24. Geometrische Algorithmen

Lage von Strecken, Schnitt vieler Strecken, Konvexe Hülle, Dichtestes Punktepaar [Ottman/Widmayer, Kap. 8.2,8.3,8.8.2, Cormen et al, Kap. 33]

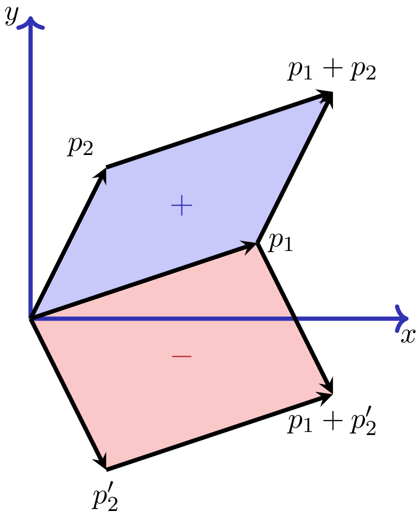
24.1 Lage von Strecken

Eigenschaften von Strecken

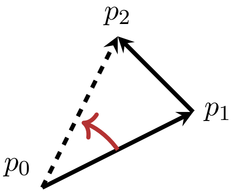
Kreuzprodukt zweier Vektoren $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ in der Ebene

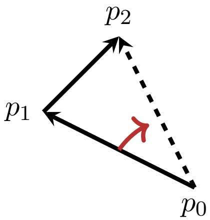
$$p_1 \times p_2 = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Vorzeichenbehafteter Flächeninhalt des Parallelogramms



Abbiegerichtung

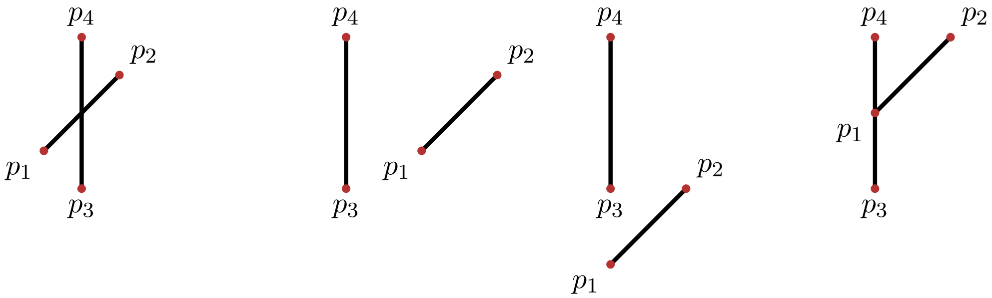




nach links:
$(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0) > 0$

nach rechts:
$(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0) < 0$

Schnitt zweier Strecken



Schnitt: p_1 und p_2 gegenüber bzgl. $\overline{p_3p_4}$ und p_3, p_4 gegenüber bzgl. $\overline{p_1p_2}$

Kein Schnitt: p_1 und p_2 auf der gleichen Seite von $\overline{p_3p_4}$

Kein Schnitt: p_3 und p_4 auf der gleichen Seite von $\overline{p_1p_2}$

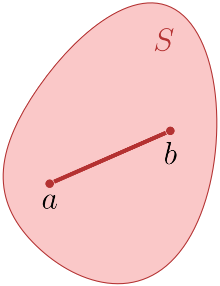
Schnitt: p_1 auf $\overline{p_3p_4}$

24.2 Konvexe Hülle

Konvexe Hülle

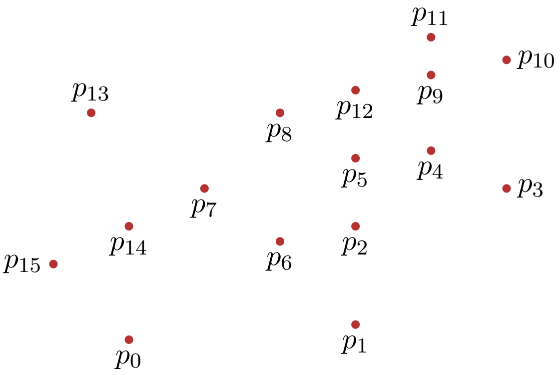
Teilmenge S eines reellen Vektorraums heisst **konvex**, wenn für alle $a, b \in S$ und jedes $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda a + (1-\lambda)b \in S$$



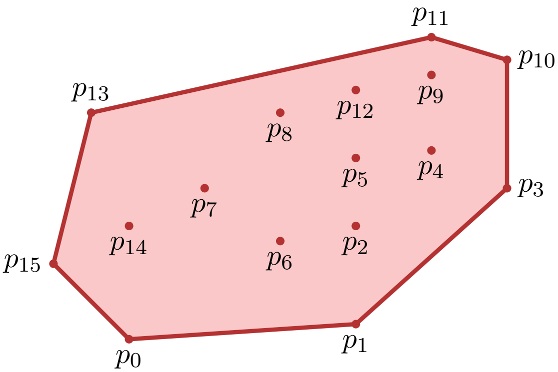
Konvexe Hülle

Konvexe Hülle $H(Q)$ einer Menge Q von Punkten: kleinstes konvexes Polygon P, so dass jeder Punkt von Q auf P oder im Inneren von P liegt.



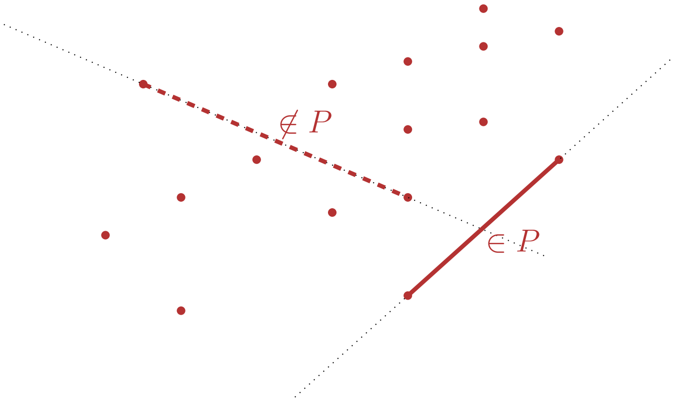
Konvexe Hülle

Konvexe Hülle $H(Q)$ einer Menge Q von Punkten: kleinstes konvexes Polygon P, so dass jeder Punkt von Q auf P oder im Inneren von P liegt.



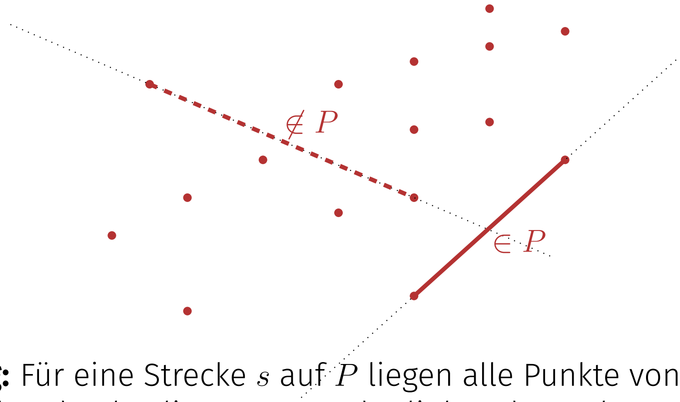
Konvexe Hülle

Identifiziere Teilstrecken von P



Konvexe Hülle

Identifiziere Teilstrecken von P



Beobachtung: Für eine Strecke s auf P liegen alle Punkte von Q, die nicht auf der Geraden durch s liegen, entweder links oder rechts von s.

Jarvis Marsch / Gift Wrapping Algorithmus

1. Starte mit Extrempunkt (z.B. unterster Punkt) $p = p_0$
2. Suche Punkt q, so dass $\overline{pq}$ am weitesten rechts liegende Gerade, d.h. jeder andere Punkt liegt links von der Geraden $\overline{pq}$ (oder auf der Geraden näher bei p).
3. Fahre mit $p \leftarrow q$ bei (2) weiter, bis $p = p_0$.

Illustration Jarvis

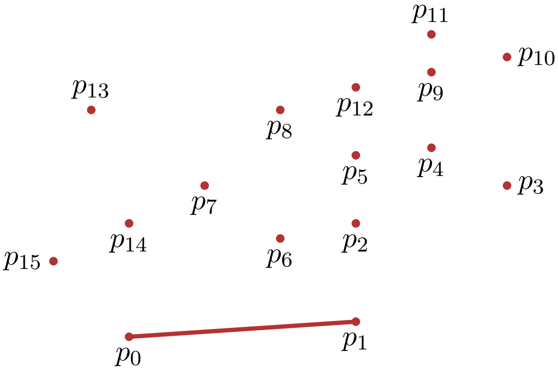


Illustration Jarvis

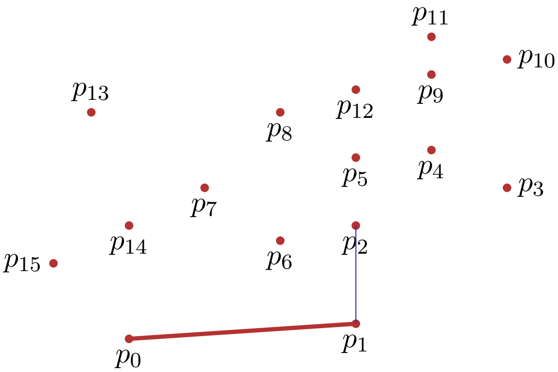


Illustration Jarvis

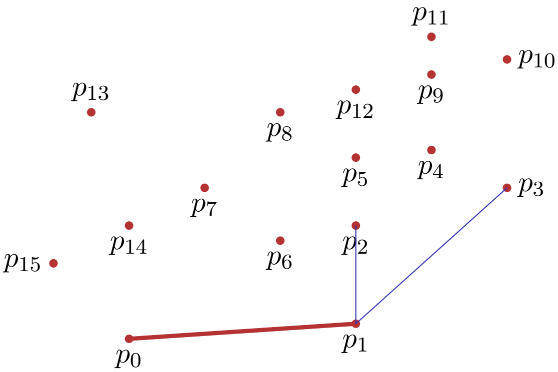


Illustration Jarvis

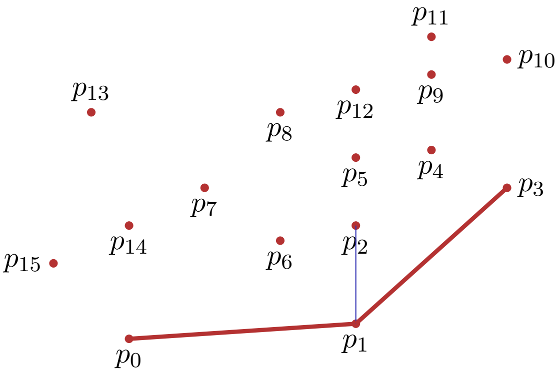


Illustration Jarvis

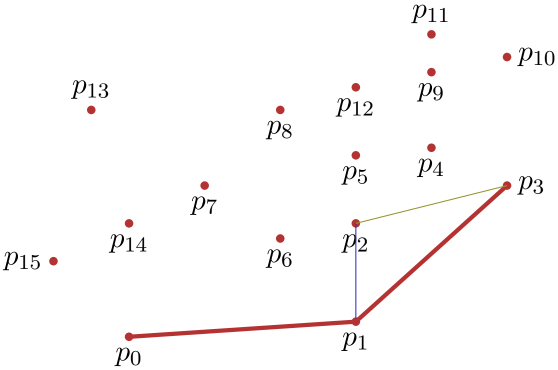


Illustration Jarvis

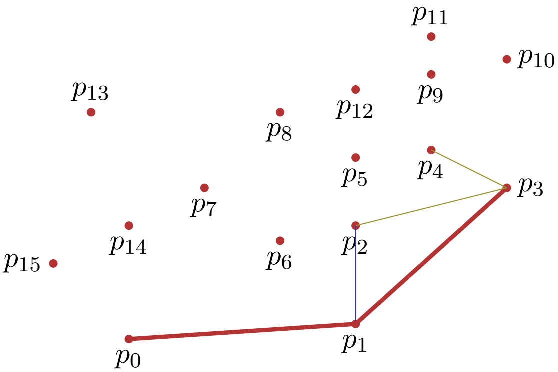


Illustration Jarvis

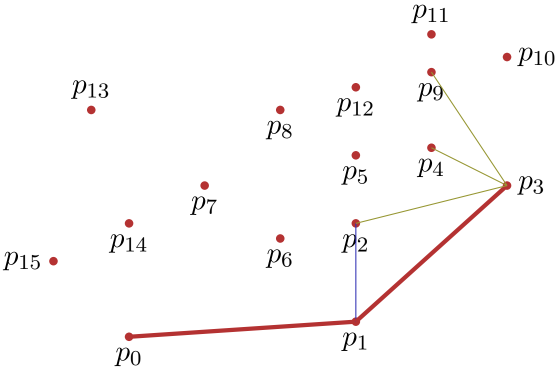


Illustration Jarvis

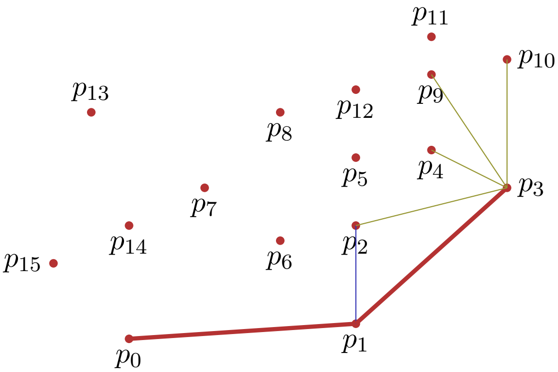


Illustration Jarvis

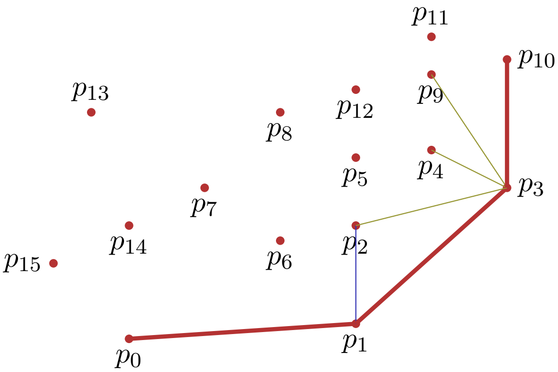


Illustration Jarvis

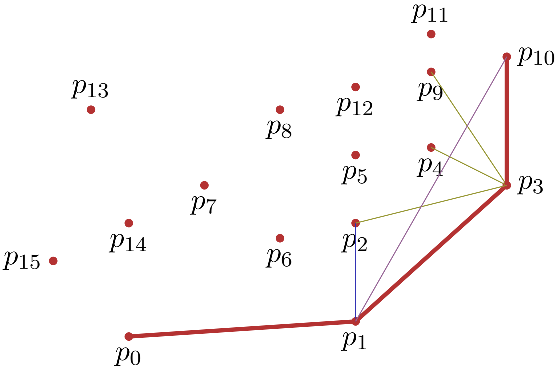


Illustration Jarvis

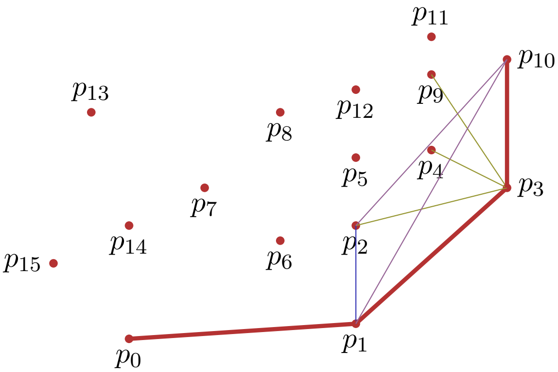


Illustration Jarvis

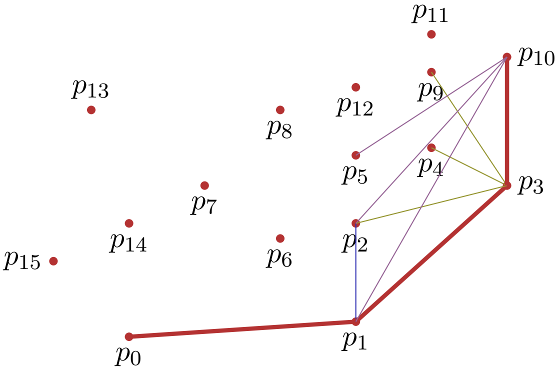


Illustration Jarvis

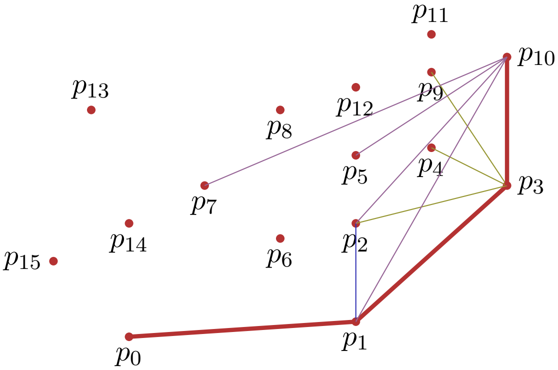


Illustration Jarvis

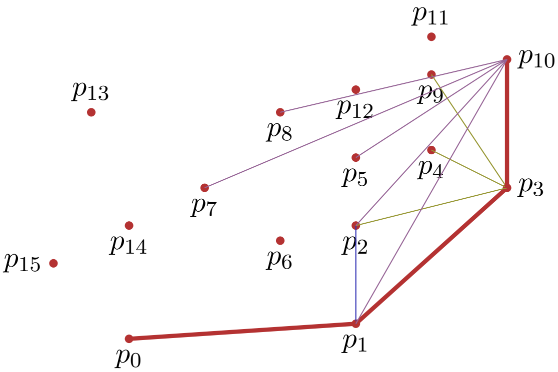


Illustration Jarvis

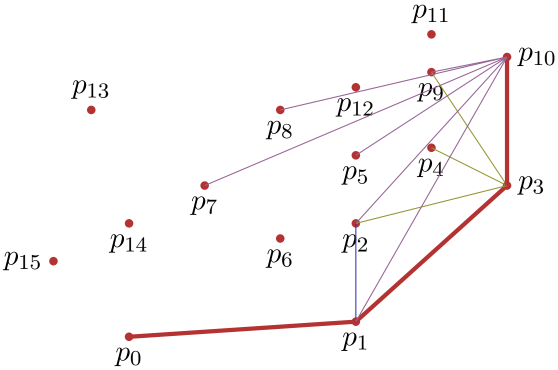


Illustration Jarvis

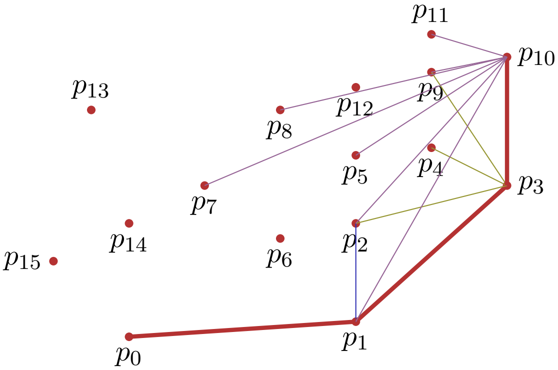
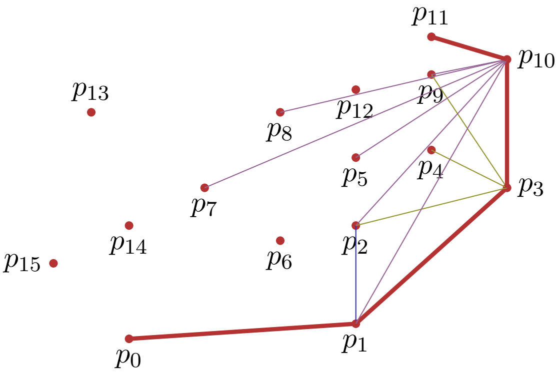


Illustration Jarvis

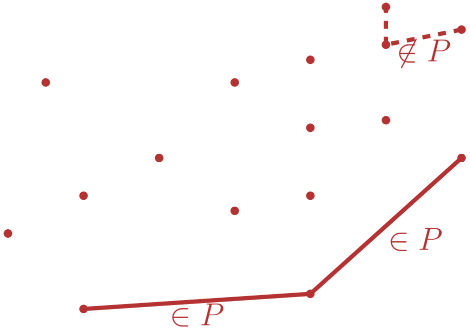


Analyse Gift-Wrapping

- Sei h die Anzahl Eckpunkte der konvexen Hülle.
- Laufzeit des Algorithmus $\mathcal{O}(h \cdot n)$.

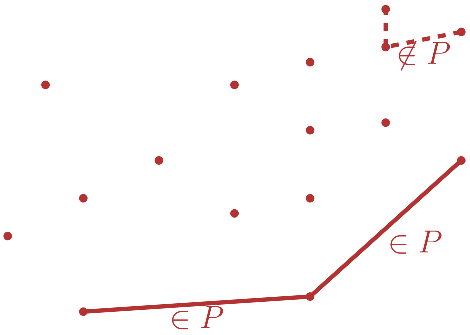
Konvexe Hülle

Identifiziere Teilstrecken von P



Konvexe Hülle

Identifiziere Teilstrecken von P

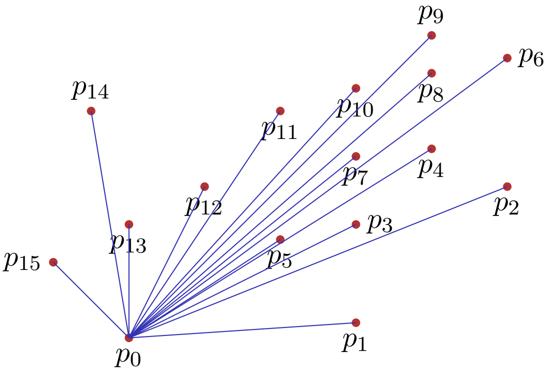


Beobachtung: wenn die Eckpunkte des Polygons entgegen dem Uhrzeigersinn geordnet sind, biegen aufeinanderfolgende Strecken auf dem Polygon P nur nach links ab.

Algorithmus Graham-Scan

Input: Menge von Punkten Q
Output: Stack S von Punkten der konvexen Hülle von Q
p_0: Punkt mit minimaler y- (gegebenenfalls zusätzlich minimaler x-) Koordinate
$(p_1, \ldots, p_m)$ restlichen Punkte sortiert nach Polarwinkel gegen Uhrzeigersinn relativ zu p_0; Wenn Punkte mit gleichem Polarwinkel vorhanden, verwerfe alle ausser dem mit maximalen Abstand von p_0
$S \leftarrow \emptyset$
if $m < 2$ **then return** S
Push(S, p_0); Push(S, p_1); Push(S, p_2)
for $i \leftarrow 3$ **to** m **do**
    while Winkel (NextToTop(S), Top(S), p_i) nicht nach links gerichtet **do**
        Pop(S);
    Push(S, p_i)
return S

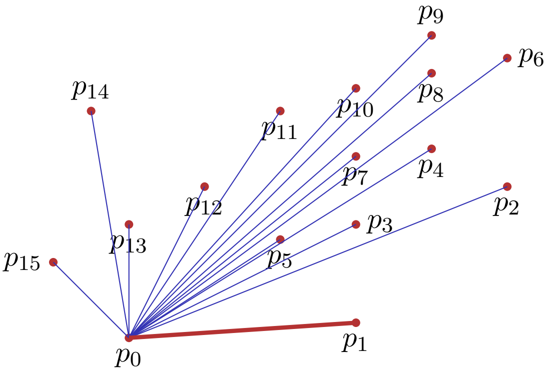
Illustration Graham-Scan



Stack:

p_0

Illustration Graham-Scan

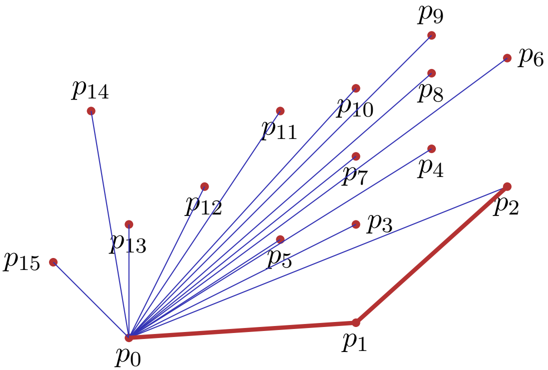


Stack:

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



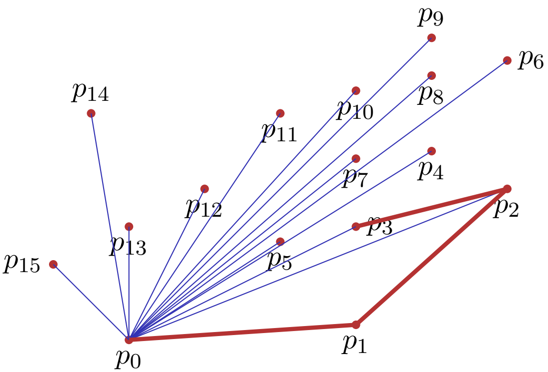
Stack:

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

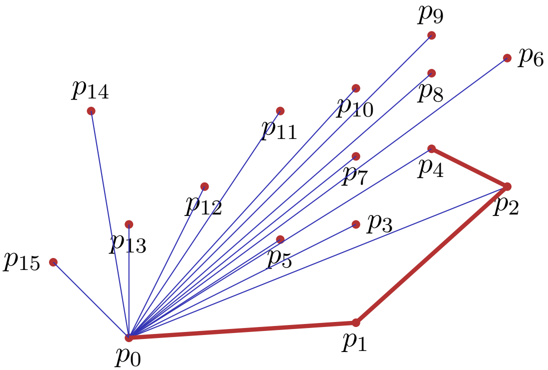
p_3

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

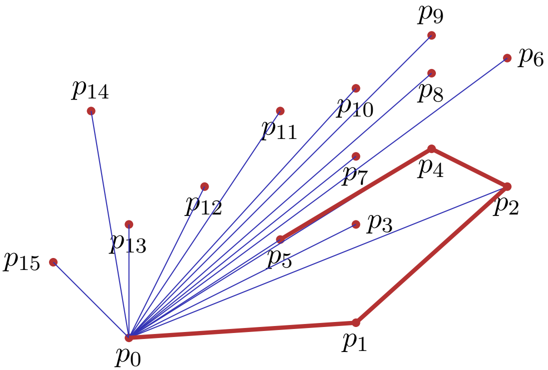
p_4

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

p_5

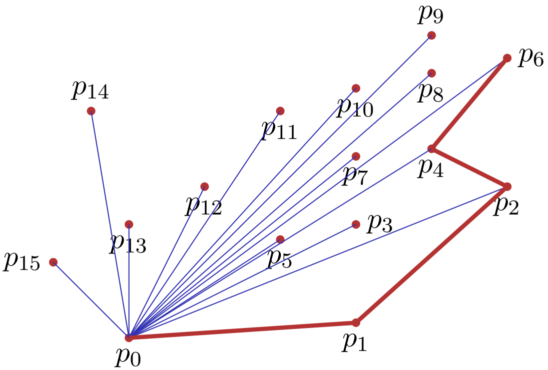
p_4

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

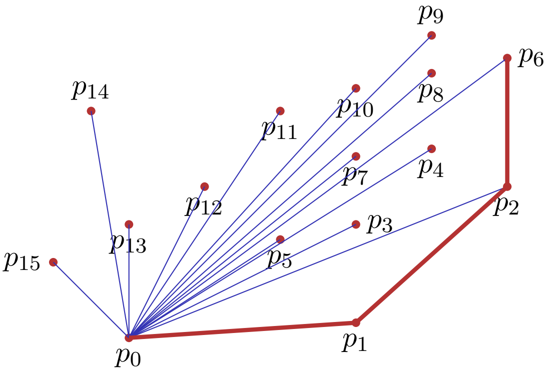
p_4

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

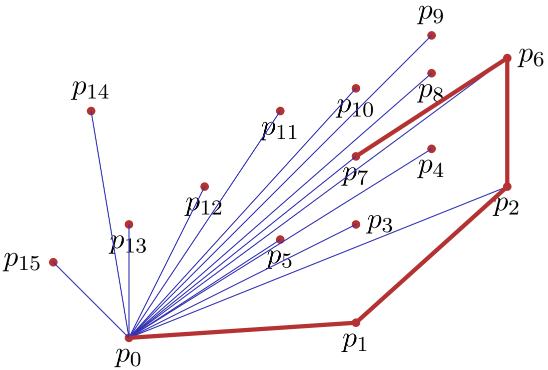
p_6

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

p_7

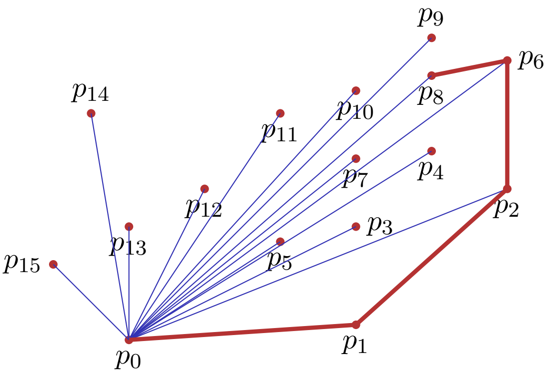
p_6

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

p_8

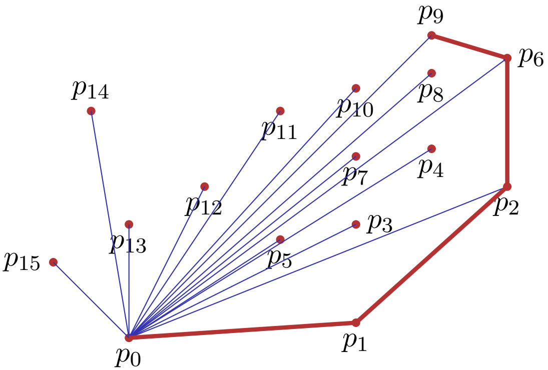
p_6

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

p_9

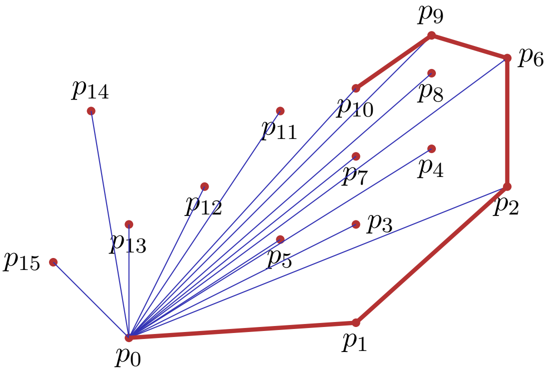
p_6

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

p_{10}

p_9

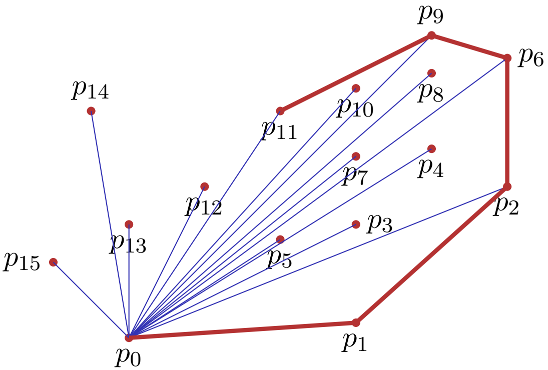
p_6

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

p_{11}

p_9

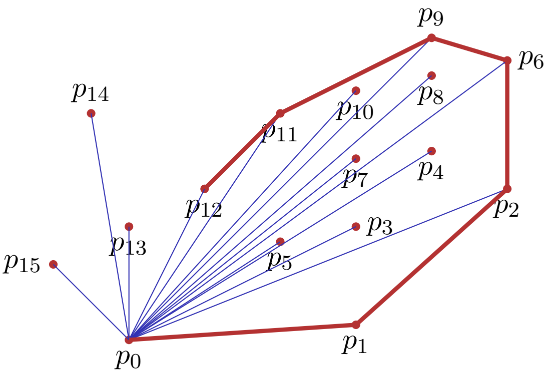
p_6

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

p_{12}

p_{11}

p_9

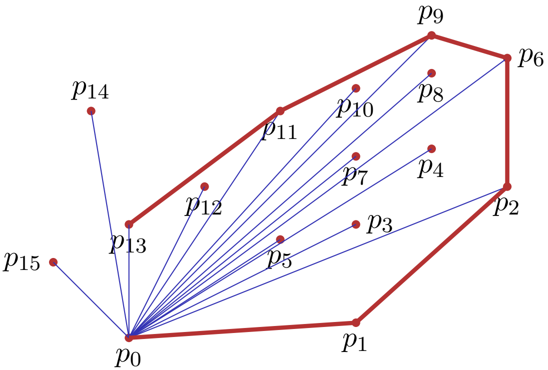
p_6

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

p_{13}

p_{11}

p_9

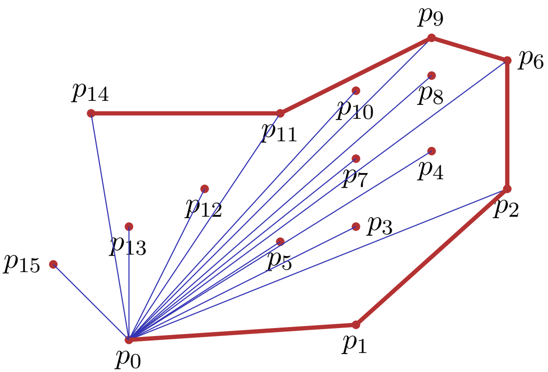
p_6

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

p_{11}

p_9

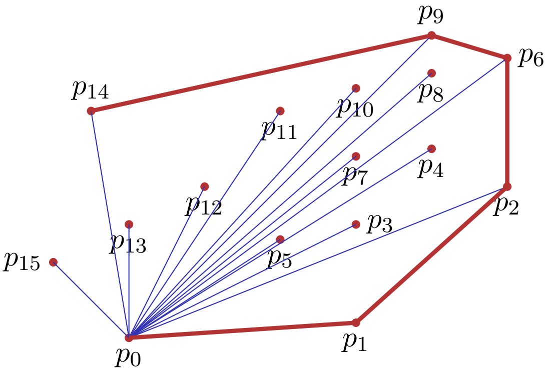
p_6

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

p_{14}

p_9

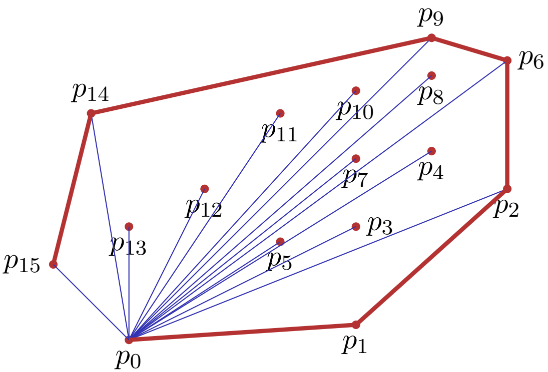
p_6

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

p_{15}

p_{14}

p_9

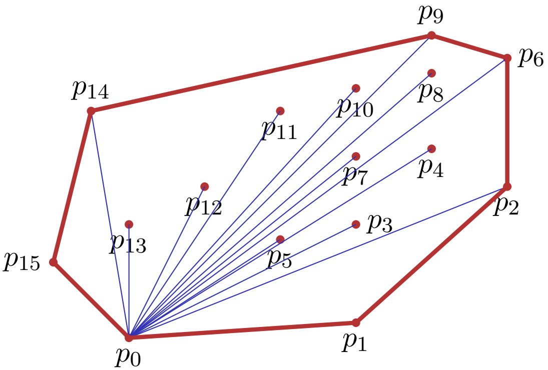
p_6

p_2

p_1

p_0

Illustration Graham-Scan



Stack:

p_{15}
p_{14}
p_9
p_6
p_2
p_1
p_0

Analyse

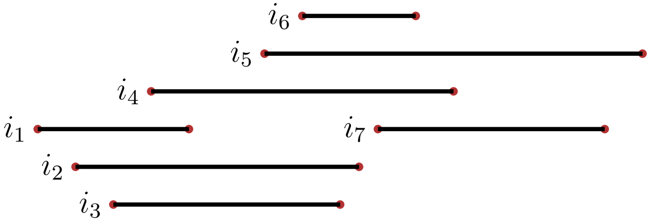
Laufzeit des Algorithmus Graham-Scan

- Sortieren $\mathcal{O}(n \log n)$
- n Iterationen der For-Schleife
- Amortisierte Analyse des Multipop beim Stapel: amortisiert konstante Laufzeit des Multipop, ebenso hier: amortisiert konstante Laufzeit der While-Schleife.

Insgesamt $\mathcal{O}(n \log n)$

24.3 Schnitt vieler Strecken

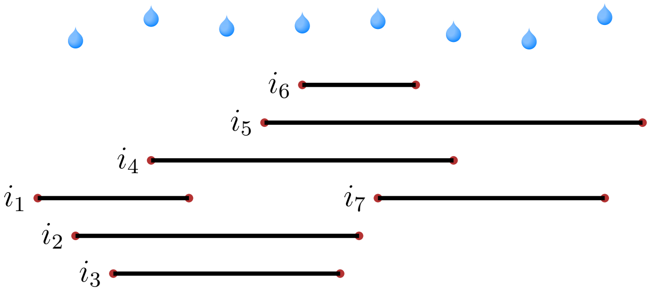
Vorbereitung: Überlappende Intervalle



Fragen:

- Wie viele Intervalle überlappen maximal?

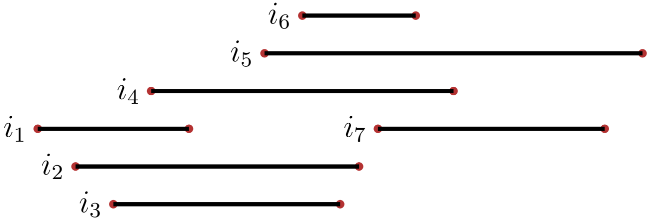
Vorbereitung: Überlappende Intervalle



Fragen:

- Wie viele Intervalle überlappen maximal?
- Welche Intervalle werden (nicht) nass?

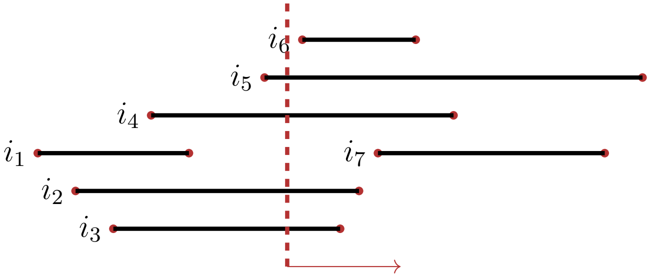
Vorbereitung: Überlappende Intervalle



Fragen:

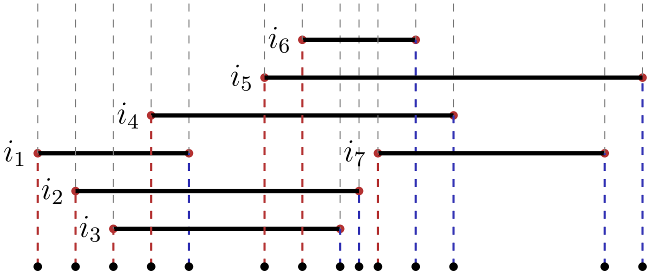
- Wie viele Intervalle überlappen maximal?
- Welche Intervalle werden (nicht) nass?
- Welche Intervalle liegen unmittelbar übereinander

Vorbereitung: Überlappende Intervalle



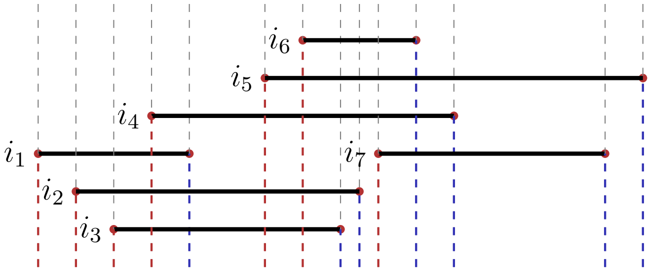
Idee Sweepline: Vertikale Linie, wandert in x-Richtung, beobachtet die geometrichen Objekte.

Vorbereitung: Überlappende Intervalle



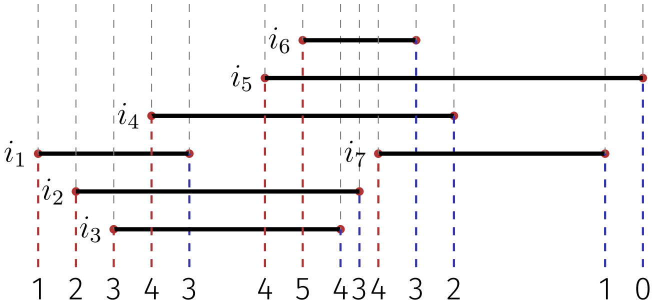
Ereignisliste: Liste von Punkten, an denen sich der Zustand, den die Sweepline beobachtet, ändert.

Vorbereitung: Überlappende Intervalle



F: Wie viele Intervalle überlappen maximal?

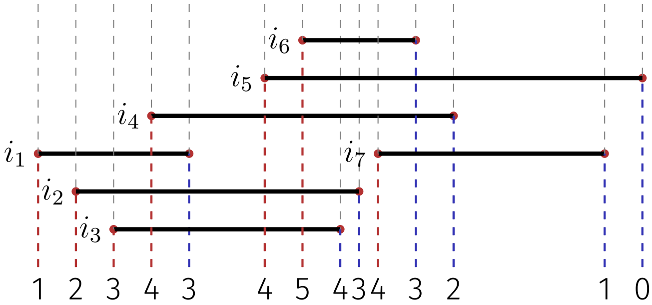
Vorbereitung: Überlappende Intervalle



F: Wie viele Intervalle überlappen maximal?

Sweepline führt Zähler der am linken (rechten) Endpunkt eines Intervalls inkrementiert (dekrementiert) wird.

Vorbereitung: Überlappende Intervalle

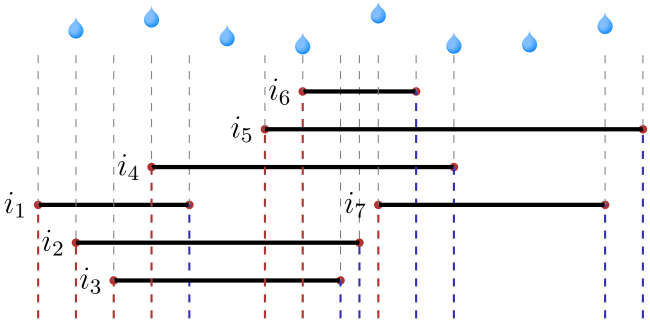


F: Wie viele Intervalle überlappen maximal?

Sweepline führt Zähler der am linken (rechten) Endpunkt eines Intervalls inkrementiert (dekrementiert) wird.

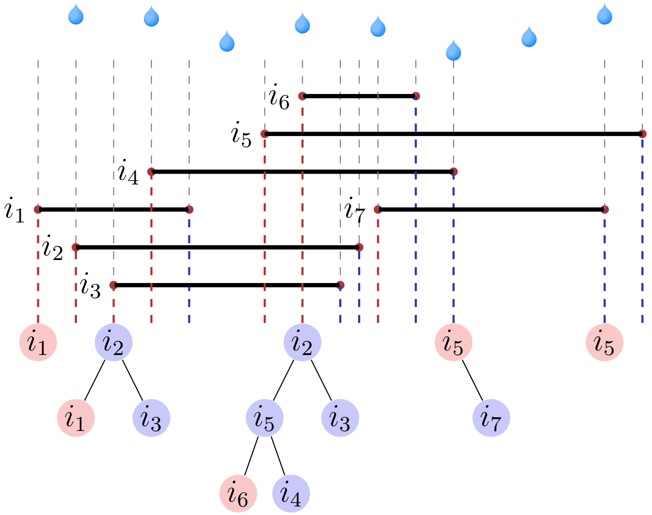
A: Maximaler Zählerstand

Vorbereitung: Überlappende Intervalle



F: Welche Intervalle werden nass?

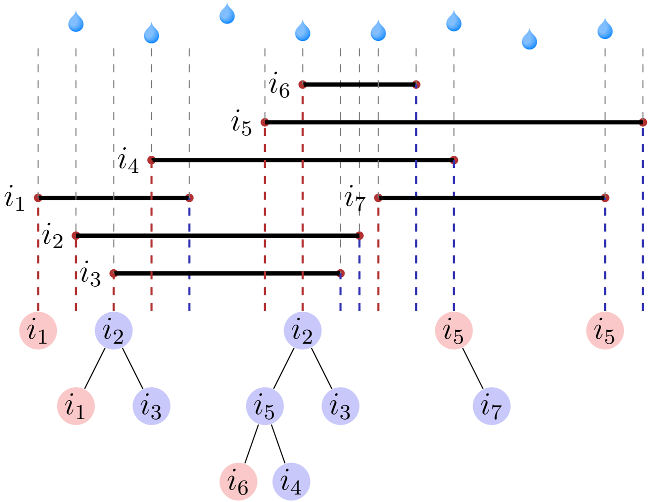
Vorbereitung: Überlappende Intervalle



F: Welche Intervalle werden nass?

Sweepline führt einen Suchbaum der die Intervalle nach vertikaler Anordnung enthält.

Vorbereitung: Überlappende Intervalle

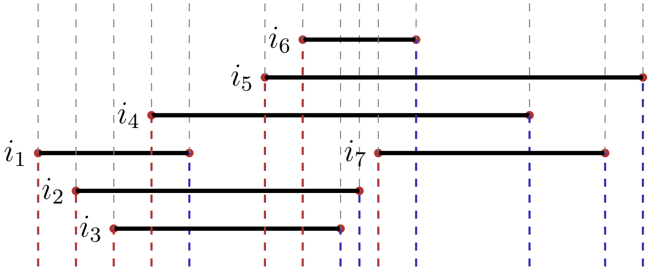


F: Welche Intervalle werden nass?

Sweepline führt einen Suchbaum der die Intervalle nach vertikaler Anordnung enthält.

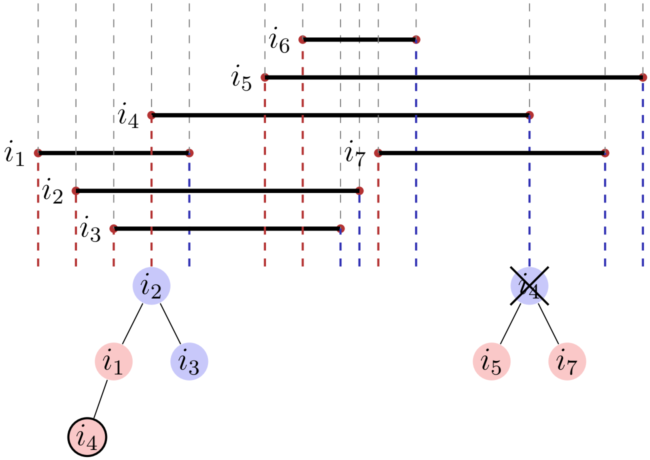
A: Intervalle, die irgendwann im Baum ganz links stehen.

Vorbereitung: Überlappende Intervalle



F: Welche Intervalle sind benachbart?

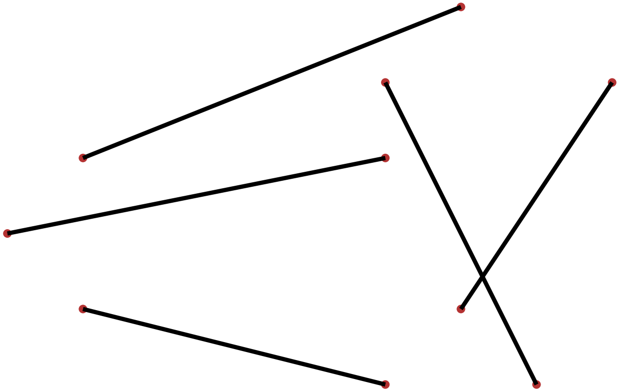
Vorbereitung: Überlappende Intervalle



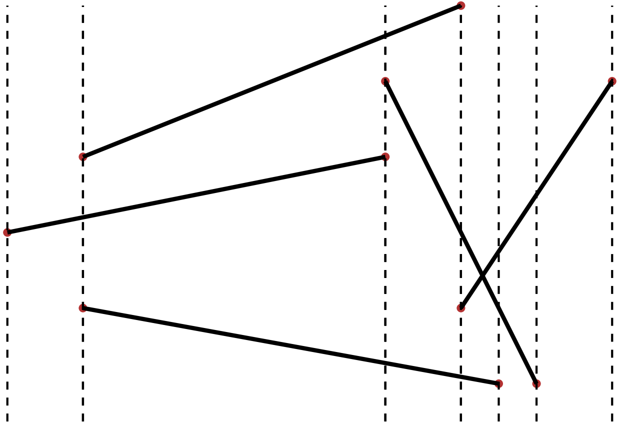
F: Welche Intervalle sind benachbart?

A: Intervalle, die beim Intervallstart nebeneinander liegen oder die beim Intervallende eines anderen Intervalls zu Nachbarn werden.

Schnittpunkt vieler Strecken



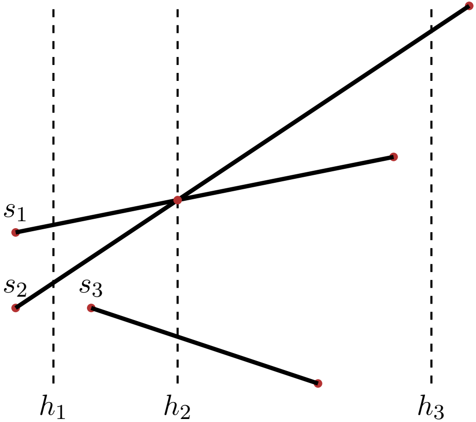
Sweepline Prinzip



Vereinfachende Annahmen

- Keine Strecke verläuft senkrecht
- Jeder Schnittpunkt wird von maximal zwei Strecken gebildet.

(Vertikale) Anordnung von Strecken



Quasiordnung (Halbordnung ohne Antisymmetrie)

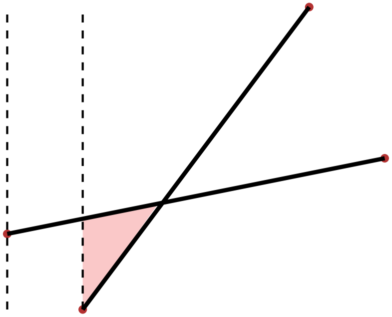
$$s_2 \preccurlyeq_{h_1} s_1$$
$$s_1 \preccurlyeq_{h_2} s_2$$
$$s_2 \preccurlyeq_{h_2} s_1$$
$$s_3 \preccurlyeq_{h_2} s_2$$

[39]

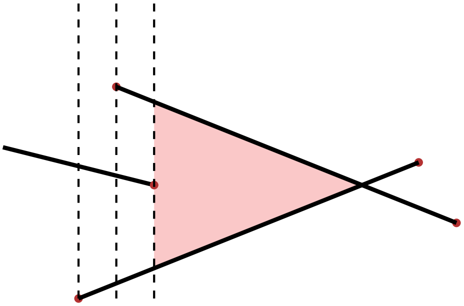
Bzgl. h_3 sind die Strecken unvergleichbar.

[39] Keine Antisymmetrie: $s \preccurlyeq t \wedge t \preccurlyeq s \not\Rightarrow s = t$

Beobachtung: zwei Fälle

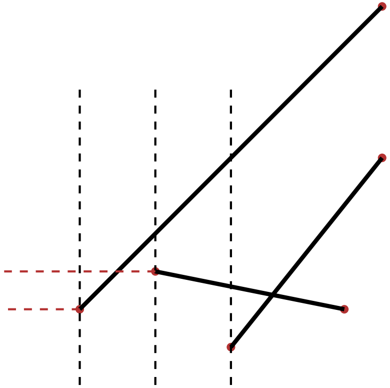


(a) Sich schneidende Strecken liegen bzgl. obiger Halbordnung sofort direkt nebeneinander.



(b) Sich schneidende Strecken liegen bzgl. obiger Halbordnung nebeneinander, wenn die letzte dazwischen liegende Strecke endet.

Beobachtung: mögliches Missverständnis



Es genügt nicht, die y-Koordinaten der Startpunkte von Linien zu vergleichen. Es müssen die Positionen auf der Sweep-Line verglichen werden.

Sweep-Line bewegen

- **Sweep-Line Status** : Beziehung der durch Sweep-Line geschnittenen Objekte
- **Ereignisliste** : Folge von Ereignispunkten, nach x-Koordinate geordnet. Sweepline wandert von links nach rechts und hält an jedem Ereignispunkt.

Sweep-Line Status

Quasiordnung T der geschnittenen Strecken

Benötigte Operationen:

- **Insert(**T, s**)** Füge Strecke s in T ein
- **Delete(**T, s**)** Entferne s von T
- **Above(**T, s**)** Rückgabe Strecke unmittelbar oberhalb von s in T
- **Below(**T, s**)** Rückgabe Strecke unmittelbar unterhalb von s in T

Mögliche Implementation:

Sweep-Line Status

Quasiordnung T der geschnittenen Strecken

Benötigte Operationen:

- **Insert(**T, s**)** Füge Strecke s in T ein
- **Delete(**T, s**)** Entferne s von T
- **Above(**T, s**)** Rückgabe Strecke unmittelbar oberhalb von s in T
- **Below(**T, s**)** Rückgabe Strecke unmittelbar unterhalb von s in T

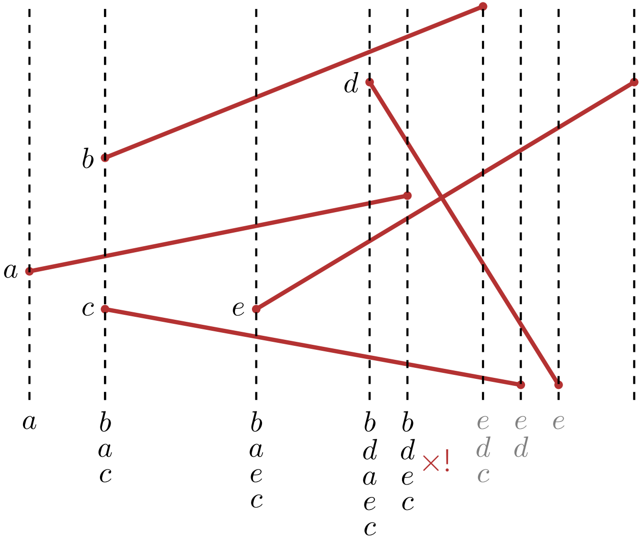
Mögliche Implementation:Balancierter Baum (AVL-Baum, Rot-Schwarz Baum etc.)

Algorithmus Any-Segments-Intersect(S)

Input: Liste von n Strecken S
Output: Rückgabe ob S schneidende Strecken enthält

```
T ← ∅
Sortiere Endpunkte der Strecken in S von links nach rechts (links vor rechts und
  unten vor oben)
for Sortierte Endpunkte p do
    if p linker Endpunkt einer Strecke s then
        Insert(T, s)
        if Above(T, s) ∩ s ≠ ∅ ∨ Below(T, s) ∩ s ≠ ∅ then return true
    if p rechter Endpunkt einer Strecke s then
        if Above(T, s) ∩ Below(T, s) ≠ ∅ then return true
        Delete(T, s)
return false;
```

Illustration



Analyse

Laufzeit des Algorithmus Any-Segments-Intersect

- Sortieren $\mathcal{O}(n \log n)$
- $2n$ Iterationen der For-Schleife. Jede Operation auf dem balancierten Baum $\mathcal{O}(\log n)$

Insgesamt $\mathcal{O}(n \log n)$

24.4 Dichtestes Punktpaar

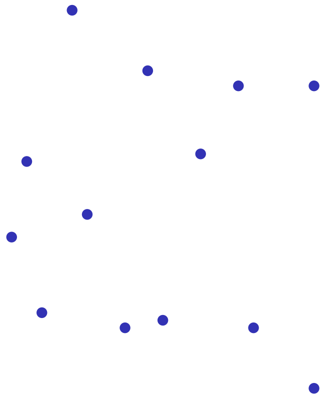
Dichtestes Punktepaar

Euklidischer Abstand $d(s,t)$ zweier Punkte s und t:

$$d(s,t) = \|s-t\|_2 = \sqrt{(s_x - t_x)^2 + (s_y - t_y)^2}$$

Problem: Suche Punkte p und q aus Q, für welche gilt

$$d(p,q) \leq d(s,t) \; \forall \; s,t \in Q, s \neq t.$$



Dichtestes Punktepaar

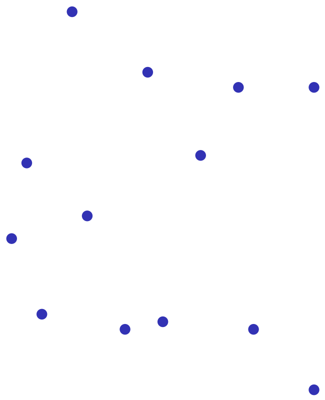
Euklidischer Abstand $d(s,t)$ zweier Punkte s und t:

$$d(s,t) = \|s-t\|_2 = \sqrt{(s_x-t_x)^2 + (s_y-t_y)^2}$$

Problem: Suche Punkte p und q aus Q, für welche gilt

$$d(p,q) \leq d(s,t)\ \forall\ s,t \in Q, s \neq t.$$

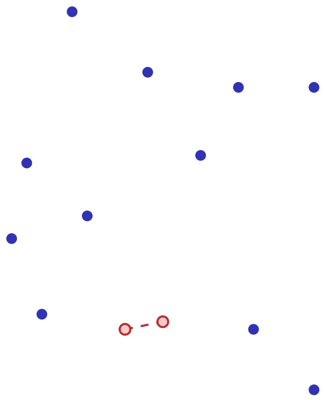
Naiv: alle $\binom{n}{2} = \Theta(n^2)$ Punktepaare.



Dichtestes Punktepaar

Euklidischer Abstand $d(s,t)$ zweier Punkte s und t:

$$d(s,t) = \|s-t\|_2 = \sqrt{(s_x-t_x)^2 + (s_y-t_y)^2}$$



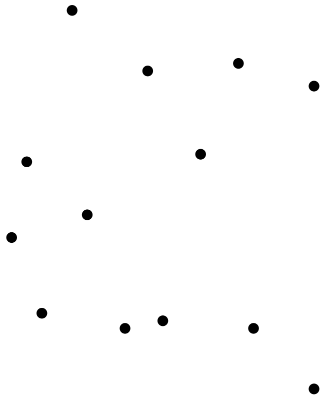
Problem: Suche Punkte p und q aus Q, für welche gilt

$$d(p,q) \le d(s,t)\ \forall\ s,t \in Q, s \neq t.$$

Naiv: alle $\binom{n}{2} = \Theta(n^2)$ Punktepaare.

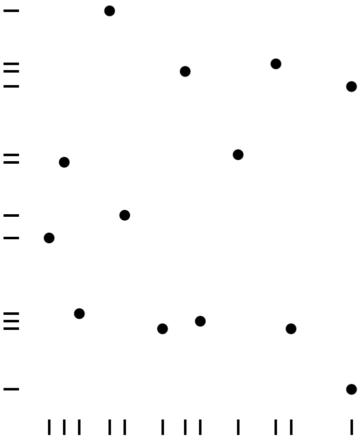
Divide And Conquer

- Punktmenge P, zu Beginn $P \leftarrow Q$



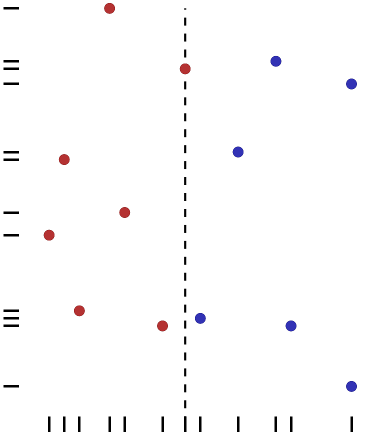
Divide And Conquer

- Punktmenge P, zu Beginn $P \leftarrow Q$
- Arrays X und Y, welche die Punkte aus P enthalten, sortiert nach x- bzw. nach y-Koordinate.



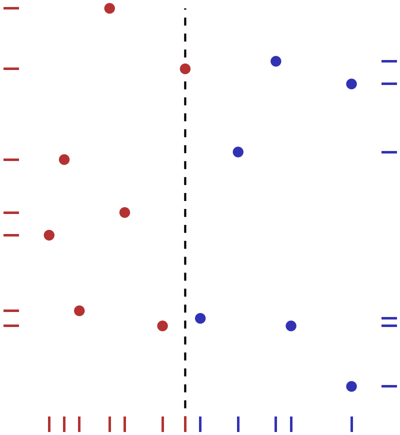
Divide And Conquer

- Punktmenge P, zu Beginn $P \leftarrow Q$
- Arrays X und Y, welche die Punkte aus P enthalten, sortiert nach x- bzw. nach y-Koordinate.
- Teile Punktmenge ein in zwei (annähernd) gleich grosse Mengen P_L und P_R, getrennt durch vertikale Gerade durch einen Punkt von P.



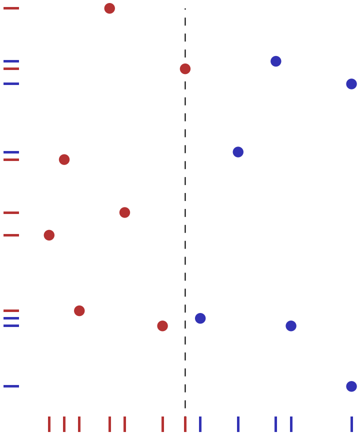
Divide And Conquer

- Punktmenge P, zu Beginn $P \leftarrow Q$
- Arrays X und Y, welche die Punkte aus P enthalten, sortiert nach x- bzw. nach y-Koordinate.
- Teile Punktmenge ein in zwei (annähernd) gleich grosse Mengen P_L und P_R, getrennt durch vertikale Gerade durch einen Punkt von P.
- Teile Arrays X und Y entsprechend in X_L, X_R. Y_L und Y_R.



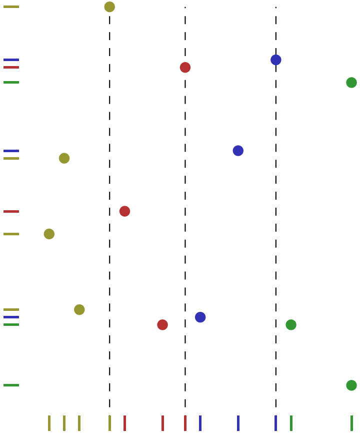
Divide And **Conquer**

- Rekursiver Aufruf jeweils mit P_L, X_L, Y_L und P_R, X_R, Y_R. Erhalte minimale Abstände δ_L, δ_R.



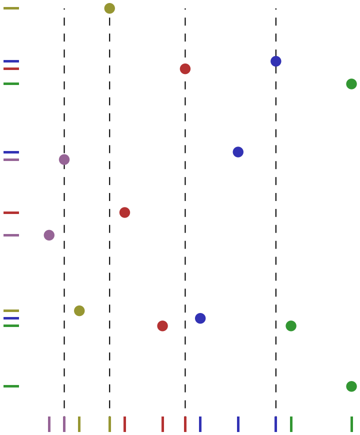
Divide And **Conquer**

- Rekursiver Aufruf jeweils mit P_L, X_L, Y_L und P_R, X_R, Y_R. Erhalte minimale Abstände δ_L, δ_R.



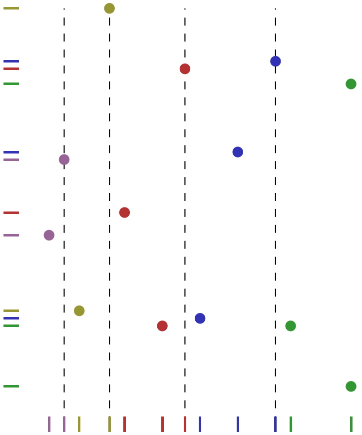
Divide And **Conquer**

- Rekursiver Aufruf jeweils mit P_L, X_L, Y_L und P_R, X_R, Y_R. Erhalte minimale Abstände δ_L, δ_R.
- (Wenn nur noch $k \leq 3$ Punkte: berechne direkt minimalen Abstand)



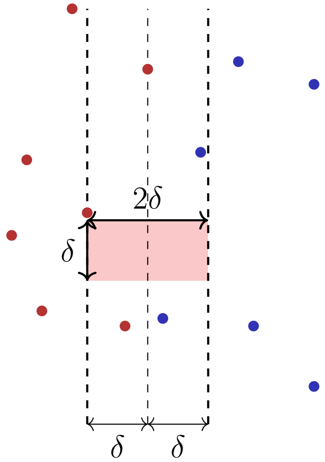
Divide And **Conquer**

- Rekursiver Aufruf jeweils mit P_L, X_L, Y_L und P_R, X_R, Y_R. Erhalte minimale Abstände δ_L, δ_R.
- (Wenn nur noch $k \leq 3$ Punkte: berechne direkt minimalen Abstand)
- Nach reukrsivem Aufruf $\delta = \min(\delta_L, \delta_R)$. Kombiniere (nächste Folie) und gib bestes Resultat zurück.



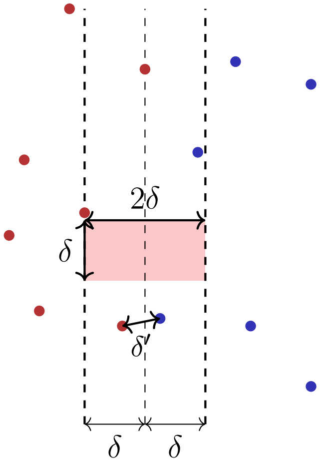
Kombinieren

- Erzeuge Array Y' mit y-sortierten Punkten aus Y, die innerhalb des 2δ Streifens um die Trennlinie befinden



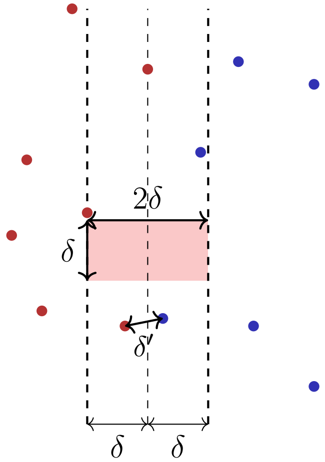
Kombinieren

- Erzeuge Array Y' mit y-sortierten Punkten aus Y, die innerhalb des 2δ Streifens um die Trennlinie befinden
- Betrachte für jeden Punkt $p \in Y'$ die maximal sieben auf p folgenden Punkte mit y-Koordinaten-Abstand kleiner δ. Berechne minimale Distanz δ'.

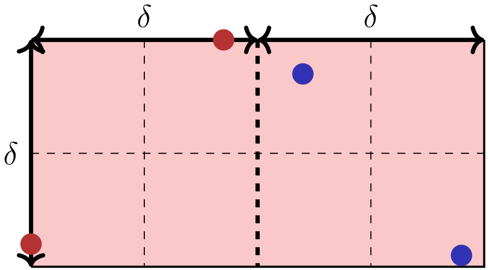


Kombinieren

- Erzeuge Array Y' mit y-sortierten Punkten aus Y, die innerhalb des 2δ Streifens um die Trennlinie befinden
- Betrachte für jeden Punkt $p \in Y'$ die maximal sieben auf p folgenden Punkte mit y-Koordinaten-Abstand kleiner δ. Berechne minimale Distanz δ'.
- Wenn $\delta' < \delta$, dann noch dichteres Paar in P als in P_L und P_R gefunden. Rückgabe der minimalen Distanz.



Maximale Anzahl Punkte im 2δ-Reckteck



Zwei Punkte im $\delta/2 \times \delta/2$-Rechteck haben maximalen Abstand $\frac{\sqrt{2}}{2}\delta < \delta$.
$\Rightarrow$ Quadrat mit Seitenlänge $\delta/2$ kann maximal einen Punkt enthalten.
Acht nicht überlappende $\delta/2 \times \delta/2$-Rechtecke spannen das $2\delta \times \delta$ Rechteck auf.

Implementation

- Ziel: Rekursionsgleichung (Laufzeit) $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + \mathcal{O}(n)$.
- Konsequenz: in den Schritten ist das Sortieren verboten!
- Nichttrivial: nur Arrays Y und Y'
- Idee: Merge umgekehrt: durchlaufe (nach y-Koordinate vorsortiertes) Y und hänge dem Auswahlkriterium der x-Koordinate folgend an Y_L und Y_R an. Genauso für Y'. Laufzeit $\mathcal{O}(|Y|)$.

Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}(n \log n)$.