16. Natürliche Suchbäume

[Ottman/Widmayer, Kap. 5.1, Cormen et al, Kap. 12.1 - 12.3]

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing:

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing: im schlechtesten Fall lineare Zugriffszeit. Manche Operationen gar nicht unterstützt:

- Aufzählen von Schlüssel in aufsteigender Anordnung

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing: im schlechtesten Fall lineare Zugriffszeit. Manche Operationen gar nicht unterstützt:

- Aufzählen von Schlüssel in aufsteigender Anordnung
- Nächst kleinerer Schlüssel zu gegebenem Schlüssel

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing: im schlechtesten Fall lineare Zugriffszeit. Manche Operationen gar nicht unterstützt:

- Aufzählen von Schlüssel in aufsteigender Anordnung
- Nächst kleinerer Schlüssel zu gegebenem Schlüssel
- Schlüssel k in vorgegebenem Intervall $k \in [l, r]$

Bäume

Bäume sind

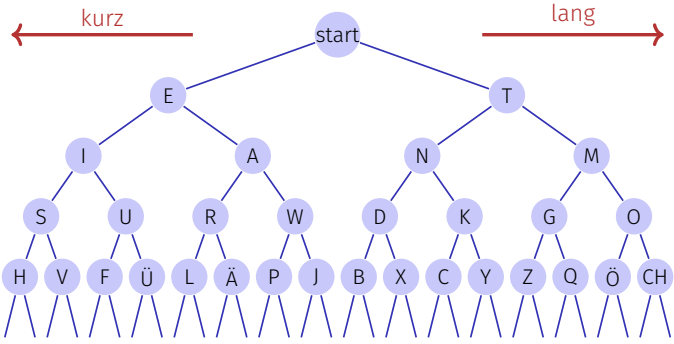
- Verallgemeinerte Listen: Knoten können mehrere Nachfolger haben
- Spezielle Graphen: Graphen bestehen aus Knoten und Kanten. Ein Baum ist ein zusammenhängender, gerichteter, azyklischer Graph.

Bäume

Verwendung

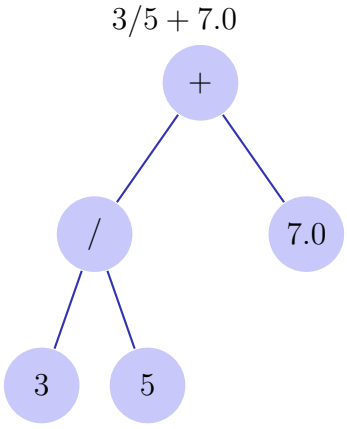
- Entscheidungsbäume: Hierarchische Darstellung von Entscheidungsregeln
- Syntaxbäume: Parsen und Traversieren von Ausdrücken, z.B. in einem Compiler
- Codebäume: Darstellung eines Codes, z.B. Morsealphabet, Huffmann Code
- Suchbäume: Ermöglichen effizientes Suchen eines Elementes

Beispiele



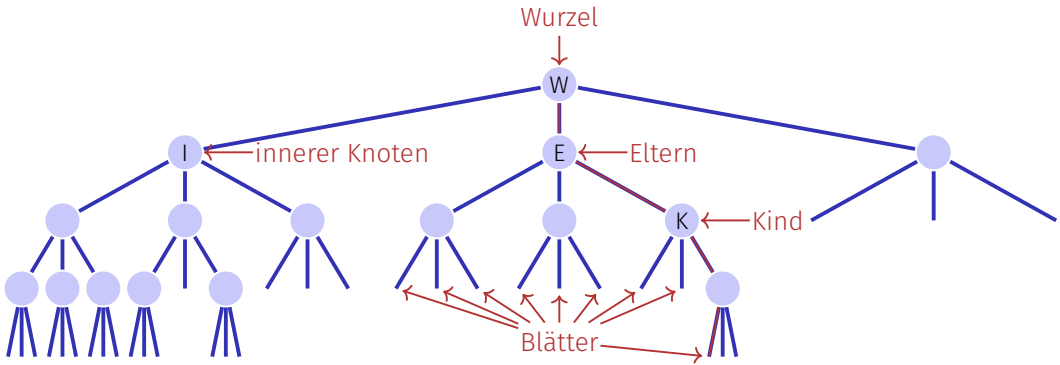
Morsealphabet

Beispiele



Ausdrucksbaum

Nomenklatur



- *Ordnung* des Baumes: Maximale Anzahl Kindknoten (hier: 3)
- *Höhe* des Baumes: Maximale Pfadlänge Wurzel zu Blatt (hier: 4)

Binäre Bäume

Ein *binärer Baum* ist

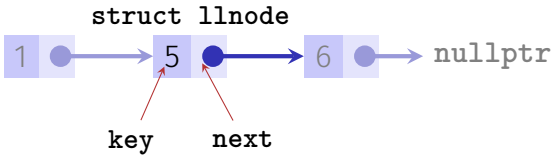
- entweder ein Blatt, d.h. ein leerer Baum,
- oder ein innerer Knoten mit zwei Bäumen T_l (linker Teilbaum) und T_r (rechter Teilbaum) als linken und rechten Nachfolger.

In jedem inneren Knoten **v** wird gespeichert

- ein Schlüssel **v.key** und
- zwei Zeiger **v.left** und **v.right** auf die Wurzeln der linken und rechten Teilbäume.

Ein Blatt wird durch den **null**-Zeiger repräsentiert

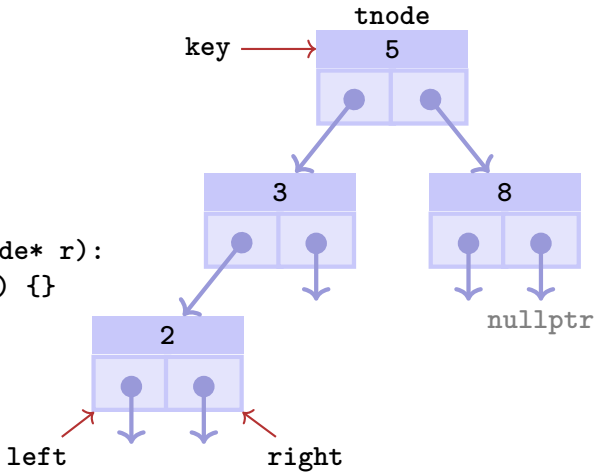
Zur Erinnerung: Listknoten in C++




```
struct llnode {
  int key;
  llnode* next;
  llnode(int k, llnode* n): key(k), next(n) {} // Constructor
};
```

Zur Erinnerung: Baumknoten in C++

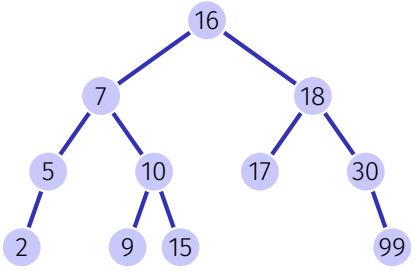
```
struct tnode {
  int key;
  tnode* left;
  tnode* right;
  tnode(int k, tnode* l, tnode* r):
    key(k), left(l), right(r) {}
};
```



Binärer Suchbaum

Ein *binärer Suchbaum* ist ein binärer Baum, der die **Suchbaumeigenschaft** erfüllt:

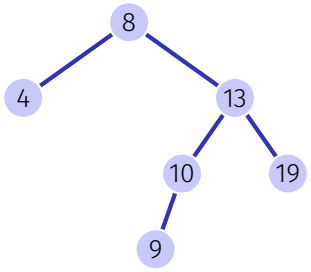
- Jeder Knoten `v` speichert einen Schlüssel
- Schlüssel im linken Teilbaum `v.left` kleiner als `v.key`
- Schlüssel im rechten Teilbaum `v.right` grösser als `v.key`



Suchen

Input: Binärer Suchbaum mit Wurzel r,
Schlüssel k
Output: Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

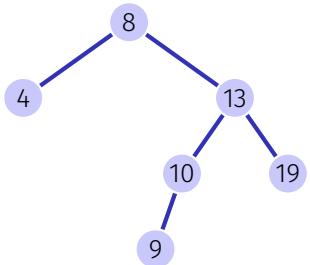
$v \leftarrow r$
while $v \neq$ **null do**
  if $k = v.\text{key}$ **then**
    return v
  else if $k < v.\text{key}$ **then**
    $v \leftarrow v.\text{left}$
  else
    $v \leftarrow v.\text{right}$
return null



Suchen

Input: Binärer Suchbaum mit Wurzel r,
Schlüssel k
Output: Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

$v \leftarrow r$
while $v \neq$ **null do**
  if $k = v.\text{key}$ **then**
    return v
  else if $k < v.\text{key}$ **then**
    $v \leftarrow v.\text{left}$
  else
    $v \leftarrow v.\text{right}$
return null

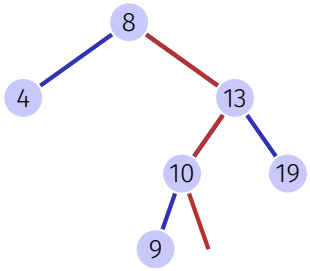


Search (12)

Suchen

Input: Binärer Suchbaum mit Wurzel r,
Schlüssel k
Output: Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

$v \leftarrow r$
while $v \neq$ **null do**
  if $k = v.\text{key}$ **then**
    return v
  else if $k < v.\text{key}$ **then**
    $v \leftarrow v.\text{left}$
  else
    $v \leftarrow v.\text{right}$
return null

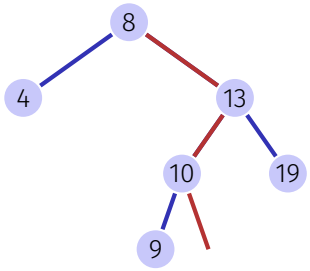


Search (12)

Suchen

Input: Binärer Suchbaum mit Wurzel r,
Schlüssel k
Output: Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

$v \leftarrow r$
while $v \neq$ **null do**
  if $k = v.\text{key}$ **then**
    return v
  else if $k < v.\text{key}$ **then**
    $v \leftarrow v.\text{left}$
  else
    $v \leftarrow v.\text{right}$
return null



Search (12) → **null**

Suchen in C++

```
bool contains(const llnode* root, int search_key) {
  while (root != nullptr) {
    if (search_key == root->key) return true;
    else if (search_key < root->key) root = root->left;
    else root = root->right;
  }

  return false;
}
```

Suchen in C++

```
bool contains(const llnode* root, int search_key) {
  while (root != nullptr) {
    if (search_key == root->key) return true;
    else if (search_key < root->key) root = root->left;
    else root = root->right;
  }

  return false;
}
```

Anmerkungen (pot. auch für späteren Code):

- **`contains`** wäre typischerweise eine Memberfunktion von **`struct tnode`** oder **`class bin_search_tree`** ($\rightarrow$ leicht andere Signatur)
- Rekursive Implementation ebenfalls möglich

Höhe eines Baumes

Die Höhe $h(T)$ eines binären Baumes T mit Wurzel r ist gegeben als

Höhe eines Baumes

Die Höhe $h(T)$ eines binären Baumes T mit Wurzel r ist gegeben als

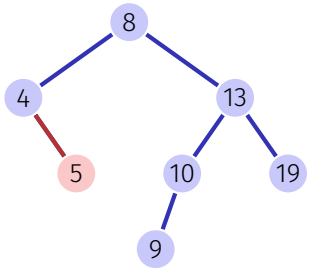
$$h(r) = \begin{cases} 0 & \text{falls } r = \textbf{null} \\ 1 + \max\{h(r.\text{left}), h(r.\text{right})\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Laufzeit der Suche ist somit (im schlechtesten Fall) $\mathcal{O}(h(T))$

Einfügen eines Schlüssels

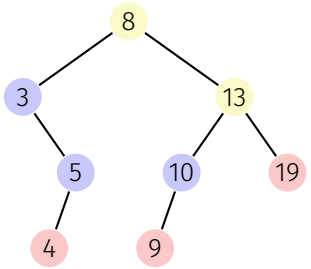
Einfügen des Schlüssels k

- Suche nach k
- Falls erfolgreich: z.B. Fehlerausgabe
- Falls erfolglos: Einfügen des Schlüssels am erreichten Blatt



Knoten entfernen

Drei Fälle möglich

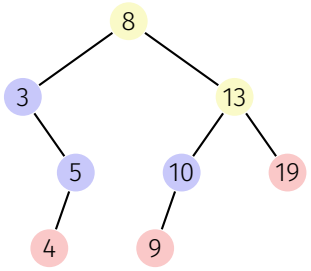


Knoten entfernen

Drei Fälle möglich

- Knoten hat keine Kinder
- Knoten hat ein Kind
- Knoten hat zwei Kinder

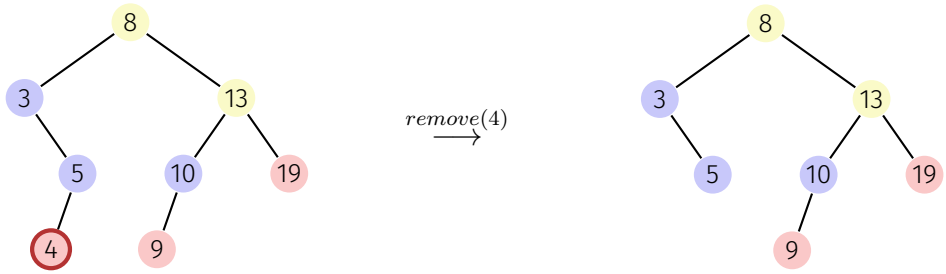
[Blätter zählen hier nicht]



Knoten entfernen

Knoten hat keine Kinder

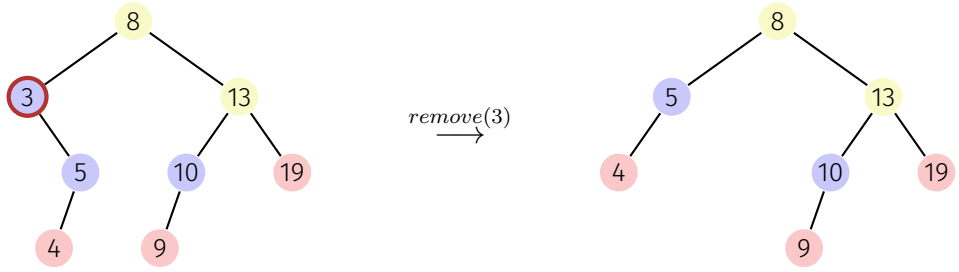
Einfacher Fall: Knoten durch Blatt ersetzen.



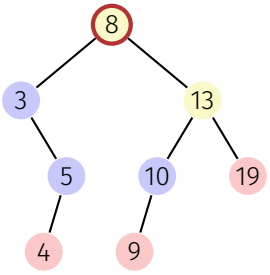
Knoten entfernen

Knoten hat ein Kind

Auch einfach: Knoten durch das einzige Kind ersetzen.



Knoten entfernen

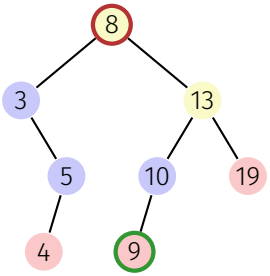


Knoten `v` hat zwei Kinder

Anforderungen an den Ersatzknoten **`w`**:

1. **`w.key`** ist grösser als alle in Schlüssel in **`v.left`**
2. **`w.key`** ist kleiner als alle in Schlüssel in **`v.right`**
3. hat idealerweise keine Kinder

Knoten entfernen



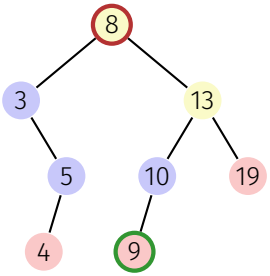
Knoten `v` hat zwei Kinder

Anforderungen an den Ersatzknoten **`w`**:

1. **`w.key`** ist grösser als alle in Schlüssel in **`v.left`**
2. **`w.key`** ist kleiner als alle in Schlüssel in **`v.right`**
3. hat idealerweise keine Kinder

Beobachtung: Der kleinste Schlüssel im rechten Teilbaum **`v.right`** (hier: 9) erfüllt Bedingungen 1, 2; und hat maximal ein (rechtes) Kind.

Knoten entfernen



Knoten `v` hat zwei Kinder

Anforderungen an den Ersatzknoten **`w`**:

1. **`w.key`** ist grösser als alle in Schlüssel in **`v.left`**
2. **`w.key`** ist kleiner als alle in Schlüssel in **`v.right`**
3. hat idealerweise keine Kinder

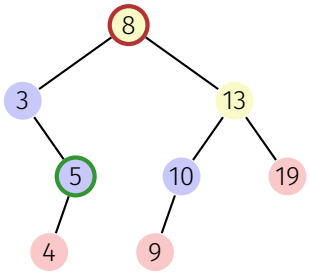
Beobachtung: Der kleinste Schlüssel im rechten Teilbaum **`v.right`** (hier: 9) erfüllt Bedingungen 1, 2; und hat maximal ein (rechtes) Kind.

Lösung: Ersetze **`v`** durch ebenjenen *symmetrischen Nachfolger*.

Aus Symmetriegründen ...

Knoten $\mathbf{v}$ hat zwei Kinder

Auch möglich: ersetze $\mathbf{v}$ durch seinen *symmetrischen Vorgänger*



Algorithmus SymmetricSuccessor(v)

Input: Knoten v eines binären Suchbaumes
Output: Symmetrischer Nachfolger von v

$w \leftarrow v.\text{right}$
$x \leftarrow w.\text{left}$
while $x \neq$ **null do**
    $w \leftarrow x$
    $x \leftarrow x.\text{left}$
return w

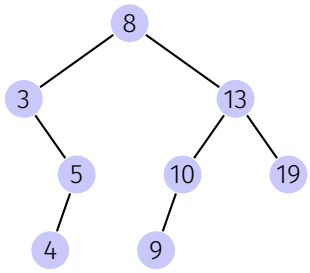
Analyse

Löschen eines Elementes v aus einem Baum T benötigt $\mathcal{O}(h(T))$ Elementarschritte:

- Suchen von v hat Kosten $\mathcal{O}(h(T))$
- Hat v maximal ein Kind ungleich **null**, dann benötigt das Entfernen $\mathcal{O}(1)$
- Das Suchen des symmetrischen Nachfolgers n benötigt $\mathcal{O}(h(T))$ Schritte. Entfernen und Einfügen von n hat Kosten $\mathcal{O}(1)$

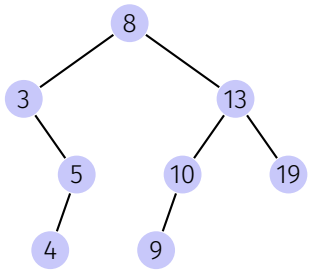
Traversierungsarten

- *Hauptreihenfolge* (*preorder*):
  v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.



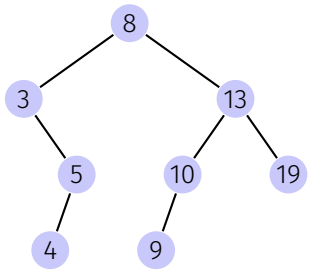
Traversierungsarten

- *Hauptreihenfolge* (*preorder*):
  v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19



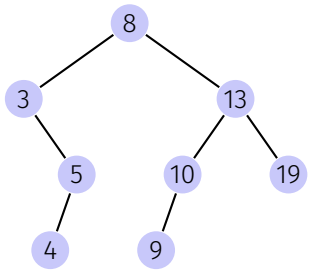
Traversierungsarten

- *Hauptreihenfolge* (*preorder*):
  v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- *Nebenreihenfolge* (*postorder*):
  $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v.



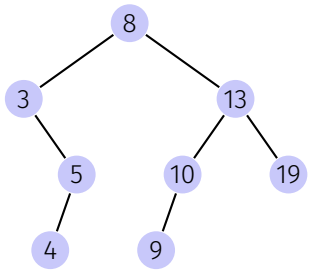
Traversierungsarten

- *Hauptreihenfolge* (*preorder*):
  v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- *Nebenreihenfolge* (*postorder*):
  $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v.
  4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8



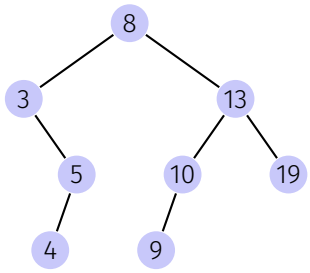
Traversierungsarten

- *Hauptreihenfolge* (*preorder*):
  v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- *Nebenreihenfolge* (*postorder*):
  $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v.
  4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8
- *Symmetrische Reihenfolge* (*inorder*):
  $T_{\text{left}}(v)$, dann v, dann $T_{\text{right}}(v)$.



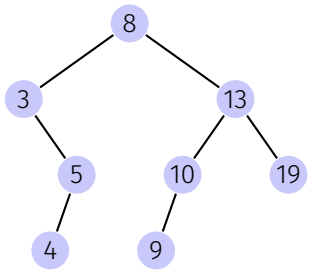
Traversierungsarten

- *Hauptreihenfolge* (*preorder*):
  v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- *Nebenreihenfolge* (*postorder*):
  $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v.
  4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8
- *Symmetrische Reihenfolge* (*inorder*):
  $T_{\text{left}}(v)$, dann v, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 19

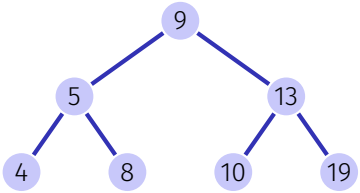


Weitere unterstützte Operationen

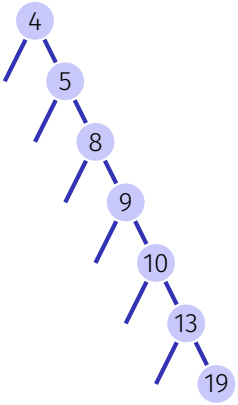
- *Min/Max(T)*: Auslesen des Minimums/Maximums in $\mathcal{O}(h(T))$
- *ExtractMin/Max(T)*: Auslesen und Entfernen des Min/Max in $\mathcal{O}(h(T))$
- *List(T)*: Ausgeben einer sortierten Liste der Elemente von T
- *Join(T_1, T_2)*: Zusammenfügen zweier Bäume mit *Max(T_1)* < *Min(T_2)* in $\mathcal{O}(h(T_1, T_2))$



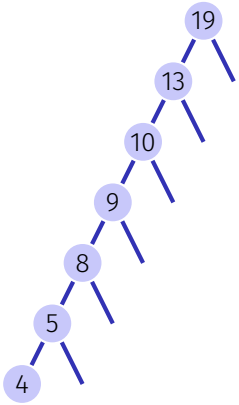
Suchbäume: balanciert vs. degeneriert



insert 9,5,13,4,8,10,19:
bestmöglich
balanciert



insert 4,5,8,9,10,13,19:
lineare Liste



insert 19,13,10,9,8,5,4:
lineare Liste

Probabilistisch

Ein Suchbaum, welcher aus einer zufälligen Sequenz von Zahlen erstellt wird, hat erwartete Pfadlänge von $\mathcal{O}(\log n)$.

Achtung: das gilt nur für Einfügeoperation. Wird der Baum zufällig durch Einfügen und Entfernen gebildet, ist die erwartete Pfadlänge $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.

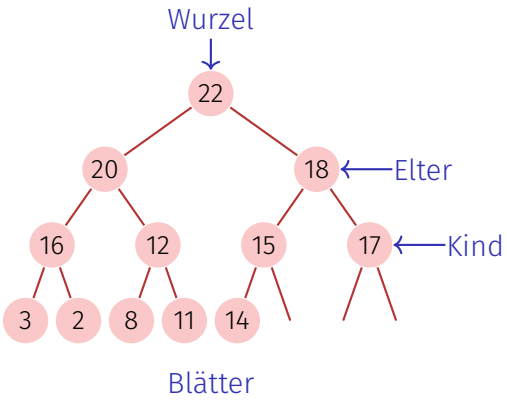
Balancierte Bäume stellen beim Einfügen und Entfernen (z.B. durch *Rotationen*) sicher, dass der Baum balanciert bleibt und liefern eine $\mathcal{O}(\log n)$ Worst-Case-Garantie.

17. Heaps

Datenstruktur optimiert zum schnellen Extrahieren von Minimum oder Maximum und Sortieren. [Ottman/Widmayer, Kap. 2.3, Cormen et al, Kap. 6]

[Max-]Heap*

Binärer Baum mit folgenden Eigenschaften

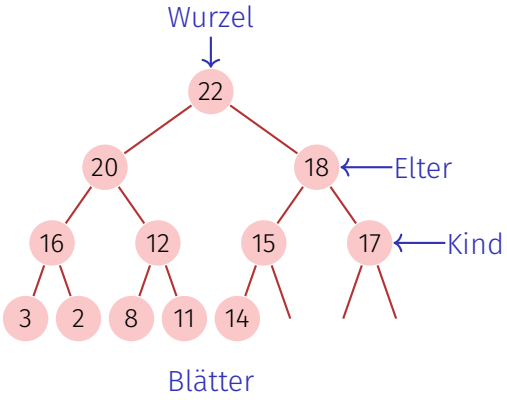


*Heap (Datenstruktur), nicht wie in „Heap und Stack“ (Speicherallokation)

[Max-]Heap*

Binärer Baum mit folgenden Eigenschaften

1. vollständig, bis auf die letzte Ebene

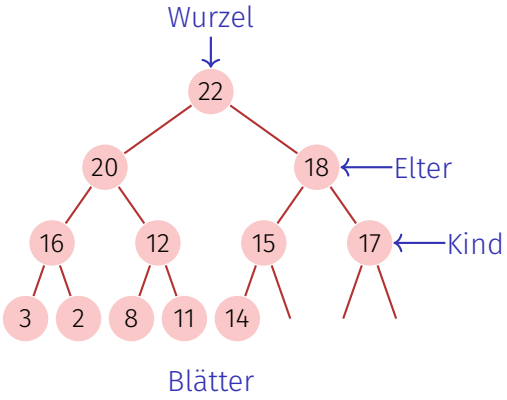


*Heap (Datenstruktur), nicht wie in „Heap und Stack“ (Speicherallokation)

[Max-]Heap*

Binärer Baum mit folgenden Eigenschaften

1. vollständig, bis auf die letzte Ebene
2. Lücken des Baumes in der letzten Ebene höchstens rechts.

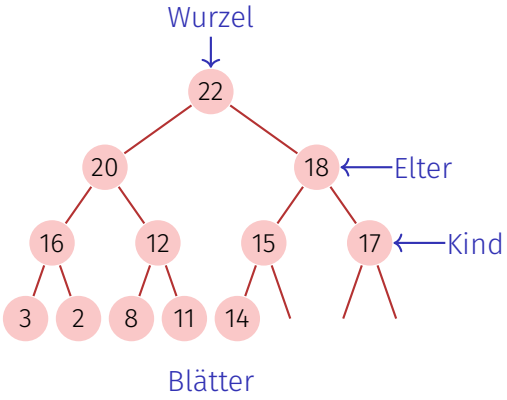


*Heap (Datenstruktur), nicht wie in „Heap und Stack“ (Speicherallokation)

[Max-]Heap*

Binärer Baum mit folgenden Eigenschaften

1. vollständig, bis auf die letzte Ebene
2. Lücken des Baumes in der letzten Ebene höchstens rechts.
3. **Heap-Bedingung:**
   Max-(Min-)Heap: Schlüssel eines Kindes kleiner (grösser) als der des Elternknotens

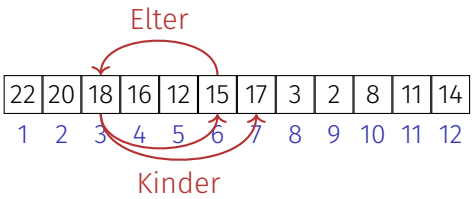


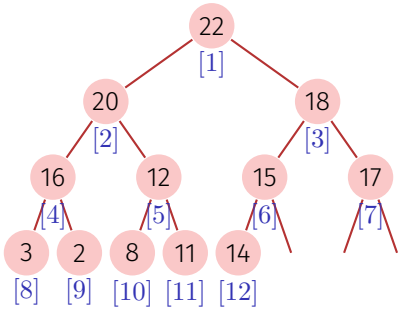
*Heap (Datenstruktur), nicht wie in „Heap und Stack“ (Speicherallokation)

Heap als Array

Baum $\rightarrow$ Array:

- Kinder$(i) = \{2i, 2i+1\}$
- Elter$(i) = \lfloor i/2 \rfloor$





Abhängig vom Startindex![21]

[21] Für Arrays, die bei 0 beginnen: $\{2i, 2i+1\} \rightarrow \{2i+1, 2i+2\}$, $\lfloor i/2 \rfloor \rightarrow \lfloor (i-1)/2 \rfloor$

Höhe eines Heaps

Welche Höhe $H(n)$ hat ein Heap mit n Knoten? Auf der i-ten Ebene eines Binärbaumes befinden sich höchstens 2^i Knoten. Bis auf die letzte Ebene sind alle Ebenen eines Heaps gefüllt.

$$H(n) = \min\{h \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{h-1} 2^i \geq n\}$$

Mit $\sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1$:

$$H(n) = \min\{h \in \mathbb{N} : 2^h \geq n + 1\},$$

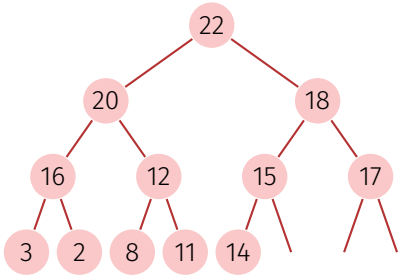
also

$$H(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil.$$

Heap in C++

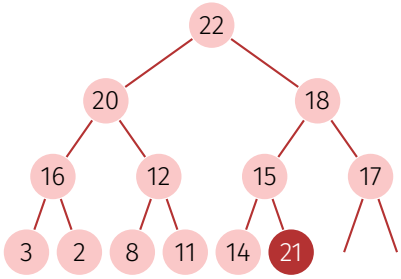
```
class MaxHeap {
  int* keys; // Pointer to first key
  unsigned int capacity; // Length of key array
  unsigned int count; // Keys in use <= capacity
  // Or even better: build on top of std::vector

public:
  MaxHeap(unsigned int initial_capacity):
      keys(new int[initial_capacity]),
      capacity(initial_capacity),
      count(0)
  {}

  void insert(unsigned int key) { ...}
  int remove_max() { ...}
  ...
}
```

Einfügen



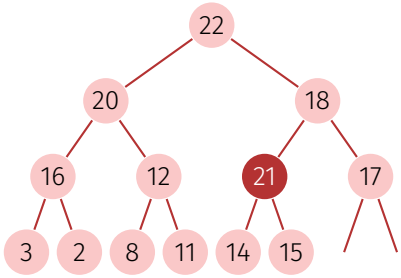
Einfügen

- Füge neuen Schlüssel an erster freien Stelle ein. Verletzt Heap-Eigenschaft potenziell.



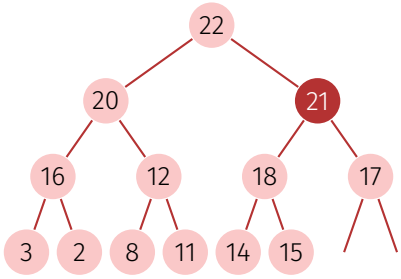
Einfügen

- Füge neuen Schlüssel an erster freien Stelle ein. Verletzt Heap-Eigenschaft potenziell.
- Stelle Heap-Eigenschaft wieder her: Sukzessives Aufsteigen



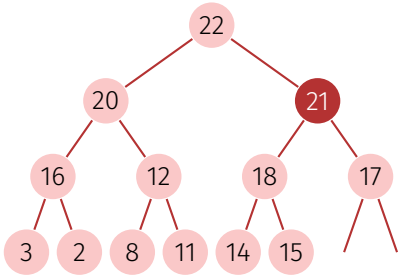
Einfügen

- Füge neuen Schlüssel an erster freien Stelle ein. Verletzt Heap-Eigenschaft potenziell.
- Stelle Heap-Eigenschaft wieder her: Sukzessives Aufsteigen



Einfügen

- Füge neuen Schlüssel an erster freien Stelle ein. Verletzt Heap-Eigenschaft potenziell.
- Stelle Heap-Eigenschaft wieder her: Sukzessives Aufsteigen
- Anzahl Operationen im schlechtesten Fall: $\mathcal{O}(\log n)$



Algorithmus Aufsteigen(A, m)

Input: Array A mit mindestens m Schlüsseln und Heapstruktur auf $A[1, \ldots, m-1]$

Output: Array A mit Heapstruktur auf $A[1, \ldots, m]$

$v \leftarrow A[m]$ // Neuer Schlüssel

$c \leftarrow m$ // Index derzeitiger Knoten (child)

$p \leftarrow \lfloor c/2 \rfloor$ // Index Elternknoten (parent)

while $c > 1$ and $v > A[p]$ **do**

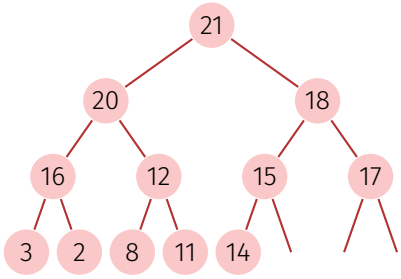
    $A[c] \leftarrow A[p]$ // Schlüssel Elternknoten $\rightarrow$ Schlüssel derzeitiger Knoten

    $c \leftarrow p$ // Elternknoten $\rightarrow$ derzeitiger Knoten

    $p \leftarrow \lfloor c/2 \rfloor$

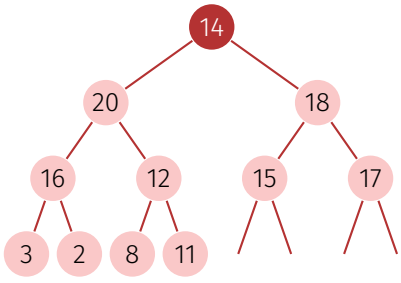
$A[c] \leftarrow v$ // Neuen Schlüssel platzieren

Maximum entfernen



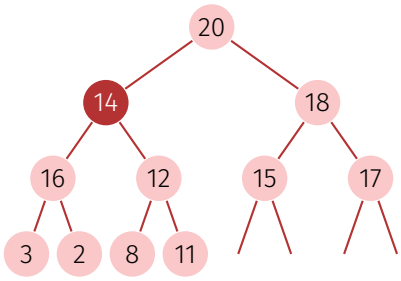
Maximum entfernen

- Ersetze das Maximum durch das unterste rechte Element.



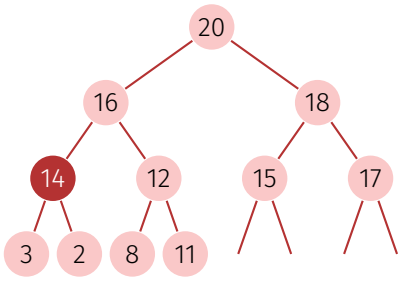
Maximum entfernen

- Ersetze das Maximum durch das unterste rechte Element.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Absinken (in Richtung des grösseren Kindes).



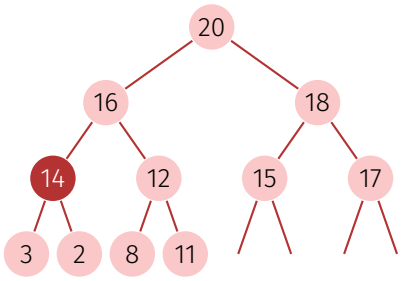
Maximum entfernen

- Ersetze das Maximum durch das unterste rechte Element.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Absinken (in Richtung des grösseren Kindes).



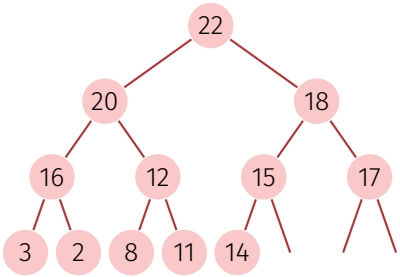
Maximum entfernen

- Ersetze das Maximum durch das unterste rechte Element.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Absinken (in Richtung des grösseren Kindes).
- Anzahl Operationen im schlechtesten Fall: $\mathcal{O}(\log n)$



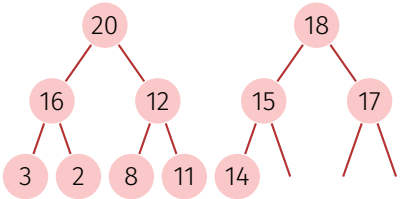
Warum das korrekt ist: Rekursive Heap-Struktur

Ein Heap besteht aus zwei Teilheaps:



Warum das korrekt ist: Rekursive Heap-Struktur

Ein Heap besteht aus zwei Teilheaps:



Algorithmus Versickern(A, i, m)

Input: Array A mit Heapstruktur für die Kinder von i. Letztes Element m.
Output: Array A mit Heapstruktur für i mit letztem Element m.

while $2i \leq m$ **do**
- $j \leftarrow 2i$; // j linkes Kind
- **if** $j < m$ and $A[j] < A[j+1]$ **then**
  - $j \leftarrow j + 1$; // j rechtes Kind mit grösserem Schlüssel
- **if** $A[i] < A[j]$ **then**
  - Vertausche($A[i], A[j]$)
  - $i \leftarrow j$; // weiter versickern
- **else**
  - $i \leftarrow m$; // versickern beendet

Heaps Sortieren

Sei $A[1, ..., n]$ ein Heap.

Solange $n > 1$:

1. *Vertausche*$(A[1], A[n])$
2. *Versickere*$(A, 1, n-1)$
3. $n \leftarrow n - 1$

Heaps Sortieren

Tauschen $\Rightarrow$

Sei $A[1, ..., n]$ ein Heap.

Solange $n > 1$:

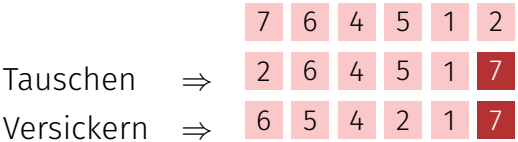
1. *Vertausche*$(A[1], A[n])$
2. *Versickere*$(A, 1, n-1)$
3. $n \leftarrow n - 1$

Heaps Sortieren

Sei $A[1, ..., n]$ ein Heap.

Solange $n > 1$:

1. *Vertausche*$(A[1], A[n])$
2. *Versickere*$(A, 1, n-1)$
3. $n \leftarrow n - 1$

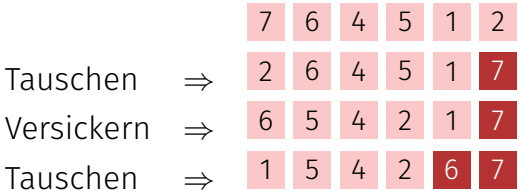


Heaps Sortieren

Sei $A[1, ..., n]$ ein Heap.

Solange $n > 1$:

1. *Vertausche*$(A[1], A[n])$
2. *Versickere*$(A, 1, n-1)$
3. $n \leftarrow n - 1$

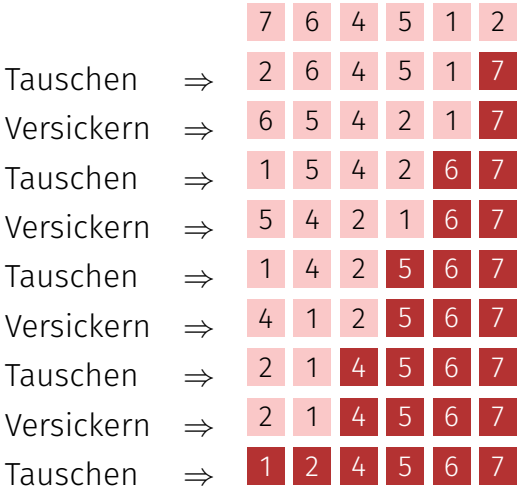


Heaps Sortieren

Sei $A[1, ..., n]$ ein Heap.

Solange $n > 1$:

1. *Vertausche*$(A[1], A[n])$
2. *Versickere*$(A, 1, n-1)$
3. $n \leftarrow n - 1$



Heap erstellen

Beobachtung: Jedes Blatt eines Heaps ist für sich schon ein korrekter Heap.

Folgerung:

Heap erstellen

Beobachtung: Jedes Blatt eines Heaps ist für sich schon ein korrekter Heap.

Folgerung: Induktion von unten!

Algorithmus HeapSort(A, n)

Input: Array A der Länge n.
Output: A sortiert.

// Heap aufbauen
for $i \leftarrow n/2$ **downto** 1 **do**
    Versickere(A, i, n)

// Nun ist A ein Heap
for $i \leftarrow n$ **downto** 2 **do**
    Vertausche$(A[1], A[i])$
    Versickere$(A, 1, i-1)$

// Nun ist A sortiert.

Analyse: Sortieren eines Heaps

Versickere durchläuft maximal $\log n$ Knoten. An jedem Knoten 2 Schlüsselvergleiche. $\Rightarrow$ Sortieren eines Heaps kostet im schlechtesten Fall $2n \log n$ Vergleiche.

Anzahl der Bewegungen beim Sortieren eines Heaps auch $\mathcal{O}(n \log n)$.

Analyse: Heap aufbauen

Aufrufe von *Versickere*: $n/2$.

Also Anzahl Vergleiche und Bewegungen $v(n) \in \mathcal{O}(n \log n)$.

Versickerpfade sind aber im Mittel viel kürzer:

Wir verwenden, dass $h(n) = \lceil \log_2 n + 1 \rceil = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ für $n > 0$

$$v(n) = \sum_{l=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \underbrace{2^l}_{\text{Anzahl Heaps auf Level l}} \cdot(\underbrace{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 - l}_{\text{Höhe Heaps auf Level l}} - 1) = \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor - k} \cdot k$$

$$= 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{k}{2^k} \leq n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} \leq n \cdot 2 \in \mathcal{O}(n)$$

mit $s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (0 < x < 1)$ und $s(\frac{1}{2}) = 2$

Nachteile

Heapsort: $\mathcal{O}(n \log n)$ Vergleiche und Bewegungen.

Nachteile von Heapsort?

Nachteile

Heapsort: $\mathcal{O}(n \log n)$ Vergleiche und Bewegungen.

Nachteile von Heapsort?

- Wenig Lokalität: per Definition springt Heapsort im sortierten Array umher (Negativer Cache-Effekt).

Nachteile

Heapsort: $\mathcal{O}(n \log n)$ Vergleiche und Bewegungen.

Nachteile von Heapsort?

- Wenig Lokalität: per Definition springt Heapsort im sortierten Array umher (Negativer Cache-Effekt).
- Zwei Vergleiche vor jeder benötigten Bewegung.