20. Dynamische Programmierung I

Memoisieren, Optimale Substruktur, Überlappende Teilprobleme, Abhängigkeiten, Allgemeines Vorgehen. Beispiele: Fibonacci, Schneiden von Eisenstangen, Längste aufsteigende Teilfolge, längste gemeinsame Teilfolge, Editierdistanz, Matrixkettenmultiplikation, Matrixmultiplikation nach Strassen

[Ottman/Widmayer, Kap. 1.2.3, 7.1, 7.4, Cormen et al, Kap. 15]

Fibonacci Zahlen

 (schon wieder)

$$F_n := \begin{cases} n & \text{wenn } n < 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{wenn } n \geq 2. \end{cases}$$

Analyse: warum ist der rekursive Algorithmus so langsam.

Algorithmus FibonacciRecursive(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

if $n < 2$ **then**
  $f \leftarrow n$
else
  $f \leftarrow$ FibonacciRecursive$(n-1)$ + FibonacciRecursive$(n-2)$
return f

Analyse

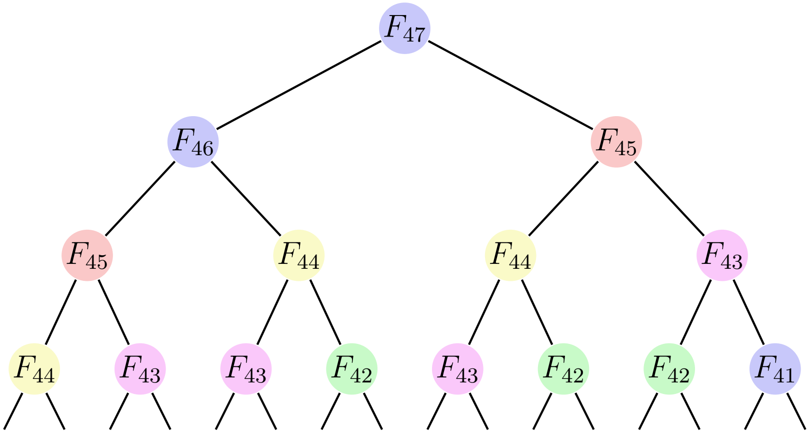
$T(n)$: Anzahl der ausgeführten Operationen.

- $n = 0, 1$: $T(n) = \Theta(1)$
- $n \geq 2$: $T(n) = T(n-2) + T(n-1) + c$.

$$T(n) = T(n-2) + T(n-1) + c \geq 2T(n-2) + c \geq 2^{n/2}c' = (\sqrt{2})^n c'$$

Algorithmus ist **exponentiell (!)** in n.

Grund, visualisiert



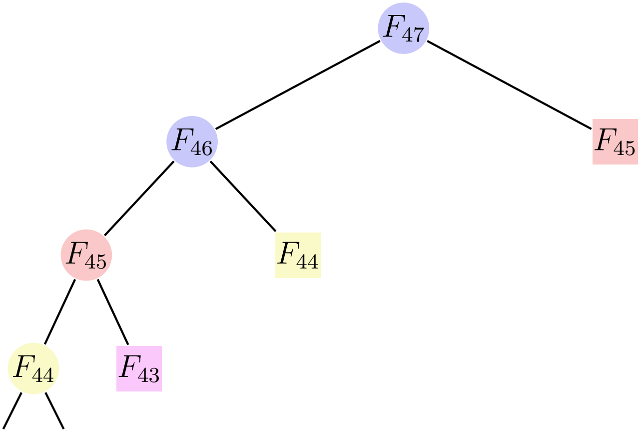
Knoten mit denselben Werten werden (zu) oft ausgewertet.

Memoization

Memoization (sic) Abspeichern von Zwischenergebnissen.

- Bevor ein Teilproblem gelöst wird, wird Existenz eines entsprechenden Zwischenergebnis geprüft.
- Existiert ein gespeichertes Zwischenergebnis bereits, so wird dieses verwendet.
- Andernfalls wird der Algorithmus ausgeführt und das Ergebnis wird entsprechend gespeichert.

Memoization bei Fibonacci



Rechteckige Knoten wurden bereits ausgewertet.

Algorithmus FibonacciMemoization(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

if $n \leq 2$ **then**
    $f \leftarrow 1$
else if $\exists$memo$[n]$ **then**
    $f \leftarrow$ memo$[n]$
else
    $f \leftarrow$ FibonacciMemoization$(n-1)$ + FibonacciMemoization$(n-2)$
    memo$[n] \leftarrow f$

return f

Analyse

Berechnungsaufwand:

$$T(n) = T(n-1) + c = ... = \mathcal{O}(n).$$

denn nach dem Aufruf von $f(n-1)$ wurde $f(n-2)$ bereits berechnet.

Das lässt sich auch so sehen: Für jedes n wird $f(n)$ maximal einmal rekursiv berechnet. Laufzeitkosten: n Aufrufe mal $\Theta(1)$ Kosten pro Aufruf $n \cdot c \in \Theta(n)$. Die Rekursion verschwindet aus der Berechnung der Laufzeit.

Algorithmus benötigt $\Theta(n)$ Speicher.[31]

[31]Allerdings benötigt der naive Algorithmus auch $\Theta(n)$ Speicher für die Rekursionsverwaltung.

Genauer hingesehen …

… berechnet der Algorithmus der Reihe nach die Werte F_1, F_2, F_3, … verkleidet im **Top-Down** Ansatz der Rekursion.

Man kann den Algorithmus auch gleich **Bottom-Up** hinschreiben. Das ist charakteristisch für die **dynamische Programmierung**.

Algorithmus FibonacciBottomUp(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

$F[1] \leftarrow 1$
$F[2] \leftarrow 1$
for $i \leftarrow 3, \ldots, n$ **do**
  $F[i] \leftarrow F[i-1] + F[i-2]$

return $F[n]$

Dynamische Programmierung: Idee

- Aufteilen eines komplexen Problems in eine vernünftige Anzahl kleinerer Teilprobleme
- Die Lösung der Teilprobleme wird zur Lösung des komplexeren Problems verwendet
- Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

Dynamische Programmierung: Konsequenz

Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

$\Rightarrow$ Resultate werden zwischengespeichert

Wir tauschen Laufzeit gegen Speicherplatz

Dynamic Programming = Divide-And-Conquer ?

- In beiden Fällen ist das Ursprungsproblem (einfacher) lösbar, indem Lösungen von Teilproblemen herangezogen werden können. Das Problem hat **optimale Substruktur**.
- Bei klassischen Divide-And-Conquer Algorithmen (z.B. Mergesort) sind Teilprobleme unabhängig; deren Lösungen werden im Algorithmus nur einmal benötigt.
- Beim DP sind Teilprobleme nicht unabhängig. Das Problem hat **überlappende Teilprobleme**, welche im Algorithmus mehrfach gebraucht werden.
- Damit sie nur einmal gerechnet werden müssen, werden Resultate tabelliert. Dafür darf es **zwischen Teilproblemen keine zirkulären Abhängigkeiten** geben.

Dynamic Programming: Beschreibung

1. Verwalte **DP-Tabelle** mit Information zu den Teilproblemen.
   Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?
2. Berechnung der **Randfälle**.
   Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?
3. **Berechnungsreihenfolge** bestimen.
   In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?
4. Auslesen der **Lösung**.
   Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

Laufzeit (typisch) = Anzahl Einträge der Tabelle mal Aufwand pro Eintrag.

Dynamic Programming: Beschreibung (Fibonacci)

1. Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält n-te Fibonacci Zahl.

2. Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?

   Werte F_1 und F_2 sind unabhängig einfach “berechenbar”.

3. Berechnungsreihenfolge?

   F_i mit aufsteigenden i.

4. Rekonstruktion einer Lösung?

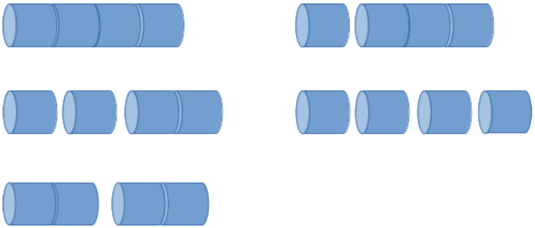
   F_n ist die n-te Fibonacci-Zahl.

Schneiden von Eisenstäben

- Metallstäbe werden zerschnitten und verkauft.
- Metallstäbe der Länge $n \in \mathbb{N}$ verfügbar. Zerschneiden kostet nichts.
- Für jede Länge $l \in \mathbb{N}$, $l \leq n$ bekannt: Wert $v_l \in \mathbb{R}^+$
- Ziel: Zerschneide die Stange so (in $k \in \mathbb{N}$ Stücke), dass

$$\sum_{i=1}^{k} v_{l_i} \text{ maximal unter } \sum_{i=1}^{k} l_i = n.$$

Schneiden von Eisenstäben: Beispiel



Arten, einen Stab der Länge 4 zu zerschneiden (ohne Permutationen)

Länge	0	1	2	3	4
Preis	0	2	3	8	9

$\Rightarrow$ Bester Schnitt: 3 + 1 mit Wert 10.

Wie findet man den DP Algorithmus

0. Genaue Formulierung der gesuchten Lösung
1. Definiere Teilprobleme, reformuliere (0.) als Teilproblem
2. Rekursion: verbinde die Teilprobleme durch Aufzählen lokaler Eigenschaften
3. Bestimme die Abhängigkeiten der Teilprobleme
4. Lösung des Problems
   Laufzeit = #Teilprobleme $\times$ Zeit/Teilproblem

Struktur des Problems

0. **Gesucht:** r_n = maximal erreichbarer Wert von (ganzem oder geschnittenem) Stab mit Länge n.
1. **Teilprobleme:** maximal erreichbarer Wert r_k für alle $0 \leq k < n$
2. Lokale Eigenschaft: Länge des ersten Stückes
   Rekursion

$$
\begin{aligned}
r_k &= \max\{v_i + r_{k-i} : 0 < i \leq k\}, \quad k > 0 \\
r_0 &= 0
\end{aligned}
$$

3. **Abhängigkeit:** r_k hängt (nur) ab von den Werten v_i, $l \leq i \leq k$ und den optimalen Schnitten r_i, $i < k$.
4. **Lösung** in r_n. DP-Laufzeit: $\Theta(n^2)$

Algorithmus RodCut(v,n) (ohne Memoization)

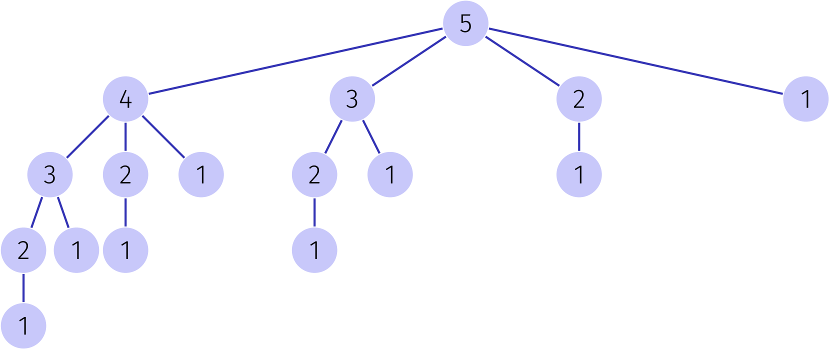
Input: $n \geq 0$, Preise v
Output: bester Wert

$q \leftarrow 0$
if $n > 0$ **then**
  for $i \leftarrow 1, \dots, n$ **do**
    $q \leftarrow \max\{q, v_i + \mathsf{RodCut}(v, n - i)\}$;
return q

Laufzeit $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + c \quad \Rightarrow^{32} \quad T(n) \in \Theta(2^n)$

[32] $T(n) = T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + c = T(n-1) + (T(n-1) - c) + c = 2T(n-1) \quad (n > 0)$

Rekursionsbaum



Algorithmus RodCutMemoized(m, v, n)

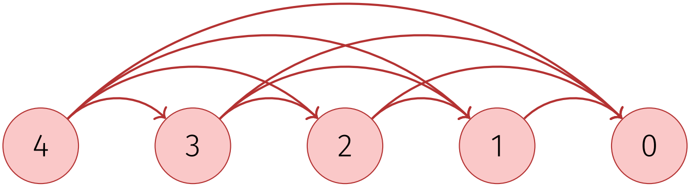
Input: $n \geq 0$, Preise v, Memoization Tabelle m
Output: bester Wert

```
q ← 0
if n > 0 then
    if ∃ m[n] then
        q ← m[n]
    else
        for i ← 1, ..., n do
            q ← max{q, v_i + RodCutMemoized(m, v, n − i)};
        m[n] ← q
return q
```

Laufzeit $\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$

Teilproblem-Graph

beschreibt die Abhängigkeiten der Teilprobleme untereinander



und darf keine Zyklen enthalten

Konstruktion des optimalen Schnittes

- Während der (rekursiven) Berechnung der optimalen Lösung für jedes $k \leq n$ bestimmt der rekursive Algorithmus die optimale Länge des ersten Stabes
- Speichere die Länge des ersten Stabes für jedes $k \leq n$ in einer Tabelle mit n Einträgen.

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält besten Wert eines Stabes der Länge n.

2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

   Wert r_0 ist 0.

3. **Berechnungsreihenfolge?**

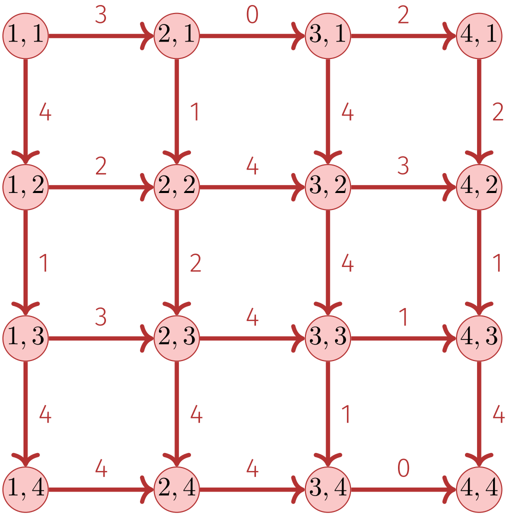
   r_i, $i = 1, \ldots, n$.

4. **Rekonstruktion einer Lösung?**

   r_n ist der beste Wert für eine Stange der Länge n

Kaninchen!

Ein Kaninchen sitzt auf Platz $(1,1)$ eines $n \times n$ Gitters. Es kann nur nach Osten oder nach Süden gehen. Auf jedem Wegstück liegt eine Anzahl Rüben. Wie viele Rüben sammelt das Kaninchen maximal ein?

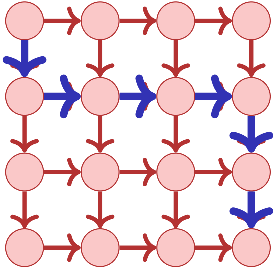


Kaninchen!

Anzahl mögliche Pfade?

- Auswahl von $n-1$ Wegen nach Süden aus $2n-2$ Wegen insgesamt.
- $$\binom{2n-2}{n-1} \in \Omega(2^n)$$

$\Rightarrow$ Naiver Algorithmus hat keine Chance



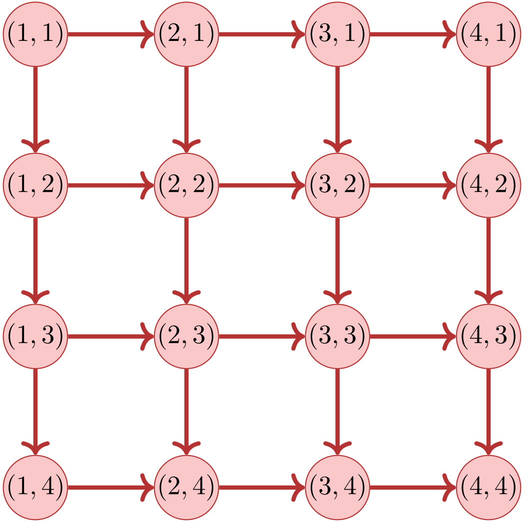
Der Weg 100011
(1:nach Süden, 0:nach Osten)

Rekursion

Gesucht: $T_{1,1}$ **= Maximale Anzahl Rüben von** $(1,1)$ **nach** (n,n)**.**
Sei $w_{(i,j)-(i',j')}$ Anzahl Rüben auf Kante von (i,j) nach (i',j').
Rekursion (maximale Anzahl Rüben von (i,j) nach (n,n))

$$T_{ij} = \begin{cases} \max\{w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}\}, & i < n, j < n \\ w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, & i = n, j < n \\ w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}, & i < n, j = n \\ 0 & i = j = n \end{cases}$$

Teilproblemabhängigkeitsgraph



Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

   Tabelle T der Grösse $n \times n$. Eintrag bei i, j enthält die maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n).

2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

   Wert $T_{n,n}$ ist 0.

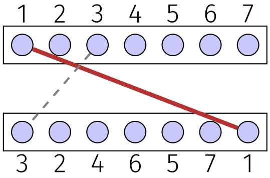
3. **Berechnungsreihenfolge?**

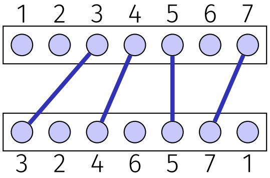
   $T_{i,j}$ mit $i = n \searrow 1$ und für jedes i: $j = n \searrow 1$, (oder umgekehrt: $j = n \searrow 1$ und für jedes j: $i = n \searrow 1$).

4. **Rekonstruktion einer Lösung?**

   $T_{1,1}$ enthält die maximale Anzahl Rüben

Längste aufsteigende Teilfolge (LAT)

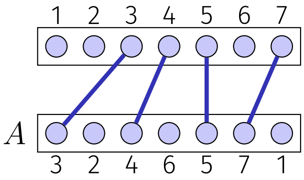




Verbinde so viele passende Anschlüsse wie möglich, ohne dass sich die Anschlüsse kreuzen.

Formalisieren

- Betrachte Folge $A_n = (a_1, \ldots, a_n)$.
- Suche eine längste aufsteigende Teilfolge von A_n.
- Beispiele aufsteigender Teilfolgen: $(3, 4, 5)$, $(2, 4, 5, 7)$, $(3, 4, 5, 7)$, $(3, 7)$.



Verallgemeinerung: Lasse Zahlen ausserhalb von $1, ..., n$ zu, auch mit Mehrfacheinträgen. (Weitehrhin aber nur strikt aufsteigende Teilfolgen)
Beispiel: (2,3,3,3,5,1) mit aufsteigender Teilfolge (2,3,5).

Erster Entwurf (Greedy)

Sei L_i **= längste Teilfolge von** A_i**,** **(**$1 \leq i \leq n$**).**

Annahme: LAT L_k von A_k bekannt. Berechne LAT L_{k+1} für A_{k+1}.

Idee

$$L_{k+1} = \begin{cases} L_k \oplus a_{k+1} & \text{if } a_k > \max(L_k) \\ L_k & \text{sonst?} \end{cases}$$

Gegenbeispiel

$A_5 = (1, 2, 5, 3, 4)$.

$A_3 = (1, 2, 5)$ mit $L_3 = A_3$ und $L_4 = A_3$.

Gierige Idee versagt hier: können nicht einfach von L_k auf L_{k+1} schliessen.

Zweiter Entwurf (Prefix)

Sei L_i **= längste Teilfolge von** A_i**,** **(**$1 \leq i \leq n$**).**

Annahme: eine LAT L_j die mit a_j endet, bekannt für alle $j \leq k$. Wollen nun LAT L_{k+1} für $k+1$ berechnen.

Idee: betrachte alle passenden $L_{k+1} = L_j \oplus a_{k+1}$ $(j \leq k)$ und wähle eine längste solche Folge.

Beispiel

$A_5 = (1, 2, 5, 3, 4)$.
$L_1 = (1)$, $L_2 = (1, 2)$, $L_3 = (1, 2, 5)$, $L_4 = (1, 2, 3)$, $L_5 = (1, 2, 3, 4)$.

Das funktioniert mit Laufzeit n^2 (und benötigt Zugriff auf alle Folgen L_i)

Dritter Entwurf

Sei $M_{n,i}$ **= längste Teilfolge von** A_n **der Länge** i **(**$1 \leq i \leq n$**)**
Annahme: die LAT $M_{k,j}$ für A_k, **welche mit kleinstem Element enden** seien für alle Längen $1 \leq j \leq k$ bekannt.
Betrachte nun alle passenden $M_{k,j} \oplus a_{k+1}$ $(j \leq k)$ und aktualisiere die Tabelle der längsten aufsteigenden Folgen, welche mit kleinstem Element enden.

Dritter Entwurf Beispiel

Beispiel: $A = (1, 1000, 1001, 4, 5, 2, 6, 7)$

A	LAT $M_{k,\cdot}$
1	$(\mathbf{1})$
$+\ 1000$	$(1), (1, \mathbf{1000})$
$+\ 1001$	$(1), (1, 1000), (1, 1000, \mathbf{1001})$
$+\ 4$	$(1), (1, \mathbf{4}), (1, 1000, 1001)$
$+\ 5$	$(1), (1, 4), (1, 4, \mathbf{5})$
$+\ 2$	$(1), (1, \mathbf{2}), (1, 4, 5)$
$+\ 6$	$(1), (1, 2), (1, 4, 5), (1, 4, 5, \mathbf{6})$
$+\ 7$	$(1), (1, 2), (1, 4, 5), (1, 4, 5, 6), (1, 4, 5, 6, \mathbf{7})$

DP Table

- Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge $M_{k,j}$ am Slot j.
- Beispielfolge:
  13 12 15 11 16 14
- Problem: Tabelle enthält zum Schluss nicht die Folge, nur den letzten Wert.
- Lösung: Zweite Tabelle mit den Werten der Vorgänger.

i	1	2	3	4	5	6
Wert a_i	13	12	15	11	16	14
Vorgänger	$-\infty$	$-\infty$	12	$-\infty$	15	11

j	0	1	2	3	4	...
$(L_j)_j$	$-\infty$	11	14	16	∞	

Dynamic Programming Algorithmus LAT

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Zwei Tabellen $T[0, \ldots, n]$ und $V[1, \ldots, n]$. $T[j]$: letztes Element der aufsteigenden Folge $M_{n,j}$
   $V[j]$: Wert des Vorgängers von a_j.
   Zu Beginn $T[0] \leftarrow -\infty$, $T[i] \leftarrow \infty \; \forall i > 1$

Berechnung eines Eintrags

2. Einträge in T aufsteigend sortiert. Für jeden Neueintrag a_k binäre Suche nach l, so dass $T[l] < a_k < T[l+1]$. Setze $T[l+1] \leftarrow a_k$. Setze $V[k] = T[l]$.

Dynamic Programming Algorithmus LAT

Berechnungsreihenfolge

3. Beim Traversieren der Liste werden die Einträge $T[k]$ und $V[k]$ mit aufsteigendem k berechnet.

Rekonstruktion einer Lösung?

4. Suche das grösste l mit $T[l] < \infty$. l ist der letzte Index der LAT. Suche von l ausgehend den Index $i < l$, so dass $V[l] = a_i$, i ist der Vorgänger von l. Repetiere mit $l \leftarrow i$ bis $T[l] = -\infty$

Analyse

- Berechnung Tabelle:
  - Initialisierung: $\Theta(n)$ Operationen
  - Berechnung k-ter Eintrag: Binäre Suche auf Positionen $\{1, \ldots, k\}$ plus konstante Anzahl Zuweisungen.

$$\sum_{k=1}^{n} (\log k + \mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(n) + \sum_{k=1}^{n} \log(k) = \Theta(n \log n).$$

- Rekonstruktion: Traversiere A von rechts nach links: $\mathcal{O}(n)$.

Somit Gesamtlaufzeit

$$\Theta(n \log n).$$

20.7 Editierdistanz

Minimale Editierdistanz

Editierdistanz von zwei Zeichenketten $A_n = (a_1, \ldots, a_n)$, $B_m = (b_1, \ldots, b_m)$.
Editieroperationen:

- Einfügen eines Zeichens
- Löschen eines Zeichens
- Änderung eines Zeichens

Frage: Wie viele Editieroperationen sind mindestens nötig, um eine gegebene Zeichenkette A in eine Zeichenkette B zu überführen.

TIGER $\rightarrow$ ZIGER $\rightarrow$ ZIEGER $\rightarrow$ ZIEGE

Minimale Editierdistanz

Gesucht: Günstigste zeichenweise Transformation $A_n \to B_m$ mit Kosten

Operation	Levenshtein	LGT[33]	allgemein
c einfügen	1	1	ins(c)
c löschen	1	1	del(c)
Ersetzen $c \to c'$	$\mathbb{1}(c \neq c')$	$\infty \cdot \mathbb{1}(c \neq c')$	repl(c, c')

Beispiel

T	I	G	E	R		T	I	_	G	E	R		T$\rightarrow$Z	+E	-R
Z	I	E	G	E		Z	I	E	G	E	_		Z$\rightarrow$T	-E	+R

[33] Längste gemeinsame Teilfolge – Spezialfall des Editierproblems

Idee

Z I E G E $\rightarrow$ T I G E R

Möglichkeiten

1. $$c(\texttt{'ZIEG'} \rightarrow \texttt{'TIGE'}) + c(\texttt{'E'} \rightarrow \texttt{'R'})$$

   Z I E G **E** $\rightarrow$ T I G E **R**

2. $$c(\texttt{'ZIEGE'} \rightarrow \texttt{'TIGE'}) + c(\mathsf{ins}(\texttt{'R'}))$$

   Z I E G E $\rightarrow$ T I G E **+ R**

3. $$c(\texttt{'ZIEG'} \rightarrow \texttt{'TIGER'}) + c(\mathsf{del}(\texttt{'E'}))$$

   Z I E G E **- E** $\rightarrow$ T I G E R

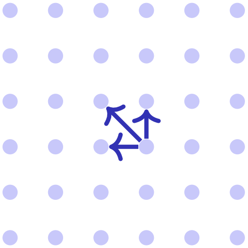
DP

0. $E(n, m)$ = minimale Anzahl Editieroperationen (ED Kosten) für $a_{1...n} \to b_{1...m}$
1. Teilprobleme $E(i, j)$ = ED von $a_{1...i}$, $b_{1...j}$. #TP $= n \cdot m$
2. Raten/Probieren Kosten$\Theta(1)$
   - $a_{1..i} \to a_{1...i-1}$ (löschen)
   - $a_{1..i} \to a_{1...i}b_j$ (einfügen)
   - $a_{1..i} \to a_{1...i-1}b_j$ (ersetzen)
3. Rekursion

$$E(i, j) = \min \begin{cases} \text{del}(a_i) + E(i-1, j), \\ \text{ins}(b_j) + E(i, j-1), \\ \text{repl}(a_i, b_j) + E(i-1, j-1) \end{cases}$$

DP

4. Abhängigkeiten



$\Rightarrow$ Berechnung von links oben nach rechts unten. Zeilen- oder Spaltenweise.

5. Lösung steht in $E(n, m)$

Beispiel (Levenshteinabstand)

$$E[i,j] \leftarrow \min\left\{E[i-1,j]+1, E[i,j-1]+1, E[i-1,j-1]+\mathbb{1}(a_i \neq b_j)\right\}$$

	∅	Z	I	E	G	E
∅	0	1	2	3	4	5
T	1	1	2	3	4	5
I	2	2	1	2	3	4
G	3	3	2	2	2	3
E	4	4	3	2	3	2
R	5	5	4	3	3	3

Editierschritte: von rechts unten nach links oben, der Rekursion folgend.

Bottom-Up DP Algorithmus ED

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Tabelle $E[0,\ldots,m][0,\ldots,n]$. $E[i,j]$: Minimaler Editierabstand der Zeichenketten $(a_1,\ldots,a_i)$ und $(b_1,\ldots,b_j)$

Berechnung eines Eintrags

2. $E[0,i] \leftarrow i\ \forall 0 \leq i \leq m$, $E[j,0] \leftarrow i\ \forall 0 \leq j \leq n$. Berechnung von $E[i,j]$ sonst mit $E[i,j] = \min\{\text{del}(a_i)+E(i-1,j), \text{ins}(b_j)+E(i,j-1), \text{repl}(a_i,b_j)+E(i-1,j-1)\}$

Bottom-Up DP Algorithmus ED

3.

Berechnungsreihenfolge

Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.

Rekonstruktion einer Lösung?

4.

Beginne bei $j = m$, $i = n$. Falls $E[i,j] = \text{repl}(a_i, b_j) + E(i-1, j-1)$ gilt, gib $a_i \to b_j$ aus und fahre fort mit $(j,i) \leftarrow (j-1, i-1)$; sonst, falls $E[i,j] = \text{del}(a_i) + E(i-1, j)$ gib $\text{del}(a_i)$ aus fahre fort mit $j \leftarrow j-1$; sonst, falls $E[i,j] = \text{ins}(b_j) + E(i, j-1)$, gib $\text{ins}(b_j)$ aus und fahre fort mit $i \leftarrow i-1$. Terminiere für $i = 0$ und $j = 0$.

Analyse ED

- Anzahl Tabelleneinträge: $(m+1) \cdot (n+1)$.
- Berechnung jeweils mit konstanter Anzahl Zuweisungen und Vergleichen. Anzahl Schritte $\mathcal{O}(mn)$
- Bestimmen der Lösung: jeweils Verringerung von i oder j. Maximal $\mathcal{O}(n+m)$ Schritte.

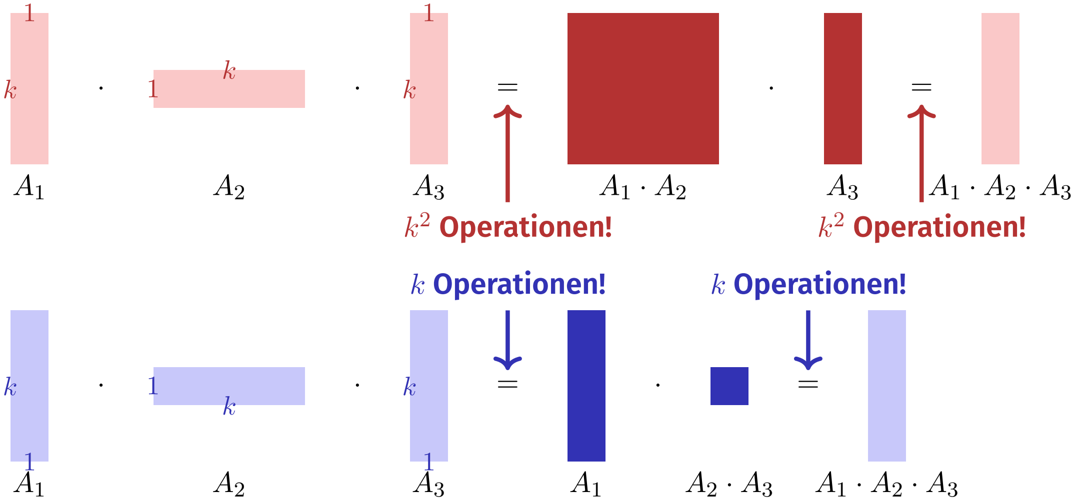
Laufzeit insgesamt:

$$\mathcal{O}(mn).$$

Matrix-Kettenmultiplikation

Aufgabe: Berechnung des Produktes $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n$ von Matrizen $A_1, \ldots, A_n$.
Matrizenmultiplikation ist assoziativ, d.h. Klammerung kann beliebig gewählt werden.
Ziel: möglichst effiziente Berechnung des Produktes.
Annahme: Multiplikation einer $(r \times s)$-Matrix mit einer $(s \times u)$-Matrix hat Kosten $r \cdot s \cdot u$.

Macht das einen Unterschied?



Rekursion

- Annahme, dass die bestmögliche Berechnung von $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_i)$ und $(A_{i+1} \cdot A_{i+2} \cdots A_n)$ für jedes i bereits bekannt ist.
- Bestimme bestes i, fertig.

$n \times n$-Tabelle M. Eintrag $M[p,q]$ enthält Kosten der besten Klammerung von $(A_p \cdot A_{p+1} \cdots A_q)$.

$$M[p,q] \leftarrow \min_{p \le i < q} \left(M[p,i] + M[i+1,q] + \text{Kosten letzte Multiplikation} \right)$$

Berechnung der DP-Tabelle

- Randfälle: $M[p, p] \leftarrow 0$ für alle $1 \leq p \leq n$.
- Berechnung von $M[p, q]$ hängt ab von $M[i, j]$ mit $p \leq i \leq j \leq q$, $(i, j) \neq (p, q)$.
  Insbesondere hängt $M[p, q]$ höchstens ab von Einträgen $M[i, j]$ mit $i - j < q - p$.
  Folgerung: Fülle die Tabelle von der Diagonale ausgehend.

Analyse

DP-Tabelle hat n^2 Einträge. Berechung eines Eintrages bedingt Betrachten von bis zu $n-1$ anderen Einträgen.
Gesamtlaufzeit $\mathcal{O}(n^3)$.

Auslesen der Reihenfolge aus M: Übung!

Exkurs: Matrixmultiplikation

Betrachten Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen.
Seien

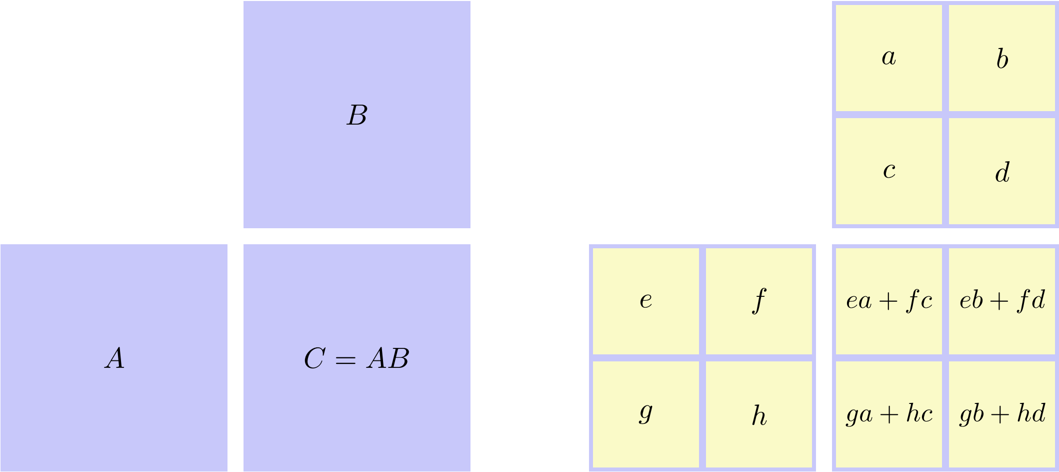
$$
\begin{aligned}
&A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}, B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}, C = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n},\\
&C = A \cdot B
\end{aligned}
$$

dann

$$
c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.
$$

Naiver Algorithmus benötigt $\Theta(n^3)$ elementare Multiplikationen.

Divide and Conquer



Divide and Conquer

- Annahme $n = 2^k$.
- Anzahl elementare Multiplikationen: $M(n) = 8M(n/2)$, $M(1) = 1$.
- Ergibt $M(n) = 8^{\log_2 n} = n^{\log_2 8} = n^3$. Kein Gewinn

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & a & b \\
 & & c & d \\
\hline
e & f & ea + fc & eb + fd \\
g & h & ga + hc & gb + hd
\end{array}
$$

Strassens Matrixmultiplikation

- Nichttriviale Beobachtung von Strassen (1969):
  Es genügt die Berechnung der sieben Produkte
  $A = (e+h)\cdot(a+d)$, $B = (g+h)\cdot a$, $C = e\cdot(b-d)$,
  $D = h\cdot(c-a)$, $E = (e+f)\cdot d$, $F = (g-e)\cdot(a+b)$,
  $G = (f-h)\cdot(c+d)$. Denn:
  $ea + fc = A + D - E + G$, $eb + fd = C + E$,
  $ga + hc = B + D$, $gb + hd = A - B + C + F$.
- Damit ergibt sich $M'(n) = 7M(n/2)$, $M'(1) = 1$.
  Also $M'(n) = 7^{\log_2 n} = n^{\log_2 7} \approx n^{2.807}$.
- Schnellster bekannter Algorithmus: $\mathcal{O}(n^{2.37})$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$