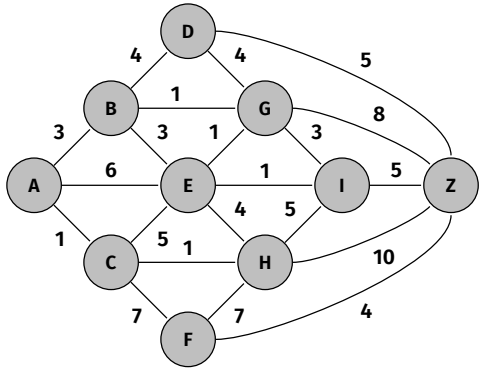
26. Kürzeste Wege

Motivation, Universeller Algorithmus, Dijkstras Algorithmus auf Distanzgraphen, Algorithmus von Bellman-Ford, Algorithmus von Floyd-Warshall, Johnson Algorithmus

[Ottman/Widmayer, Kap. 9.5 Cormen et al, Kap. 24.1-24.3, 25.2-25.3]

Routenfinder

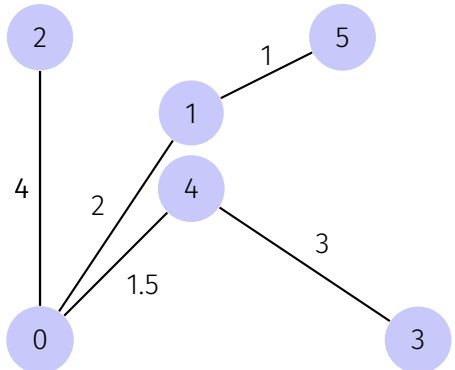
Gegeben: Städte A - Z und Distanzen zwischen den Städten



Gesucht: Was ist der kürzeste Weg von A nach Z?

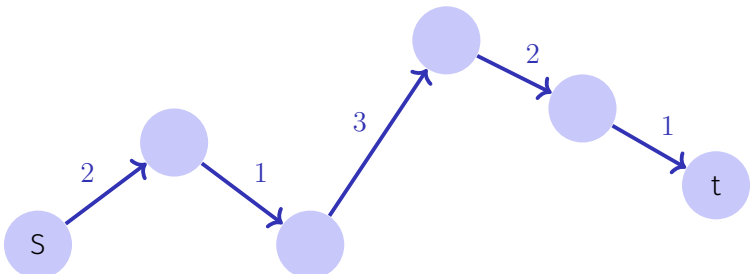
Notation

Ein **gewichteter Graph** $G = (V, E, c)$ ist ein Graph $G = (V, E)$ mit einer **Kantengewichtsfunktion** $c : E \to \mathbb{R}$. $c(e)$ heisst **Gewicht** der Kante e.



Gewicht eines Weges

Gegeben: $G = (V, E, c)$, $c : E \to \mathbb{R}$, $s, t \in V$.
Weg: $p = \langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t \rangle$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$ $(0 \leq i < k)$
Gewicht: $c(p) := \sum_{i=0}^{k-1} c((v_i, v_{i+1}))$.



Weg mit Gewicht 9

Kürzeste Wege

Notation: Wir schreiben

$$u \overset{p}{\rightsquigarrow} v \qquad \text{oder} \qquad p : u \rightsquigarrow v$$

und meinen einen Weg p von u nach v

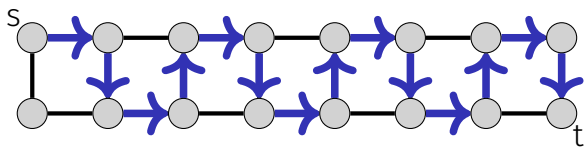
Gesucht: $\delta(u, v)$ = minimales Gewicht eines Weges von u nach v:

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \infty & \text{kein Weg von } u \text{ nach } v \\ \min\{c(p) : u \overset{p}{\rightsquigarrow} v\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Einen Weg minimalen Gewichts nennen wir im folgenden oft einfach **kürzesten Weg**.

Trivialer Algorithmus?

Alle Wege ausprobieren?

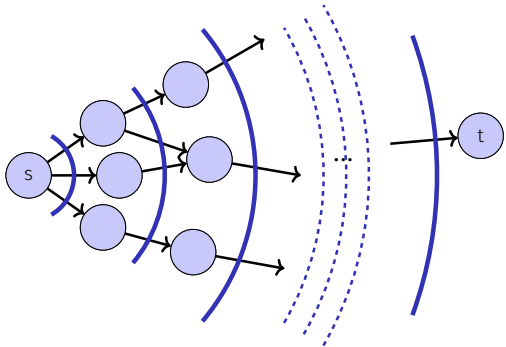


(mindestens $2^{|V|/2}$ Wege von s nach t)

$\Rightarrow$ Ineffizient. Es kann exponentiell viele Wege geben.

Einfachster Fall

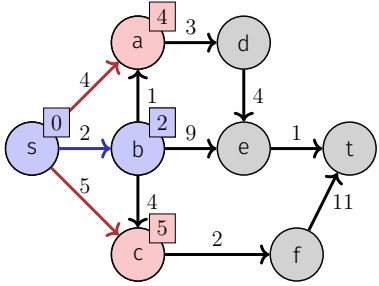
Konstantes Kantengewicht (jede Kante hat Gewicht 1)



$\Rightarrow$ **Lösung:** Breitensuche $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

Dijkstras Algorithmus: Beobachtung

Wichtige Annahme: alle Gewichte sind positiv.



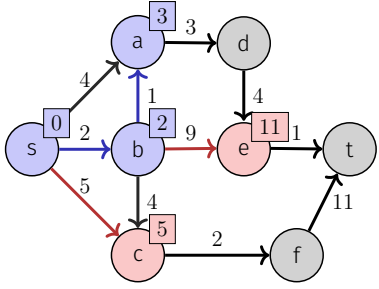
Kürzester Weg $s \rightsquigarrow u$ hat Länge l (exakt).

Obere Schranke:
Kürzester Weg $s \rightsquigarrow u$ hat Länge höchstens l.

Beobachtung: Kürzeste ausgehende Kante (s, u) ist der kürzeste Weg von s zu diesem Knoten u.

Dijkstras Algorithmus: Beobachtung

Wichtige Annahme: alle Gewichte sind positiv.



Kürzester Weg $s \rightsquigarrow u$ hat Länge l (exakt).

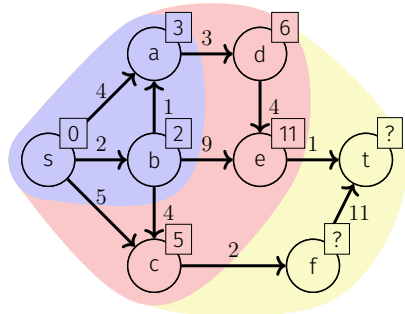
Obere Schranke:
Kürzester Weg $s \rightsquigarrow u$ hat Länge höchstens l.

Allgemeine Beobachtung: Die kleinste obere Schranke eines (orangen) Knotens u ist die exakte Länge des kürzesten Weges von s zu u.

Dijkstras Algorithmus: Grundidee (Greedy)

V aufgeteilt in:

- $\mathbf{K}$: Knoten mit bekanntem kürzestem Weg
- $\mathbf{N} = \bigcup_{v \in K} N^+(v) \setminus K$: Nachfolger von K
  $\Rightarrow$ eine obere Schranke ist bekannt
- $\mathbf{R} = V \setminus (K \cup N)$: restliche Knoten
  $\Rightarrow$ noch nichts bekannt



Greedy:

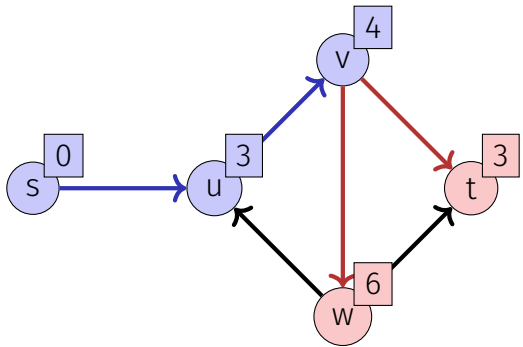
Startend mit $\mathbf{N} = \{s\}$, bis $\mathbf{N} = \{\}$: Knoten aus $\mathbf{N}$ mit kleinster oberer Schranke wird $\mathbf{K}$ und seine Nachbarn $\mathbf{N}$ hinzugefügt.

Invarianten:

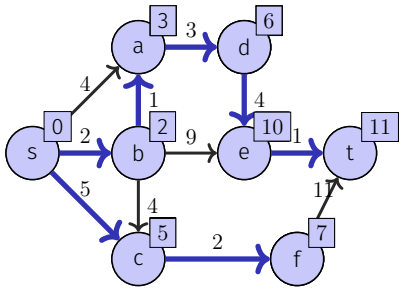
- nach i Schritten: kürzeste Wege zu i Knoten bekannt ($|K| = i$).
- für alle Knoten $\mathbf{v} \in N$: obere Schranke ist (exakte) Länge des kürzesten Weges $\mathbf{s} \rightsquigarrow \bullet \to v$ von $\mathbf{s}$ nach $\mathbf{v}$ mit Knoten nur aus $\mathbf{K} \cup \{v\}$.

Quiz

Ist die folgende Konstellation von oberen Schranken möglich?



Beispiel

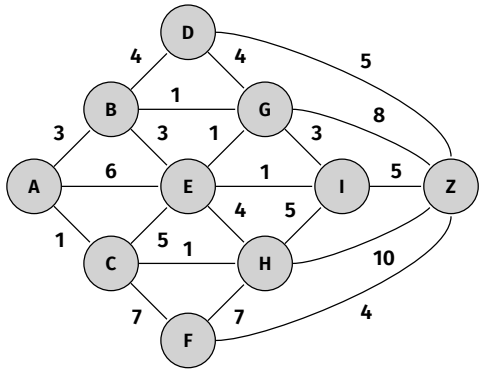


Bekannte kürzeste Wege von s:

$s \rightsquigarrow s$: 0	$s \rightsquigarrow d$: 6
$s \rightsquigarrow b$: 2	$s \rightsquigarrow f$: 7
$s \rightsquigarrow a$: 3	$s \rightsquigarrow e$: 10
$s \rightsquigarrow c$: 5	$s \rightsquigarrow t$: 11

$\mathbf{K} = \{s, b, a, c, d, f, e, t\}$
$\mathbf{N} = \{\}$
$\mathbf{R} = \{\}$

Quiz



Welche Knoten sind in K (bekannte kürzeste Wege) nach sechs Schritten von Dijkstras Algorithmus mit Startknoten A?

Zutaten für einen Algorithmus

Gesucht: Kürzeste Wege von einem Startknoten s aus.

- Gewicht des kürzesten bisher gefundenen Pfades

$$d_s : V \to \mathbb{R}$$

  Zu Beginn: $d_s[v] = \infty$ für alle Knoten $v \in V$.
  Ziel: $d_s[v] = \delta(s, v)$ für alle $v \in V$.

- Vorgänger eines Knotens

$$\pi_s : V \to V$$

  Zu Beginn $\pi_s[v]$ undefiniert für jeden Knoten $v \in V$

Algorithmus: Dijkstra(G, s)

Input: Positiv gewichteter Graph $G = (V, E, c)$,
Startpunkt $s \in V$

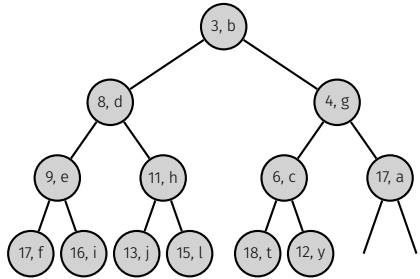
Output: Länge d_s der kürzesten Pfade von s und
Vorgänger π_s für jeden Knoten

foreach $u \in V$ **do**
  $d_s[u] \leftarrow \infty$; $\pi_s[u] \leftarrow$ null
$d_s[s] \leftarrow 0$; $N \leftarrow \{s\}$
while $N \neq \emptyset$ **do**
  $u \leftarrow \arg\min_{u \in N} d_s[u]$; $N \leftarrow N \setminus \{u\}$
  foreach $v \in N^+(u)$ **do**
    if $d_s[u] + c(u, v) < d_s[v]$ **then**
      $d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u, v)$
      $\pi_s[v] \leftarrow u$
      $N \leftarrow N \cup \{v\}$

Zur Implementation: Datenstruktur für N?

Benötigte Operationen:

- **`Insert((p, k))`**: $\mathcal{O}(\log |V|)$
  Hinzufügen eines Schlüssels (Knoten) k mit Wert (obere Schranke) p
- **`ExtractMin()`**: $\mathcal{O}(\log |V|)$
  Entfernen des Elements mit kleinstem Wert
- **`DecreaseKey((p, k))`**: $\mathcal{O}(\log |V|)$
  Updaten des Werts von Schlüssel k zu p

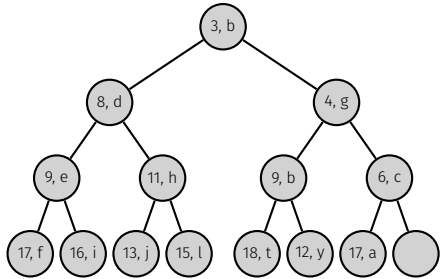


$\Rightarrow$ MinHeap mit Knoten in N als Schlüssel und mit oberer Schranke als Wert

DecreaseKey

Zwei Möglichkeiten:

- Merken der Position:
  Speichern am Knoten oder extern
- oder DecreaseKey vermeiden:
  mit Lazy Deletion



Lazy Deletion:

- Knoten mit kleinerer oberer Schranke erneut einfügen
- Knoten beim Entnehmen als "deleted" kennzeichnen

$\Rightarrow$ Speicherbedarf vom Heap wächst bis zu $\Theta(|E|)$ statt $\Theta(|V|)$

$\Rightarrow$ Da $|E| \leq |V|^2$: Insert und ExtractMin in $\mathcal{O}(\log |V|^2) = \mathcal{O}(\log |V|)$

Algorithmus: Dijkstra(G, s) mit Lazy Deletion

Input: Positiv gewichteter Graph $G = (V, E, c)$, Startpunkt $s \in V$
Output: Länge d_s der kürzesten Pfade von s und Vorgänger π_s für jeden Knoten

foreach $u \in V$ **do**
    $d_s[u] \leftarrow \infty$; $\pi_s[u] \leftarrow$ null
$K = \{\}$; $d_s[s] \leftarrow 0$; $N \leftarrow \{s\}$
while $N \neq \emptyset$ **do**
    $d, u \leftarrow$ ExtractMin(N)
    if $u \notin K$ **then**
        $K \leftarrow K \cup \{u\}$
        foreach $v \in N^+(u)$ **do**
            if $d + c(u, v) < d_s[v]$ **then**
                $d_s[v] \leftarrow d + c(u, v)$; $\pi_s[v] \leftarrow u$
                Insert($(d + c(u, v), v)$)

Laufzeit:
Initialisierung: $\mathcal{O}(|V|)$
$(|V|+|E|)$-mal ExtractMin: $\mathcal{O}((|V|+|E|)\cdot\log|V|)$;
$(|E|+1)$-mal Insert: $\mathcal{O}(|E| \cdot \log|V|)$;
$\Rightarrow$ Insgesamt: $\mathcal{O}((|V| + |E|) \cdot \log|V|)$

Laufzeit von Dijkstra (ohne Lazy Deletion)

- $|V|\times$ ExtractMin: $\mathcal{O}(|V| \log |V|)$
- $|E|\times$ Insert oder DecreaseKey: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$
- $1\times$ Init: $\mathcal{O}(|V|)$
- Insgesamt[41] [42] :

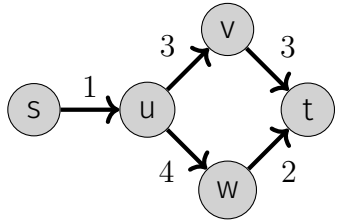
$$\mathcal{O}((|V| + |E|) \log |V|)$$

[41] Für zusammenhängende Graphen: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$

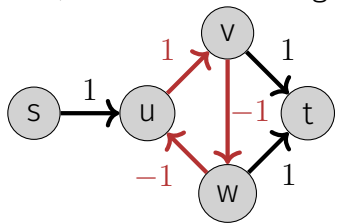
[42] Kann verbessert werden unter Verwendung einer für ExtractMin und DecreaseKey optimierten Datenstruktur (Fibonacci Heap), dann Laufzeit $\mathcal{O}(|E| + |V| \log |V|)$.

Beobachtungen

- Ist der kürzeste Weg immer eindeutig? Nein!



  Dijkstras Algorithmus findet (irgend)einen kürzesten Weg.
- Existiert immer (mindestens) ein kürzester Weg? Nein! Negative Zyklen!



26.3 Allgemeiner Algorithmus

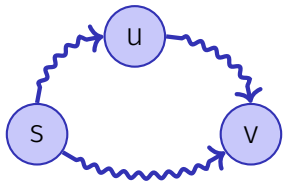
Warum Dijkstra korrekt ist und wie man verallgemeinert.

Beobachtungen (1)

Dreiecksungleichung

Für alle $s, u, v \in V$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + \delta(u, v)$$

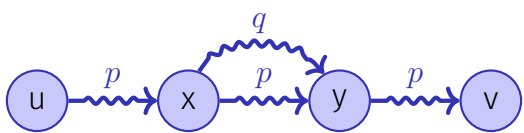


Ein kürzester Weg von s nach v (ohne weitere Einschränkungen) kann nicht länger sein als ein kürzester Weg von s nach v, der u enthalten muss.

Beobachtungen (2)

Optimale Substruktur

Teilpfade von kürzesten Pfaden sind kürzeste Pfade: Sei $p = \langle v_0, \ldots, v_k \rangle$ ein kürzester Pfad von v_0 nach v_k. Dann ist jeder der Teilpfade $p_{ij} = \langle v_i, \ldots, v_j \rangle$ $(0 \leq i < j \leq k)$ ein kürzester Pfad von v_i nach v_j.



Wäre das nicht so, könnte man einen der Teilpfade kürzen, Widerspruch zur Voraussetzung.

Beobachtungen (3)

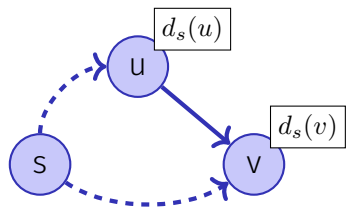
Kürzeste Wege enthalten keine Zyklen

1. Kürzester Weg enthält negativen Zyklus: es existiert kein kürzester Weg. Widerspruch.
2. Weg enthält positiven Zyklus: Weglassen des positiven Zyklus kann den Weg verkürzen: Widerspruch
3. Weg enthält Zyklus vom Gewicht 0: Weglassen des Zyklus verändert das Pfadgewicht nicht. Weglassen (Konvention).

Allgemeiner Algorithmus

1. Initialisiere d_s und π_s: $d_s[v] = \infty$, $\pi_s[v] = \text{null}$ für alle $v \in V$
2. Setze $d_s[s] \leftarrow 0$
3. Wähle eine Kante $(u, v) \in E$

Relax(u, v):
if $d_s[u] + c(u, v) < d_s[v]$ **then**
    $d_s[v] \leftarrow d_s[u] + c(u, v)$
    $\pi_s[v] \leftarrow u$
    return true
return false



4. Wiederhole 3 bis nichts mehr relaxiert werden kann.
(bis $d_s[v] \leq d_s[u] + c(u, v) \quad \forall (u, v) \in E$)

Relaxieren ist sicher

Zu jeder Zeit gilt in obigem Algorithmus

$$d_s[v] \geq \delta(s,v) \quad \forall v \in V$$

Im Relaxierschritt:

$$\begin{aligned} & \delta(s,v) \leq \delta(s,u) + \delta(u,v) && \text{[Dreiecksungleichung].} \\ & \delta(s,u) \leq d_s[u] && \text{[Induktionsvorraussetzung].} \\ & \delta(u,v) \leq c(u,v) && \text{[Minimalität von } \delta\text{]} \\ \Rightarrow \quad & d_s[u] + c(u,v) \geq \delta(s,v) \end{aligned}$$

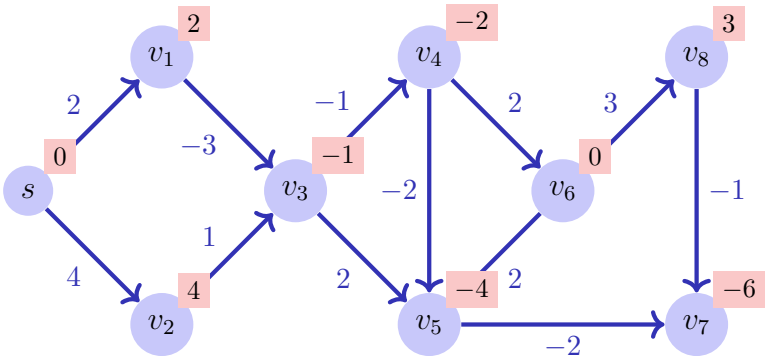
$$\Rightarrow \min\{d_s[v], d_s[u] + c(u,v)\} \geq \delta(s,v)$$

Zentrale Frage

Wie / in welcher Reihenfolge wählt man die Kanten in obigem Algorithmus?

Spezialfall: Gerichteter Azyklischer Graph (DAG)

DAG $\Rightarrow$ Topologische Sortierung liefert optimale Besuchsreihenfolge



Top. Sortieren: $\Rightarrow$ Reihenfolge $s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_5, v_8, v_7$.

Andere Fälle

- Spezialfall: $c \equiv 1 \Rightarrow$ BFS
- Spezialfall: Positive Kantengewichte $\Rightarrow$ Dijkstra ☺.
- Allgemeine Bewertete Graphen: Zyklen mit negativen Gewichten können Weg verkürzen: es muss keinen kürzesten Weg mehr geben

Dynamic Programming Ansatz (Bellman)

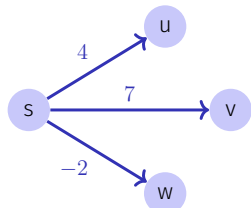
Induktion über Anzahl Kanten. $d_s[i, v]$: Kürzeste Weglänge von s nach v über maximal i Kanten.

$$d_s[i, v] = \min\{d_s[i-1, v], \min_{(u,v)\in E}(d_s[i-1, u] + c(u, v))$$

$$d_s[0, s] = 0, d_s[0, v] = \infty \; \forall v \neq s.$$

Dynamic Programming Ansatz (Bellman)

	s	$\cdots$	v	$\cdots$	w
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	∞	7	∞	-2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$



Algorithmus: Iteriere über letzte Zeile bis die Relaxationsschritte keine Änderung mehr ergeben, maximal aber $n-1$ mal. Wenn dann noch Änderungen, dann gibt es keinen kürzesten Pfad.

Algorithmus Bellman-Ford(G, s)

Input: Graph $G = (V, E, c)$, Startpunkt $s \in V$
Output: Wenn Rückgabe true, Minimale Gewichte d der kürzesten Pfade zu jedem Knoten, sonst kein kürzester Pfad.

foreach $u \in V$ **do**
    $d_s[u] \leftarrow \infty$; $\pi_s[u] \leftarrow$ null
$d_s[s] \leftarrow 0$;
for $i \leftarrow 1$ **to** $|V|$ **do**
    $f \leftarrow$ false
    foreach $(u, v) \in E$ **do**
        $f \leftarrow f \vee \mathrm{Relax}(u, v)$
    if $f =$ false **then return** true
return false;

Laufzeit $\mathcal{O}(|E| \cdot |V|)$.