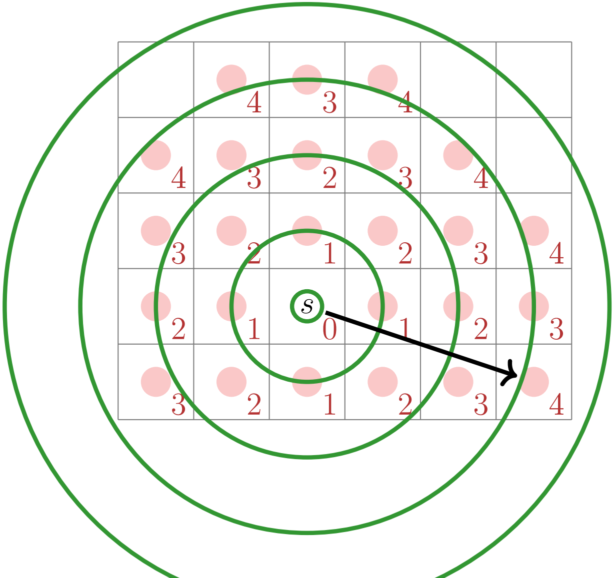
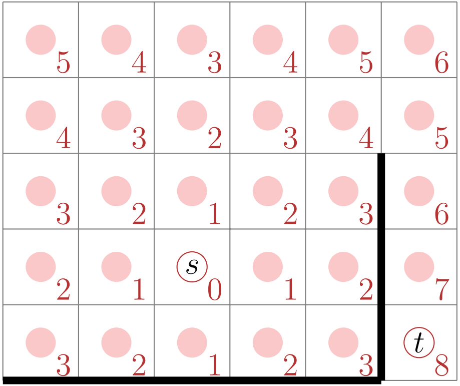
26.5 A*-Algorithmus

Motivation A*



- Algorithmus von Dijkstra sucht die kürzesten Wege zu allen Knoten, in alle Richtungen

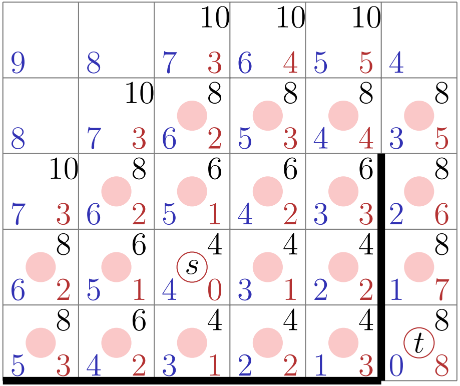
Motivation A*



- Algorithmus von Dijkstra sucht die kürzesten Wege zu allen Knoten, in alle Richtungen
- was richtig ist, da die Stuktur des Graphen dem Algorithmus nicht bekannt ist

A* in Action

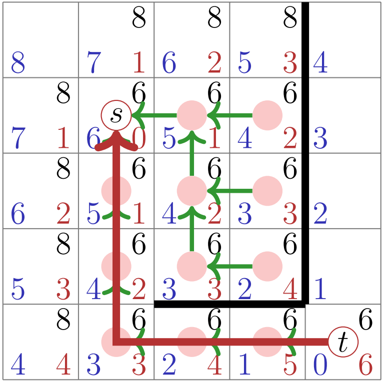
$\hat{f}(u) = d_s[u] + \hat{h}(u)$ $\quad$ ($\hat{h} = \delta_x + \delta_y$ Manhattan-Distanz)



- Idee: führe den Algorithmus in eine bevorzugte Richtung mit Hilfe einer Abstandsheuristik $\hat{h}$
- Der Wert dieser Heuristik muss den wahren Abstand zu t unterschätzen und wird zum gefundenen Abstand d_s zu s addiert.

Weg zurückverfolgen

$\hat{f}(u) = d_s[u] + \hat{h}(u) \qquad (\hat{h} = \delta_x + \delta_y)$



- Der Algorithmus funktioniert genauso wie der Dijkstra-Algorithmus.
- Anstelle des Wertes von d_s tritt für das Suchen des nächsten Elements in R der Wert von $\hat{f} = \hat{h} + d_s$

A*-Algorithmus

Voraussetzungen

- Positiv gewichteter, endlicher Graph $G = (V, E, c)$
- $s \in V$, $t \in V$
- Abstandsschätzung $\widehat{h}_t(v) \leq h_t(v) := \delta(v, t) \; \forall \, v \in V$.
- Gesucht: kürzester Pfad $p : s \rightsquigarrow t$

A*-Algorithmus$(G, s, t, \hat{h})$

Input: Positiv gewichteter Graph $G = (V, E, c)$, Startpunkt $s \in V$, Endpunkt $t \in V$, Schätzung $\widehat{h}(v) \leq \delta(v, t)$
Output: Existenz und Wert eines kürzesten Pfades von s nach t

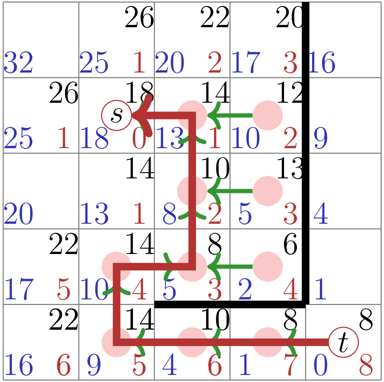
foreach $u \in V$ **do**
  $d[u] \leftarrow \infty$; $\widehat{f}[u] \leftarrow \infty$; $\pi[u] \leftarrow$ null

$d[s] \leftarrow 0$; $\widehat{f}[s] \leftarrow \widehat{h}(s)$; $N \leftarrow \{s\}$; $K \leftarrow \{\}$
while $N \neq \emptyset$ **do**
  $u \leftarrow$ ExtractMin$_{\widehat{f}}(N)$; $K \leftarrow K \cup \{u\}$
  if $u = t$ **then return** success
  foreach $v \in N^+(u)$ with $d[v] > d[u] + c(u, v)$ **do**
    $d[v] \leftarrow d[u] + c(u, v)$; $\widehat{f}[v] \leftarrow d[v] + \widehat{h}(v)$; $\pi[v] \leftarrow u$
    $N \leftarrow N \cup \{v\}$; $K \leftarrow K - \{v\}$

return failure

Was, wenn $\hat{h}$ nicht unterschätzt

$\hat{f}(u) = d_s[u] + \hat{h}(u) \qquad (\hat{h} = \delta_x^2 + \delta_y^2)$



- Algorithmus kann mit dem falschen Resultat terminieren, wenn $\hat{h}$ die Distanz zu t nicht unterschätzt.
- obwohl die Heuristik ansonsten vernünftig aussieht (sie ist z.B. monoton)

Erneutes Besuchen von Knoten

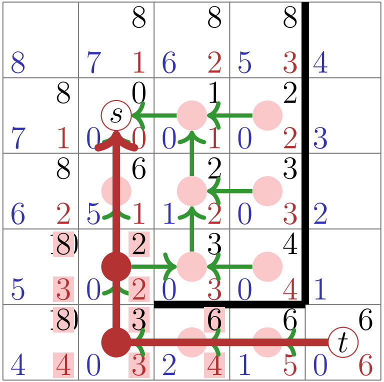
- Der A*-Algorithmus kann Knoten mehrfach aus der Menge R entnehmen und sie später wieder einfügen.
- Das kann zu suboptimalem Verhalten im Sinne der Laufzeit des Algorithmus führen.
- Wenn $\widehat{h}$ zusätzlich zur Zulässigkeit ($\widehat{h}(v) \leq h(v)$ für alle $v \in V$) auch noch monoton ist, d.h. wenn für alle $(u, u') \in E$:

$$\widehat{h}(u') \leq \widehat{h}(u) + c(u', u)$$

  dann ist der A* Algorithmus äquivalent zum Dijkstra-Algorithmus mit Kantengewichten $\tilde{c}(u, v) = c(u, v) + \widehat{h}(u) - \widehat{h}(v)$ und kein Knoten wird aus R entnommen und wieder eingefügt.
- Es ist allerdings nicht immer möglich, eine monotone Heuristik zu finden.

Ein verrücktes $\hat{h}$

$$\hat{f}(u) = d_s[u] + \hat{h}(u)$$



- Algorithmus terminert mit dem korrekten Resultat, auch wenn die Abstandsheuristik nicht monoton ist
- Dann kann es kann vorkommen, dass Knoten mehrfach aus R entnommen und wieder eingefügt werden.

Zusammenfassung

- Der A*-Algorithmus ist eine Erweiterung des Dijkstra-Algorithmus um eine Abstandsheuristik $\hat{h}$.
- A* = Dijkstra wenn $\hat{h} \equiv 0$.
- Wenn $\hat{h}$ den Abstand unterschätzt, funktioniert der Algorithmus korrekt.
- Wenn $\hat{h}$ ausserdem monoton ist, dann ist der Algorithmus auch effizient.
- In der Praxis (z.B. Routing) ist die Wahl von $\hat{h}$ oft intuitiv klar und führt zu deutlich verbessertem Verhalten im Vergleich zu Dijkstra.

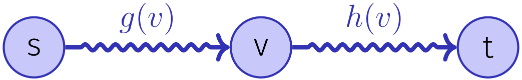
26.6 A*-Algorithmus

Beweis der Korrektheit Nicht prüfungsrelevant

Notation

Sei $f(v)$ die Distanz eines kürzesten Weges von s nach t über v, also

$$f(v) := \underbrace{\delta(s,v)}_{g(v)} + \underbrace{\delta(v,t)}_{h(v)}$$



Sei p ein kürzester Weg von s nach t.

Dann gilt $f(s) = \delta(s,t)$ und $f(v) = f(s)$ für alle $v \in p$.

Sei $\widehat{g}(v) := d[v]$ die Schätzung von $g(v)$ in obigem Algorithms. Es gilt, dass $\hat{g}(v) \geq g(v)$.

$\widehat{h}(v)$ ist eine Schätzung von $h(v)$ mit $\widehat{h}(v) \leq h(v)$.

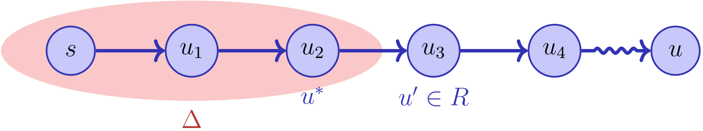
Warum der Algorithmus funktioniert

Lemma 24

Sei $u \in V$ und, zu einem Zeitpunkt des A-Algorithmus, $u \notin M$. Sei p ein kürzester Pfad von s nach u. Dann existiert ein $u' \in p$ mit $\widehat{g}(u') = g(u')$ und $u' \in R$.*

Das Lemma besagt, dass es immer einen Knoten in der offenen Menge R gibt, dessen wahre Entfernung von s schon berechnet wurde und der zum kürzesten Pfad gehört (sofern ein solcher existiert).

Illustration und Beweis



Beweis: Wenn $s \in R$, dann $\widehat{g}(s) = g(s) = 0$. Sei also $s \notin R$.
Sei $p = \langle s = u_0, u_1, \ldots, u_k = u \rangle$ und $\Delta = \{u_i \in p, u_i \in M, \widehat{g}(u_i) = g(u_i)\}$.
$\Delta \neq \emptyset$, denn $s \in \Delta$.
Sei $m = \max\{i : u_i \in \Delta\}$, $u^* = u_m$. Dann $u^* \neq u$, da $u \notin M$. Sei $u' = u_{m+1}$.

1. $\widehat{g}(u') \leq \widehat{g}(u^*) + c(u^*, u')$ weil u' schon relaxiert wurde
2. $\widehat{g}(u^*) = g(u^*)$ (da $u^* \in \Delta$)
3. $\hat{g}(u') \geq g(u')$ (Konstruktion von $\hat{g}$)
4. $g(u') = g(u^*) + c(u^*, u')$ (da p optimal)

Also: $\widehat{g}(u') = g(u')$ und somit auch $u' \in R$ da $u' \notin \Delta$. ∎

Folgerung

Corollary 25

Wenn $\widehat{h}(u) \leq h(u)$ für alle $u \in V$ und A- Algorithmus hat noch nicht terminiert. Dann existiert für jeden kürzesten Pfad p von s nach t ein Knoten $u' \in p$ mit $\hat{f}(u') \leq \delta(s,t) = f(t)$.*

Wenn es einen kürzesten Weg p von s nach t gibt, steht also stets ein Knoten in der offenen Menge bereit, der die Gesamtentfernung maximal unterschätzt und der auf dem kürzesten Weg liegt.

Beweis des Corollars

Beweis:
Nach Lemma $\exists u' \in p$ mit $\widehat{g}(u') = g(u')$.
Also:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(u') &= \widehat{g}(u') + \widehat{h}(u') \\ &= g(u') + \widehat{h}(u') \\ &\leq g(u') + h(u') = f(u')\end{aligned}$$

Da p optimal: $f(u') = \delta(s, t)$. ■

Zulässigkeit

Theorem 26

Wenn es einen kürzesten Weg von s nach t gibt und $\hat{h}(u) \leq h(u) \, \forall \, u \in V$, dann terminiert der A-Algorithmus mit $\hat{g}(t) = \delta(s,t)$*

Beweis: Wenn der Algorithmus terminiert, dann terminiert er in t mit $f(t) = \widehat{g}(t) + 0 = g(t)$. Denn $\widehat{g}$ überschätzt g höchstens und nach obigem Korrolar findet der Algorithmus stets ein Element $v \in R$ mit $f(v) \leq \delta(s,t)$.

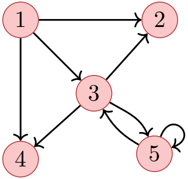
Der Algorithmus terminiert in endlichen vielen Schritten. Für endliche Graphen ist die maximale Anzahl an Relaxierschritten beschränkt.[43] ■

[43] Für einen δ-Graphen ist die maximale Anzahl an Relaxierschritten bevor R nur noch Knoten mit $\hat{f}(s) > \delta(s,t)$ enthält, auch beschränkt. Das genaue Argument findet sich im Originalartikel Hart, P. E.; Nilsson, N. J.; Raphael, B. (1968). "A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths".

27. Transitive Hülle, alle kürzesten Wege

Reflexive transitive Hülle [Ottman/Widmayer, Kap. 9.2 Cormen et al, Kap. 25.2] Algorithmus von Floyd-Warshall [Ottman/Widmayer, Kap. 9.5.3 Cormen et al, Kap. 25.2]

Adjazenzmatrizen multipliziert



$$B := A_G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Interpretation

Theorem 27

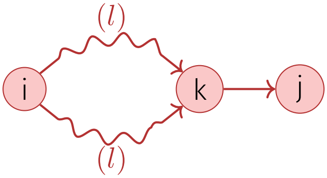
Sei $G = (V, E)$ *ein Graph und* $k \in \mathbb{N}$. *Dann gibt das Element* $a_{i,j}^{(k)}$ *der Matrix* $(a_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n} = (A_G)^k$ *die Anzahl der Wege mit Länge* k *von* v_i *nach* v_j *an.*

[Beweis]

Per Induktion.

Anfang: Klar für $k = 1$. $a_{i,j} = a_{i,j}^{(1)}$.
Hypothese: Aussage wahr für alle $k \leq l$
Schritt ($l \to l+1$):

$$a_{i,j}^{(l+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(l)} \cdot a_{k,j}$$



$a_{k,j} = 1$ g.d.w. Kante von k nach j, 0 sonst. Summe zählt die Anzahl Wege der Länge l vom Knoten v_i zu allen Knoten v_k welche direkte Verbindung zu Knoten v_j haben, also alle Wege der Länge $l+1$.

Relation

Gegeben: endliche Menge V

(Binäre) **Relation** R auf V: Teilmenge des kartesischen Produkts
$V \times V = \{(a,b) | a \in V, b \in V\}$

Relation $R \subseteq V \times V$ heisst

- **reflexiv**, wenn $(v,v) \in R$ für alle $v \in V$
- **symmetrisch**, wenn $(v,w) \in R \Rightarrow (w,v) \in R$
- **transitiv**, wenn $(v,x) \in R$, $(x,w) \in R \Rightarrow (v,w) \in R$

Die **(Reflexive) Transitive Hülle** R^* von R ist die kleinste Erweiterung $R \subseteq R^* \subseteq V \times V$ von R, so dass R^* reflexiv und transitiv ist.

Graphen und Relationen

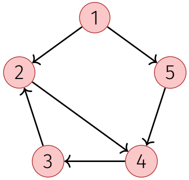
Graph $G = (V, E)$
Adjazenzen $A_G \mathrel{\widehat{=}}$ Relation $E \subseteq V \times V$ auf V

- **reflexiv** $\Leftrightarrow a_{i,i} = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$. (Schleifen)
- **symmetrisch** $\Leftrightarrow a_{i,j} = a_{j,i}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ (ungerichtet)
- **transitiv** $\Leftrightarrow (u, v) \in E$, $(v, w) \in E \Rightarrow (u, w) \in E$. (Erreichbarkeit)

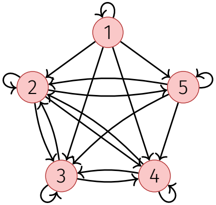
Reflexive Transitive Hülle

Reflexive transitive Hülle von G $\Leftrightarrow$ **Erreichbarkeitsrelation** E^*:
$(v, w) \in E^*$ gdw. $\exists$ Weg von Knoten v zu w.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$G = (V, E)$



$G^* = (V, E^*)$

Algorithmus $A \cdot A$

Input: (Adjazenz-)Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n}$
Output: Matrixprodukt $B = (b_{ij})_{i,j=1\dots n} = A \cdot A$

```
B ← 0
for r ← 1 to n do
    for c ← 1 to n do
        for k ← 1 to n do
            b_rc ← b_rc + a_rk · a_kc          // Anzahl Pfade
return B
```

Berechnet Anzahl Pfade der Länge 2

Algorithmus $A \otimes A$

Input: Adjazenzmatrix $A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots n}$
Output: Modifiziertes Matrixprodukt $B = (b_{ij})_{i,j=1\ldots n} = A \otimes A$

```
B ← A                                              // Pfade erhalten
for r ← 1 to n do
    for c ← 1 to n do
        for k ← 1 to n do
            b_rc ← max{b_rc, a_rk · a_kc}           // Pfad: ja/nein
return B
```

Berechnet Existenz von Pfaden der Längen 1 und 2

Berechnung Reflexive Transitive Hülle

Ziel: Berechnung von $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ mit $b_{ij} = 1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E^*$ Erste Idee:

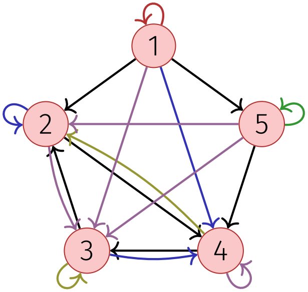
- Starte mit $B \leftarrow A$ und setze $b_{ii} = 1$ für alle i (Reflexivität).
- Berechne

$$B_n = \bigotimes_{i=1}^{n} B$$

mit Potenzen von 2 $B_2 := B \otimes B$, $B_4 := B_2 \otimes B_2$, $B_8 = B_4 \otimes B_4$ ...
$\Rightarrow$ Laufzeit $n^3 \lceil \log_2 n \rceil$

Verbesserung: Algorithmus von Warshall (1962)

Induktiver Ansatz: Alle Wege bekannt über Knoten aus $\{v_i : i < k\}$.
Hinzunahme des Knotens v_k.



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Algorithmus TransitiveClosure(A_G)

Input: Adjazenzmatrix $A_G = (a_{ij})_{i,j=1\dots n}$
Output: Reflexive Transitive Hülle $B = (b_{ij})_{i,j=1\dots n}$ von G

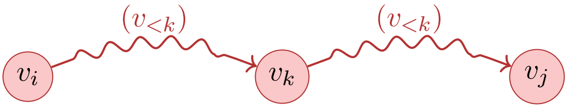
```
B ← A_G
for k ← 1 to n do
    b_kk ← 1                                   // Reflexivität
    for r ← 1 to n do
        for c ← 1 to n do
            b_rc ← max{b_rc, b_rk · b_kc}      // Alle Wege über v_k
return B
```

Laufzeit des Algorithmus $\Theta(n^3)$.

Korrektheit des Algorithmus (Induktion)

Invariante (k): alle Wege über Knoten mit maximalem Index $< k$ berücksichtigt

- **Anfang ($k = 1$)**: Alle direkten Wege (alle Kanten) in A_G berücksichtigt.
- **Hypothese**: Invariante (k) erfüllt.
- **Schritt** ($k \to k+1$): Für jeden Weg von v_i nach v_j über Knoten mit maximalen Index k: nach Hypothese $b_{ik} = 1$ und $b_{kj} = 1$. Somit im k-ten Schleifendurchlauf: $b_{ij} \leftarrow 1$.



Alle kürzesten Pfade

Ziel: Berechne das Gewicht eines kürzesten Pfades für jedes Knotenpaar.

- $|V|\times$ Anwendung von Dijkstras ShortestPath: $\mathcal{O}(|V| \cdot (|E| + |V|) \cdot \log |V|)$
  (Mit Fibonacci-Heap:: $\mathcal{O}(|V|^2 \log |V| + |V| \cdot |E|)$)
- $|V|\times$ Anwendung von Bellman-Ford: $\mathcal{O}(|E| \cdot |V|^2)$
- Es geht besser!

Induktion über Knotennummer.

Betrachte die Gewichte aller kürzesten Wege S^k mit Zwischenknoten in[44] $V^k := \{v_1, \dots, v_k\}$, wenn Gewichte zu allen kürzesten Wegen S^{k-1} mit Zwischenknoten in V^{k-1} gegeben sind.

- v_k kein Zwischenknoten eines kürzesten Pfades von $v_i \rightsquigarrow v_j$ in V^k: Gewicht eines kürzesten Pfades $v_i \rightsquigarrow v_j$ in S^{k-1} dann auch das Gewicht eines kürzesten Pfades in S^k.
- v_k Zwischenknoten eines kürzesten Pfades $v_i \rightsquigarrow v_j$ in V^k: Teilpfade $v_i \rightsquigarrow v_k$ und $v_k \rightsquigarrow v_j$ enthalten nur Zwischenknoten aus S^{k-1}.

[44] wie beim Algorithmus für die reflexive transitive Hülle von Warshall

Induktion über Knotennummer.

$d^k(u, v)$ = Minimales Gewicht eines Pfades $u \rightsquigarrow v$ mit Zwischenknoten aus V^k

Induktion

$$
\begin{aligned}
d^k(u, v) &= \min\{d^{k-1}(u, v), d^{k-1}(u, k) + d^{k-1}(k, v)\}(k \geq 1) \\
d^0(u, v) &= c(u, v)
\end{aligned}
$$

Algorithmus Floyd-Warshall(G)

Input: Graph $G = (V, E, c)$ ohne Tyklen mit negativem Gewicht.
Output: Minimale Gewichte aller Pfade d

$d^0 \leftarrow c$
for $k \leftarrow 1$ **to** $|V|$ **do**
    for $i \leftarrow 1$ **to** $|V|$ **do**
        for $j \leftarrow 1$ **to** $|V|$ **do**
            $d^k(v_i, v_j) = \min\{d^{k-1}(v_i, v_j), d^{k-1}(v_i, v_k) + d^{k-1}(v_k, v_j)\}$

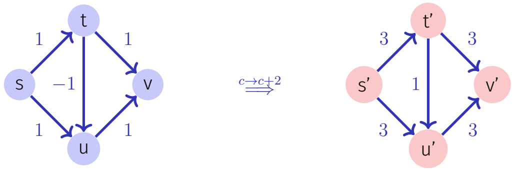
Laufzeit: $\Theta(|V|^3)$

Bemerkung: Der Algorithmus kann auf einer einzigen Matrix d (in place) ausgeführt werden.

Umgewichtung

Idee: Anwendung von Dijkstras Algorithmus auf Graphen mit negativen Gewichten durch Umgewichtung

Das folgende geht **nicht**. Die Graphen sind nicht äquivalent im Sinne der kürzesten Pfade.



Umgewichtung

Andere Idee: “Potentialfunktion” (Höhe) auf den Knoten

- $G = (V, E, c)$ ein gewichteter Graph.
- Funktion $h : V \to \mathbb{R}$
- Neue Gewichte

$$\tilde{c}(u, v) = c(u, v) + h(u) - h(v), \; (u, v \in V)$$

Umgewichtung

Beobachtung: Ein Pfad p ist genau dann kürzester Pfad in $G = (V, E, c)$, wenn er in $\tilde{G} = (V, E, \tilde{c})$ kürzester Pfad ist.

$$\begin{aligned}\tilde{c}(p) &= \sum_{i=1}^{k} \tilde{c}(v_{i-1}, v_i) = \sum_{i=1}^{k} c(v_{i-1}, v_i) + h(v_{i-1}) - h(v_i) \\ &= h(v_0) - h(v_k) + \sum_{i=1}^{k} c(v_{i-1}, v_i) = c(p) + h(v_0) - h(v_k)\end{aligned}$$

Also $\tilde{c}(p)$ minimal unter allen $v_0 \rightsquigarrow v_k \iff c(p)$ minimal unter allen $v_0 \rightsquigarrow v_k$.

Zyklengewichte sind invariant: $\tilde{c}(v_0, \ldots, v_k = v_0) = c(v_0, \ldots, v_k = v_0)$

Johnsons Algorithmus

Hinzunahme eines neuen Knotens $s \notin V$:

$$
\begin{aligned}
G' &= (V', E', c') \\
V' &= V \cup \{s\} \\
E' &= E \cup \{(s, v) : v \in V\} \\
c'(u, v) &= c(u, v),\ u \neq s \\
c'(s, v) &= 0 (v \in V)
\end{aligned}
$$

Johnsons Algorithmus

Falls keine negativen Zyklen: wähle für Höhenfunktion Gewicht der kürzesten Pfade von s,

$$h(v) = d(s, v).$$

Für minimales Gewicht d eines Pfades gilt generell folgende Dreiecksungleichung:

$$d(s, v) \leq d(s, u) + c(u, v).$$

Einsetzen ergibt $h(v) \leq h(u) + c(u, v)$. Damit

$$\tilde{c}(u, v) = c(u, v) + h(u) - h(v) \geq 0.$$

Algorithmus Johnson(G)

Input: Gewichteter Graph $G = (V, E, c)$
Output: Minimale Gewichte aller Pfade D.

Neuer Knoten s. Berechne $G' = (V', E', c')$
if BellmanFord(G', s) $=$ false **then** return "graph has negative cycles"
foreach $v \in V'$ **do**
  $h(v) \leftarrow d(s, v)$ // d aus BellmanFord Algorithmus

foreach $(u, v) \in E'$ **do**
  $\tilde{c}(u, v) \leftarrow c(u, v) + h(u) - h(v)$

foreach $u \in V$ **do**
  $\tilde{d}(u, \cdot) \leftarrow$ Dijkstra($\tilde{G}', u$)
  foreach $v \in V$ **do**
    $D(u, v) \leftarrow \tilde{d}(u, v) + h(v) - h(u)$

Analyse

Laufzeiten

- Berechnung von G': $\mathcal{O}(|V|)$
- Bellman Ford G': $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$
- $|V|\times$ Dijkstra $\mathcal{O}(|V| \cdot |E| \cdot \log |V|)$
  (Mit Fibonacci-Heap:: $\mathcal{O}(|V|^2 \log |V| + |V| \cdot |E|)$)

Insgesamt $\mathcal{O}(|V| \cdot |E| \cdot \log |V|)$
$(\mathcal{O}(|V|^2 \log |V| + |V| \cdot |E|))$