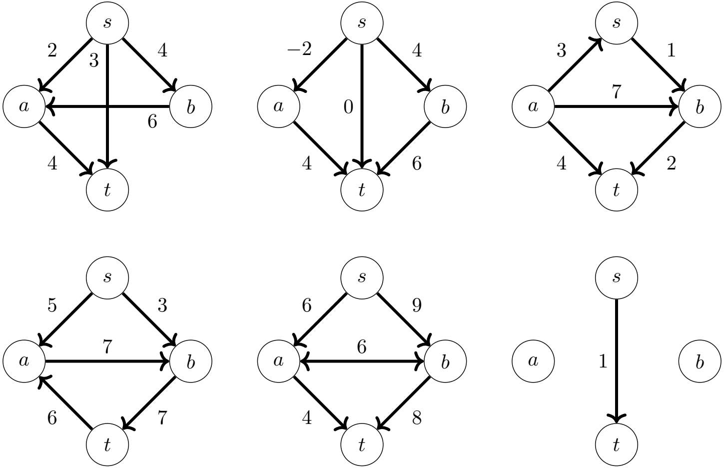
- Senke $t \in V$ ohne ausgehende Kanten:
  $\forall v \in V: (t, v) \notin E$





Quiz Flussnetzwerk

Welche der folgenden Graphen sind Flussnetzwerke?

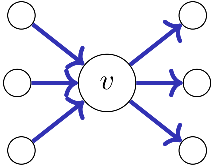


Fluss in Flussnetzwerk

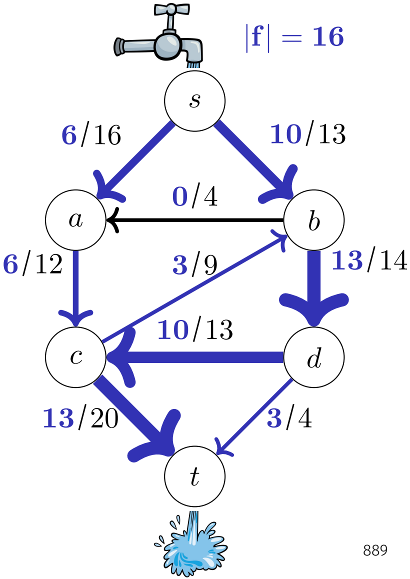
Fluss ist Funktion $f\colon E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ so dass

- **Kapazitätsbeschränkung**:
  $\forall e \in E\colon\ f(e) \leq c(e)$
- **Flusserhaltung**: $\forall v \in V \setminus \{s,t\}\colon$

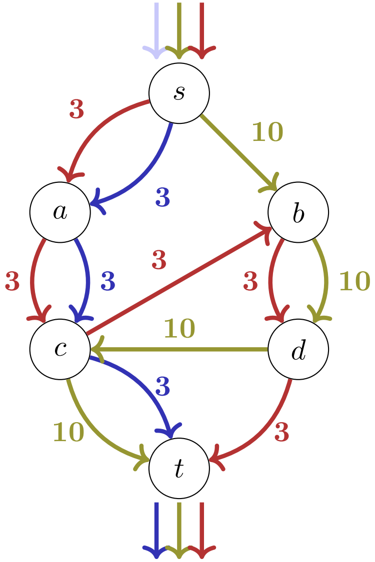
$$\underbrace{\sum_{e\in E^-(v)} f(e)}_{=:f^-(v)} = \underbrace{\sum_{e\in E^+(v)} f(e)}_{=:f^+(v)}$$

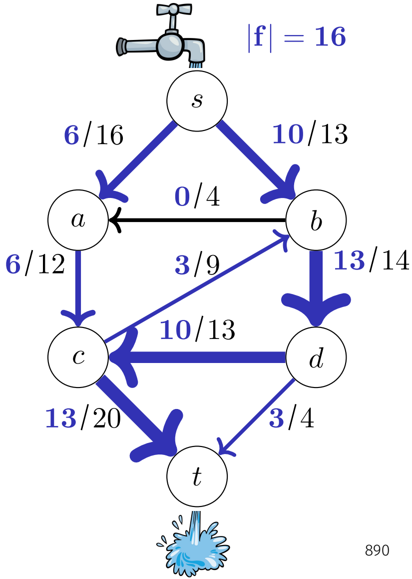


Grösse des Flusses: $|f| := f^+(s) = f^-(t)$



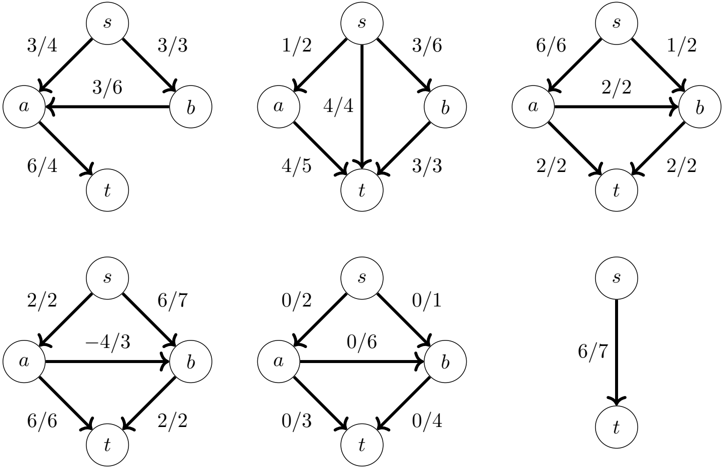
Intuition: Fluss als Menge von Wegen $s \rightsquigarrow t$





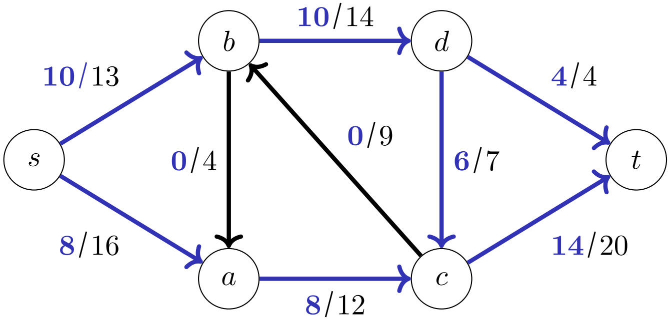
Quiz Fluss

Welches sind Flüsse?



Maximaler Fluss

Gegeben: Flussnetzwerk: $G = (V, E, c)$, gerichtet, positiv gewichtet, ohne antiparallele Kanten, mit Quelle s und Senke t

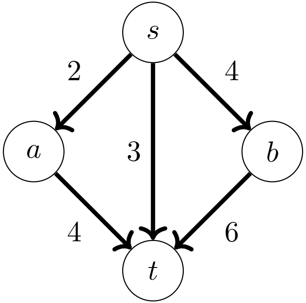


$$\mathbf{18} = |\mathbf{f}| \leq |\mathbf{f}_{\max}| = \mathbf{23}$$

Gesucht: Grösse $|f_{\max}|$ des maximalen Flusses in G

Quiz Maximaler Fluss

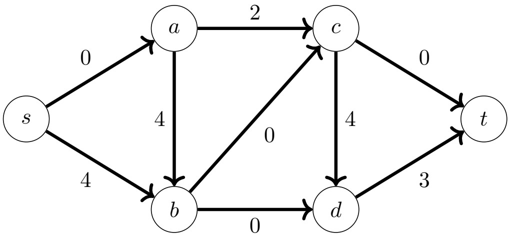
Was ist der maximale Fluss im folgenden Flussnetzwerk?



Greedy Algorithmus?

Restkapazität einer Kante e**:** $r(e) := c(e) - f(e)$
Restkapazität eines Wegs P**:** $\min_{e \in P} r(e)$

Greedy: Startend mit $f(e) = 0$ für alle $e \in E$, solange es Weg $s \rightsquigarrow t$ mit Restkapazität $d > 0$ gibt, Fluss entlang dieses Wegs um d erhöhen.



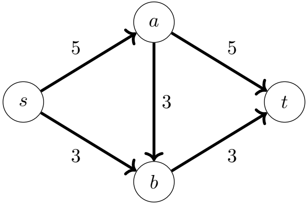
$G_f^+ := (V, E, r := c - f)$

$|f| = 8$

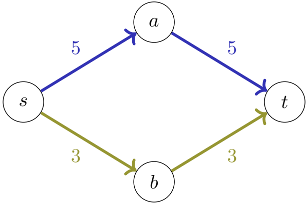
$s \to a \to b \to d \to t$: 3
$s \to a \to c \to t$: 2
$s \to b \to c \to t$: 3

Aber $|f_{\max}| = 10$

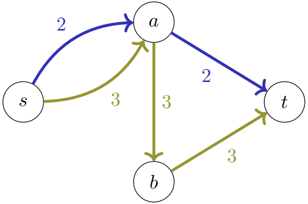
Problem mit Greedy



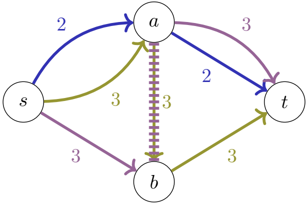
$G = (V, E, c)$



$|f_{\max}| = 8$



Greedy: $|f| = 5$



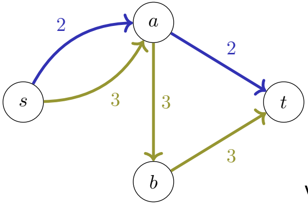
Umleitung

29.1 Fluss-Algorithmen

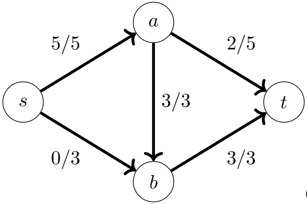
Ford-Fulkerson Algorithmus

Edmonds-Karp Algorithmus

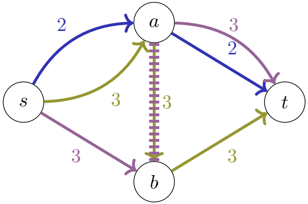
Idee: Umleitung durch Flussverringerung



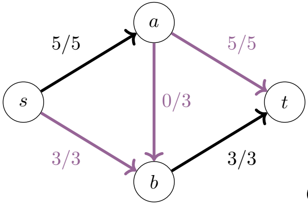
vor Umleitung



$G = (V, E, f/c)$



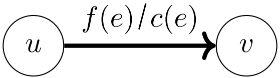
nach Umleitung



$G = (V, E, f'/c)$

$\Rightarrow$ Umleitung entspricht Verringerung des Flusses durch Kante

Idee: Erhöhung und Verringerung



$$G_f^+ := (V, E, r := c - f)$$

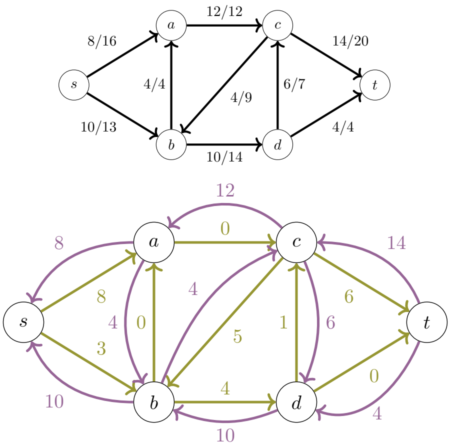
- **Erhöhung:**
  Fluss durch e kann um höchstens $r(e) := c(e) - f(e)$ erhöht werden

$$G_f^- := (V, \overleftarrow{E}, f)$$

- **Verringerung:**
  Fluss durch e kann um höchstens $f(e)$ verringert werden

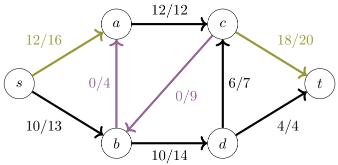
  $\Rightarrow$ Fluss durch $\overleftarrow{e}$ kann um höchstens $f(e)$ erhöht werden

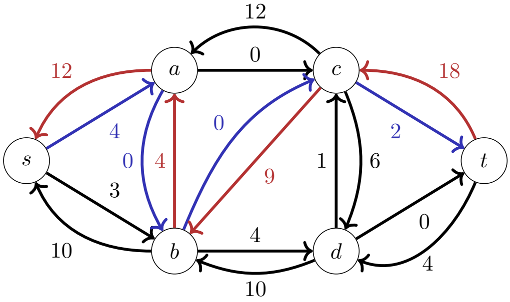
Restnetzwerk



Restnetzwerk: $G_f := \mathbf{G_f^+} \cup \mathbf{G_f^-} = (V, E_f, c_f)$

Ford-Fulkerson: Flusserweiterung im Restnetzwerk





- **Erweiterungsweg:** $\mathbf{P} : \mathbf{s} \rightsquigarrow \mathbf{t}$ in G_f mit Restkapazität $d > 0$ finden
- Fluss entlang dieses Wegs für alle $e \in P$ um d erweitern:
  - Restkapazität $\mathbf{c_f}(\mathbf{e})$ in G_f um d verringern; $\mathbf{c_f}(\overleftarrow{e})$ um d erhöhen
  - Fluss durch $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$ um d erhöhen; durch $\overleftarrow{e} \in \mathbf{E}$ verringern

$\Rightarrow$ totaler Fluss $|f|$ in G erhöht sich um d, da erste (und letzte) Kante $\in \mathbf{E}$

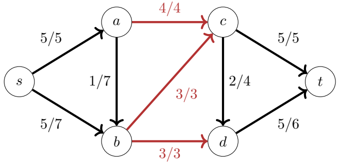
Algorithmus Ford-Fulkerson(G, s, t)

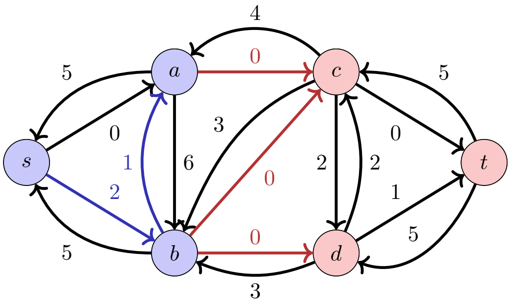
Input: Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$, Quelle s, Senke t
Output: Maximaler Fluss f

for $e \in E$ **do**
    $f(e) \leftarrow 0$

while existiert positiver Weg $P\colon s \rightsquigarrow t$ im Restnetzwerk $G_f = (V, E_f, c_f)$ **do**
    $d \leftarrow \min_{e \in P} c_f(e)$
    foreach $e \in P$ **do**
        if $e \in E$ **then**
            $f(e) \leftarrow f(e) + d$
        else
            $f(\overleftarrow{e}) \leftarrow f(\overleftarrow{e}) - d$

Beispiel Ford-Fulkerson





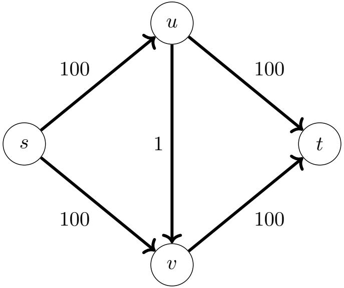
Knoten $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}$ erreichbar von s

Knoten $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{V}$ nicht erreichbar von s

alle ausgehenden Kanten haben Restkapazität 0 in G_f

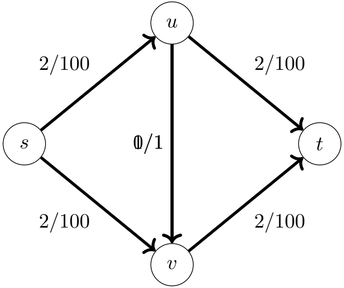
$\Rightarrow$ Fluss schöpft Kapazität auf diesen Kanten voll aus!

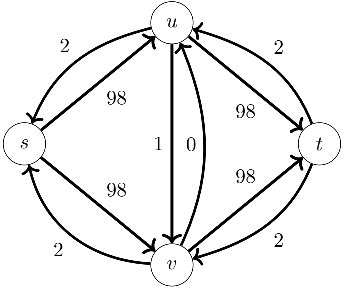
Quiz Ford-Fulkerson



Wie viele Iterationen braucht Ford-Fulkerson im schlimmsten Fall?

Lösung





Nach i Iterationen: $|f| = i$

$\Rightarrow$ insgesamt $|f_{\max}| = 200$ Iterationen

Laufzeit-Analyse von Ford-Fulkerson

Zeit pro Iteration: Suche eines Erweiterungswegs $s \rightsquigarrow t$

$\Rightarrow$ Tiefensuche oder Breitensuche: $\mathcal{O}(|V| + |E|) = \mathcal{O}(|E|)$

($|V| \leq |E|$, da man alle nicht erreichbaren Knoten ignorieren kann.)

Anzahl Iterationen:

In jedem Schritt erhöht sich der Grösse des Flusses $|f|$ um $d > 0$.

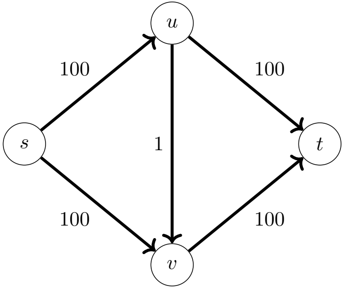
ganzzahlige Kapazitäten $\Rightarrow$ Erhöhung um ≥ 1 $\Rightarrow$ höchstens $|f_{\max}|$ Iterationen

$\Rightarrow \mathcal{O}(|f_{\max}| \cdot |E|)$ für Flussnetzwerke $G = (V, E, c)$ mit $c\colon E \to \mathbb{N}^{\geq 1}$

Edmonds-Karp Algorithmus: (Variante von Ford-Fulkerson)

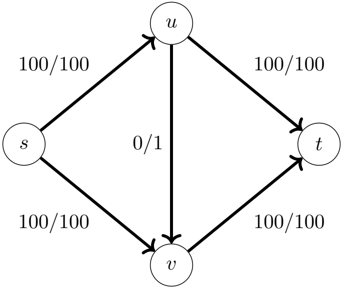
kürzester Erweiterungsweg (Anzahl Kanten) $\Rightarrow \mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$ (ohne Herleitung)

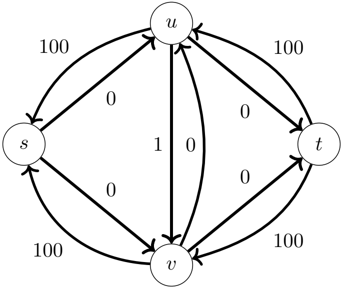
Quiz Edmonds-Karp



Wie viele Iterationen braucht Edmonds-Karp im schlimmsten Fall?

Lösung





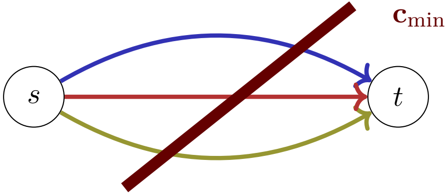
Termination nach 2 Iterationen!

29.2 Max-Flow Min-Cut

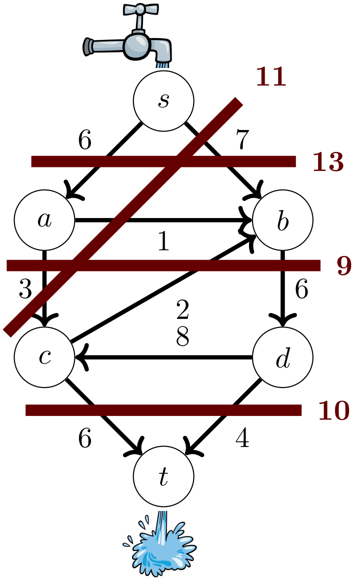
Flüsse und Schnitte: Bottleneck-Intuition

Obere Schranken für Flussgrösse:

- was aus s fliessen kann: $c^+(s)$
- was in t fliessen kann: $c^-(t)$
- was durch beliebigen Schnitt fliessen kann
- was durch Bottleneck fliessen kann: $c_{\min}$



$\Rightarrow$ Fluss $|f| \leq$ Bottleneck
$\Rightarrow$ Maximaler Fluss $\leq$ Bottleneck



Schnitt

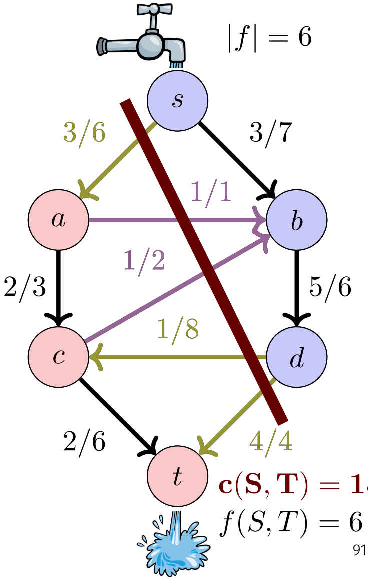
(s,t)**-Schnitt** von Graph $G=(V,E,c)$:
Partition $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ von V so dass $s\in S, t\in T$

Grösse des Schnitts:
$c(S,T) := \sum_{\mathbf{e}:\,\mathbf{S}\to\mathbf{T}} \mathbf{c(e)}$

Fluss durch Schnitt von Flussnetzwerk:
$f(S,T) := \sum_{\mathbf{e}:\,\mathbf{S}\to\mathbf{T}} \mathbf{f(e)} - \sum_{\mathbf{e}:\,\mathbf{T}\to\mathbf{S}} \mathbf{f(e)}$

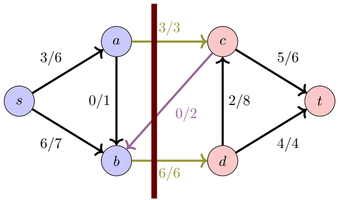
Beobachtung:
$\forall f,S,T\colon |f| = f(S,T) \le c(S,T)$

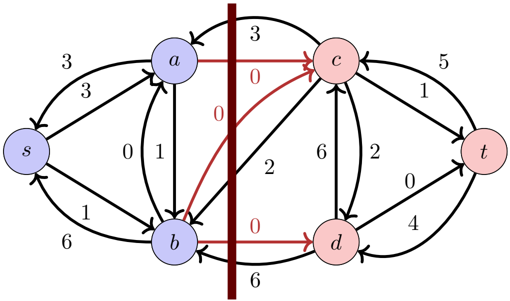
$\Rightarrow |f_{\max}| \le c_{\min}$



$\mathbf{c(S,T) = 18}$
$f(S,T) = 6$

Maximaler Fluss und Minimaler Schnitt





nach Terminierung von Ford-Fulkerson/Edmonds-Karp:

- $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}$ erreichbar von s, $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{V}$ nicht erreichbar von $s \Rightarrow$ **Schnitt** $(\mathbf{S}, \mathbf{T})$
- alle ausgehenden Kanten e haben Restkapazität 0 in G_f
- $f(S, T) = \sum_{\mathbf{e}:\, \mathbf{S} \to \mathbf{T}} \mathbf{f}(\mathbf{e}) - \sum_{\mathbf{e}:\, \mathbf{T} \to \mathbf{S}} \mathbf{f}(\mathbf{e}) = \sum_{\mathbf{e}:\, \mathbf{S} \to \mathbf{T}} \mathbf{c}(\mathbf{e}) = \mathbf{c}(\mathbf{S}, \mathbf{T})$
  $\Rightarrow |f_{\max}| = c_{\min}$

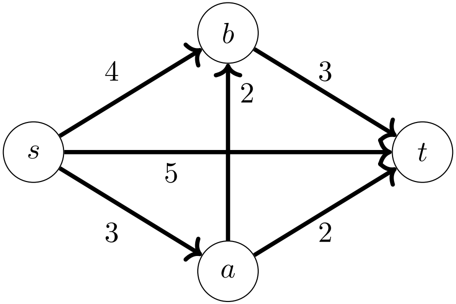
Max-Flow Min-Cut Theorem

Max-Flow Min-Cut Theorem

Für einen Fluss f in einem Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ mit Quelle s und Senke t sind die folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G
2. Das Restnetzwerk G_f enthält keine Erweiterungswege
3. $|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T) von G.

Quiz



Was ist der minimale Schnitt?
Was ist der maximale Fluss?

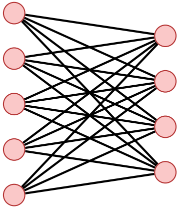
Anwendungsbeispiele

- Maximale Rate:
  - Wasser in Abwassersystem
  - Autos in Verkehr
  - Strom in elektrischen Netwerken
  - Bauteile auf Fliessbändern
  - Information in Kommunikationsnetzwerken
- Scheduling
- Bipartites Matching
- Segmentierung von Bildern

29.4 Maximales Bipartites Matching

Notation

Ein Graph, bei dem V so in disjunkte U und W aufgeteilt werden kann, dass alle $e \in E$ einen Knoten in U und einen in W haben heisst **bipartit**.

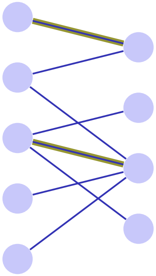


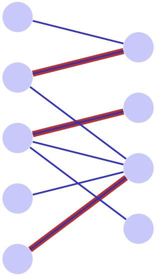
Anwendung: Maximales bipartites Matching

Gegeben: bipartiter ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

Matching M: $M \subseteq E$ so dass $|\{m \in M : v \in m\}| \leq 1$ für alle $v \in V$.

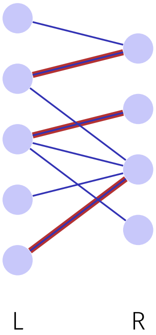
Maximales Matching M: Matching M, so dass $|M| \geq |M'|$ für jedes Matching M'.

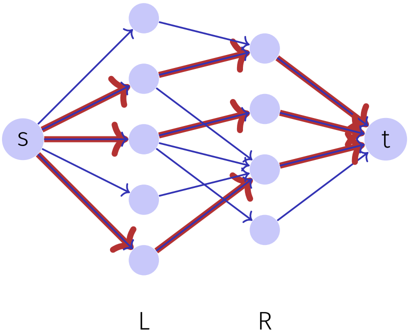




Korrespondierendes Flussnetzwerk

Konstruiere zur einer Partition L, R eines bipartiten Graphen ein korrespondierendes Flussnetzwerk mit Quelle s und Senke t, mit gerichteten Kanten von s nach L, von L nach R und von R nach t. Jede Kante bekommt Kapazität 1.





Zusammenfassung

- Definitionen: Flussnetzwerk, Fluss, Schnitt
- Konzepte: Umleitung, Restnetzwerk, Erweiterungsweg
- Algorithmen
  - Greedy: inkorrekt!
  - Ford-Fulkerson: $\mathcal{O}(|f_{\max}| \cdot |E|)$
    Greedy Erweiterungswege im Restnetzwerk
  - Edmonds-Karp: $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$
    Ford-Fulkerson mit kürzesten Erweiterungswegen (Anzahl Kanten)
- Max Flow = Min Cut

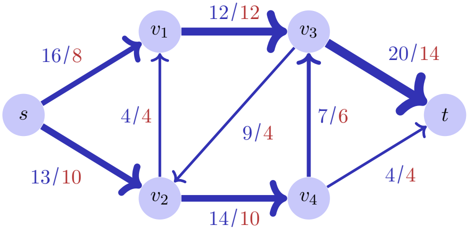
29.5 Anhang: Formales

Fluss: Formulierung mit Schiefsymmetrie

Ein **Fluss** $f : V \times V \to \mathbb{R}$ erfüllt folgende Bedingungen:

- **Kapazitätsbeschränkung**:
  Für alle $u, v \in V$: $f(u,v) \leq c(u,v)$.
- **Schiefsymmetrie**:
  Für alle $u, v \in V$: $f(u,v) = -f(v,u)$.
- **Flusserhaltung**:
  Für alle $u \in V \setminus \{s,t\}$:

$$\sum_{v \in V} f(u,v) = 0.$$



Wert w des Flusses:
$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)$.
Hier $|f| = 18$.

Schnitte

- **Kapazität** eines (s,t)-Schnittes: $c(S,T) = \sum_{v\in S, v'\in T} c(v,v')$
- **Minimaler Schnitt**: Schnitt mit minimaler Kapazität.
- **Fluss über Schnitt**: $f(S,T) = \sum_{v\in S, v'\in T} f(v,v')$

Allgemein Seien $U, U' \subseteq V$

$$f(U,U') := \sum_{\substack{u\in U\\ u'\in U'}} f(u,u'), \qquad f(u,U') := f(\{u\},U')$$

Dann

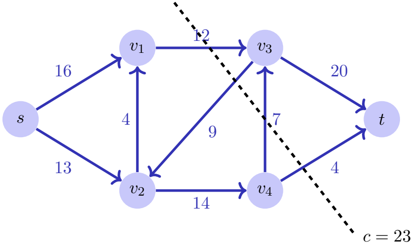
- $|f| = f(s,V)$
- $f(U,U) = 0$
- $f(U,U') = -f(U',U)$
- $f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$, wenn $X \cap Y = \emptyset$.
- $f(R,V) = 0$ wenn $R \cap \{s,t\} = \emptyset$. [Flusserhaltung!]

Wie gross kann ein Fluss sein?

$$f(S,T) = f(S,V) - \underbrace{f(S,S)}_{0} = f(S,V)$$

$$= f(s,V) + f(\underbrace{S - \{s\}}_{\not\ni t, \not\ni s}, V) = |f|.$$

$$\Rightarrow |f| \leq \sum_{v \in S, v' \in T} c(v,v') = c(S,T)$$



Restnetzwerk

Restnetzwerk G_f gegeben durch alle Kanten mit Restkapazität:

$$\begin{aligned} G_f &:= (V, E_f, c_f) \\ c_f(u,v) &:= c(u,v) - f(u,v) \quad \forall u,v \in V \\ E_f &:= \{(u,v) \in V \times V | c_f(u,v) > 0\} \end{aligned}$$

- Flusserhöhung in Richtung einer Kante möglich, wenn Fluss entlang der Kante erhöht werden kann, also wenn $f(u,v) < c(u,v)$. Restkapazität $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v) > 0$.
- Flusserhöhung **entgegen** der Kantenrichtung möglich, wenn Fluss entlang der Kante verringert werden kann, also wenn $f(u,v) > 0$. Restkapazität $c_f(v,u) = f(u,v) > 0$.

Flusserhöhungen liefern Flüsse

Theorem 32

Sei $G = (V, E, c)$ ein Flussnetzwerk mit Quelle s und Senke t und f ein Fluss in G. Sei G_f das dazugehörige Restnetzwerk und sei f' ein Fluss in G_f. Dann definiert $f \oplus f'$ mit

$$(f \oplus f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v)$$

einen Fluss in G mit Wert $|f| + |f'|$.

Beweis

$f \oplus f'$ ist ein Fluss in G:

- Kapazitätsbeschränkung

$$(f \oplus f')(u,v) = f(u,v) + \underbrace{f'(u,v)}_{\leq c(u,v) - f(u,v)} \leq c(u,v)$$

- Schiefsymmetrie

$$(f \oplus f')(u,v) = -f(v,u) + -f'(v,u) = -(f \oplus f')(v,u)$$

- Flusserhaltung $u \in V - \{s,t\}$:

$$\sum_{v \in V} (f \oplus f')(u,v) = \sum_{v \in V} f(u,v) + \sum_{v \in V} f'(u,v) = 0$$

Beweis

Wert von $f \oplus f'$

$$\begin{aligned}
|f \oplus f'| &= (f \oplus f')(s, V) \\
&= \sum_{u \in V} f(s,u) + f'(s,u) \\
&= f(s,V) + f'(s,V) \\
&= |f| + |f'|
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Erweiterungspfade

Erweiterungspfad p: einfacher Pfad von s nach t im Restnetzwerk G_f.
Restkapazität $c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \text{ Kante in } p\}$

Theorem 33

Die Funktion $f_p : V \times V \to \mathbb{R}$,

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \textit{wenn } (u,v) \textit{ Kante in } p \\ -c_f(p) & \textit{wenn } (v,u) \textit{ Kante in } p \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

ist ein Fluss in G_f mit dem Wert $|f_p| = c_f(p) > 0$.

f_p ist ein Fluss (leicht nachprüfbar). Es gibt genau einen Knoten $u \in V$ mit $(s,u) \in p$. Somit $|f_p| = \sum_{v \in V} f_p(s,v) = f_p(s,u) = c_f(p)$.

Max-Flow Min-Cut Theorem

Theorem 34

Wenn f ein Fluss in einem Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ mit Quelle s und Senke t is, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist ein maximaler Fluss in G*
2. *Das Restnetzwerk G_f enthält keine Erweiterungspfade*
3. *Es gilt $|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T) von G.*

Beweis

- $(3) \Rightarrow (1)$:
  Es gilt $|f| \leq c(S,T)$ für alle Schnitte S,T. Aus $|f| = c(S,T)$ folgt also $|f|$ maximal.
- $(1) \Rightarrow (2)$:
  f maximaler Fluss in G. Annahme: G_f habe einen Erweiterungsfad.
  Dann gilt $|f \oplus f_p| = |f| + |f_p| > |f|$. Widerspruch.

Beweis $(2) \Rightarrow (3)$

Annahme: G_f habe keinen Erweiterungsfad
Definiere $S = \{v \in V : \text{ es existiert Pfad } s \rightsquigarrow v \text{ in } G_f\}$.
$(S,T) := (S, V \setminus S)$ ist ein Schnitt: $s \in S, t \in T$.
Sei $u \in S$ und $v \in T$. Dann $c_f(u,v) = 0$, also $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v) = 0$.
Somit $f(u,v) = c(u,v)$.
Somit

$$|f| = f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v) = C(S,T).$$

$\blacksquare$

Edmonds-Karp Algorithmus

Theorem 35

Wenn der Edmonds-Karp Algorithmus auf ein ganzzahliges Flussnetzwerk $G = (V, E)$ mit Quelle s und Senke t angewendet wird, dann ist die Gesamtanzahl der durch den Algorithmus angewendete Flusserhöhungen in $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.

$\Rightarrow$ *Gesamte asymptotische Laufzeit:* $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$

[Ohne Beweis]

Edmonds-Karp Algorithmus

Theorem 36

Wenn der Edmonds-Karp Algorithmus auf Flussnetzwerk $G = (V, E)$ mit Quelle s und Senke t angewendet wird, dann wächst für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ die Distanz $\delta_f(s, v)$ des kürzesten Pfades von s nach v im Restnetzwerk G_f monoton mit jeder Flusserhöhung.

Beweis

Annahme: Distanz $\delta_f(s,v)$ wird bei Flusserhöhung $f \to f'$ kleiner für ein v: $\delta_f(s,v) < \delta_{f'}(s,v)$
Sei $p = s \rightsquigarrow u \to v$ kürzester Pfad von s nach v in $G_{f'}$, so dass $(u,v) \in E_{f'}$ und $\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) - 1$. Es gilt $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$.
Wenn $(u,v) \in E_f$: $\delta_f s,v \leq \delta_f(s,u) + 1 \leq \delta_{f'}(s,u) + 1 = \delta_{f'}(s,v)$ Widerspruch.
Also $(u,v) \notin E_f$.

Ganzzahligkeitstheorem

Theorem 37

Wenn die Kapazitäten eines Flussnetzwerks nur ganzzahlige Werte anehmen, dann hat der durch Ford-Fulkerson erzeugte maximale Fluss die Eigenschaft, dass der Wert von $f(u,v)$ für alle $u,v \in V$ eine ganze Zahl ist.

[ohne Beweis]

Folgerung: Ford Fulkerson erzeugt beim zum bipartiten Graph gehörenden Flussnetzwerk ein maximales Matching $M = \{(u,v) : f(u,v) = 1\}$.