Übung 1 – Asymptotik

Datenstrukturen und Algorithmen, D-MATH, ETH Zurich

Programm von heute

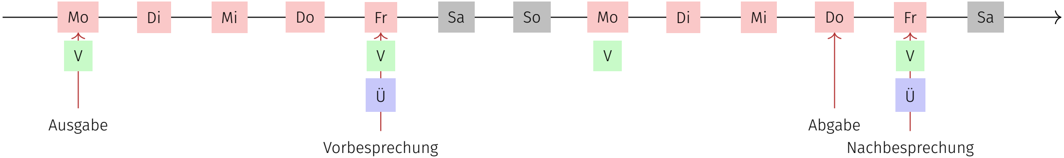
Ablauf der Übungen

Wiederholung Theorie

- Beispiele (Theorie)
- Asymptotische Laufzeit von Programmteilen

Programmieraufgabe

Ablauf des Übungsbetriebes



- Übungsblattausgabe zur Vorlesung (online).
- Vorbesprechung in der folgenden Übung.
- Bearbeitung der Übung bis spätestens am Tag vor der nächsten Übungsstunde (23:59h).
- Nachbesprechung der Übung in der nächsten Übungsstunde. Feedback zu den Abgaben innerhalb einer Woche nach Nachbesprechung.

2. Wiederholung Theorie

Warm-up

- Was ist ein Problem?

Warm-up

- Was ist ein Problem?
- Was ist ein Algorithmus?

Warm-up

- Was ist ein Problem?
- Was ist ein Algorithmus?

  ➜ wohldefinierte Berechnungsvorschrift, welche aus Eingabedaten (input) Ausgabedaten (output) berechnet.

Warm-up

- Was ist ein Problem?
- Was ist ein Algorithmus?

  ➜ wohldefinierte Berechnungsvorschrift, welche aus Eingabedaten (input) Ausgabedaten (output) berechnet.

- Was ist ein Programm?

Warm-up

- Was ist ein Problem?
- Was ist ein Algorithmus?

  ➜ wohldefinierte Berechnungsvorschrift, welche aus Eingabedaten (input) Ausgabedaten (output) berechnet.

- Was ist ein Programm?

  ➜ Konkrete Implementation eines Algorithmus.

Probleme, Algorithmen und Programme

Problem

↑ löst ein

Algorithmus

↑ implementiert einen

Programm

Warm-up

Problem

↓ kann von mehreren gelöst werden

Algorithmen

↓ kann auf mehre Arten implementiert werden

Programm

Effizienz

Programm	Laufzeit	Messbarer Wert auf einer konkreten Maschine.
Algorithmus	Kosten	Anzahl Elementaroperationen
Problem	Komplexität	Minimale (asymptotische) Kosten über alle Algorithmen, die das Problem lösen.

Effizienz

Programm	Laufzeit	Messbarer Wert auf einer konkreten Maschine.
Algorithmus	Kosten	Anzahl Elementaroperationen
Problem	Komplexität	Minimale (asymptotische) Kosten über alle Algorithmen, die das Problem lösen.

➜ Abschätzen von *Kosten* oder *Laufzeit* abhängig von der Eingabegrösse n.

Asymptotisches Verhalten

- Was sind $\Omega(g(n))$, $\Theta(g(n))$, $\mathcal{O}(g(n))$?

Asymptotisches Verhalten

- Was sind $\Omega(g(n))$, $\Theta(g(n))$, $\mathcal{O}(g(n))$?

➜ Mengen von Funktionen!

Asymptotisches Verhalten

- Was sind $\Omega(g(n))$, $\Theta(g(n))$, $\mathcal{O}(g(n))$?

➜ Mengen von Funktionen!

Teilmenge	$A \subseteq B$
echte Teilmenge	$A \subsetneq B$
Schnittmenge	$A \cap B$

Asymptotisches Verhalten

Gegeben Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Definition:

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$$\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

$$\Theta(g) = \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g)$$

Intuition:

$f \in \mathcal{O}(g)$: (Laufzeit) f wächst asymptotisch **nicht mehr** als g. Algorithmus mit Laufzeit f ist **nicht schlechter** als einer mit g.

$f \in \Omega(g)$: (Laufzeit) f wächst asymptotisch **nicht weniger** als g. Algorithmus mit Laufzeit f ist **nicht besser** als einer mit g.

$f \in \Theta(g)$: f wächst asymptotisch **gleich schnell** wie g. Algorithmus mit Laufzeit f ist **gleich gut** wie einer mit g.

Etwas seltener verwendet

Gegeben Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Definition:

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$$o(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$$\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

$$\omega(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

$f \in o(g)$: f wächst echt langsamer als g
$f \in \omega(g)$: f wächst echt schneller als g

Nützliches fürs Aufgabenblatt

Theorem 1

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{O}(g)$, $\mathcal{O}(f) \subsetneq \mathcal{O}(g)$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C > 0$ (C konstant) $\Rightarrow f \in \Theta(g)$.
3. $\frac{f(n)}{g(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow g \in \mathcal{O}(f)$, $\mathcal{O}(g) \subsetneq \mathcal{O}(f)$.

Nützliches fürs Aufgabenblatt

Theorem 1

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{O}(g), \mathcal{O}(f) \subsetneq \mathcal{O}(g)$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C > 0$ (C *konstant*) $\Rightarrow f \in \Theta(g)$.
3. $\frac{f(n)}{g(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow g \in \mathcal{O}(f), \mathcal{O}(g) \subsetneq \mathcal{O}(f)$.

Example 2

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0 \Rightarrow n \in \mathcal{O}(n^2), \mathcal{O}(n) \subsetneq \mathcal{O}(n^2)$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = 2 > 0 \Rightarrow 2n \in \Theta(n)$.
3. $\frac{n^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow n \in \mathcal{O}(n^2), \mathcal{O}(n) \subsetneq \mathcal{O}(n^2)$.

Eigenschaft

$$f_1 \in \mathcal{O}(g), f_2 \in \mathcal{O}(g) \Rightarrow f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(g)$$

Beispiele

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \; \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$f(n)$	$f \in \mathcal{O}(?)$	Beispiel
$3n + 4$		
$2n$		
$n^2 + 100n$		
$n + \sqrt{n}$		

Beispiele

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \ \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$f(n)$	$f \in \mathcal{O}(?)$	Beispiel
$3n + 4$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 4, n_0 = 4$
$2n$		
$n^2 + 100n$		
$n + \sqrt{n}$		

Beispiele

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\ \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$f(n)$	$f \in \mathcal{O}(?)$	Beispiel
$3n + 4$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 4, n_0 = 4$
$2n$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 2, n_0 = 0$
$n^2 + 100n$		
$n + \sqrt{n}$		

Beispiele

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \; \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$f(n)$	$f \in \mathcal{O}(?)$	Beispiel
$3n + 4$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 4, n_0 = 4$
$2n$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 2, n_0 = 0$
$n^2 + 100n$	$\mathcal{O}(n^2)$	$c = 2, n_0 = 100$
$n + \sqrt{n}$		

Beispiele

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$f(n)$	$f \in \mathcal{O}(?)$	Beispiel
$3n + 4$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 4, n_0 = 4$
$2n$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 2, n_0 = 0$
$n^2 + 100n$	$\mathcal{O}(n^2)$	$c = 2, n_0 = 100$
$n + \sqrt{n}$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 2, n_0 = 1$

Beispiele

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch:

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$!

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$!

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$!
- $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$!
- $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$ ist korrekt

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$!
- $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$ ist korrekt

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$!
- $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$ ist korrekt
- $\Theta(n) \subseteq \Theta(n^2)$

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$!
- $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$ ist korrekt
- $\Theta(n) \subseteq \Theta(n^2)$ ist falsch:

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$!
- $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$ ist korrekt
- $\Theta(n) \subseteq \Theta(n^2)$ ist falsch: $n \notin \Omega(n^2) \supset \Theta(n^2)$

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15) \quad ?$

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$? ✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$? ✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$

$2n + 1 \in \Theta(n)$?

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	✓

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	✓
$\mathcal{O}(\sqrt{n}) \subset \mathcal{O}(n)$?	

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	✓
$\mathcal{O}(\sqrt{n}) \subset \mathcal{O}(n)$?	✓

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	✓
$\mathcal{O}(\sqrt{n}) \subset \mathcal{O}(n)$?	✓
$2^n \notin \mathcal{O}(\exp(n))$?	

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	✓
$\mathcal{O}(\sqrt{n}) \subset \mathcal{O}(n)$?	✓
$2^n \notin \mathcal{O}(\exp(n))$?	✗

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	✓
$\mathcal{O}(\sqrt{n}) \subset \mathcal{O}(n)$?	✓
$2^n \notin \mathcal{O}(\exp(n))$?	✗

Eine gute Strategie?

… dann kaufe ich mir eben eine neue Maschine!

Eine gute Strategie?

... dann kaufe ich mir eben eine neue Maschine! Wenn ich heute ein Problem der Grösse n lösen kann, dann kann ich mit einer 10 oder 100 mal so schnellen Maschine...

Komplexität	(speed $\times 10$)	(speed $\times 100$)
$\log_2 n$		
n		
n^2		
2^n		

Eine gute Strategie?

... dann kaufe ich mir eben eine neue Maschine! Wenn ich heute ein Problem der Grösse n lösen kann, dann kann ich mit einer 10 oder 100 mal so schnellen Maschine...

Komplexität	(speed $\times 10$)	(speed $\times 100$)
$\log_2 n$	$n \to n^{10}$	$n \to n^{100}$
n		
n^2		
2^n		

Eine gute Strategie?

... dann kaufe ich mir eben eine neue Maschine! Wenn ich heute ein Problem der Grösse n lösen kann, dann kann ich mit einer 10 oder 100 mal so schnellen Maschine...

Komplexität	(speed $\times 10$)	(speed $\times 100$)
$\log_2 n$	$n \to n^{10}$	$n \to n^{100}$
n	$n \to 10 \cdot n$	$n \to 100 \cdot n$
n^2		
2^n		

Eine gute Strategie?

... dann kaufe ich mir eben eine neue Maschine! Wenn ich heute ein Problem der Grösse n lösen kann, dann kann ich mit einer 10 oder 100 mal so schnellen Maschine...

Komplexität	(speed $\times 10$)	(speed $\times 100$)
$\log_2 n$	$n \to n^{10}$	$n \to n^{100}$
n	$n \to 10 \cdot n$	$n \to 100 \cdot n$
n^2	$n \to 3.16 \cdot n$	$n \to 10 \cdot n$
2^n		

Eine gute Strategie?

… dann kaufe ich mir eben eine neue Maschine! Wenn ich heute ein Problem der Grösse n lösen kann, dann kann ich mit einer 10 oder 100 mal so schnellen Maschine… [1]

Komplexität	(speed $\times 10$)	(speed $\times 100$)
$\log_2 n$	$n \to n^{10}$	$n \to n^{100}$
n	$n \to 10 \cdot n$	$n \to 100 \cdot n$
n^2	$n \to 3.16 \cdot n$	$n \to 10 \cdot n$
2^n	$n \to n + 3.32$	$n \to n + 6.64$

[1] Um das zu sehen, setzt man jeweils $f(n') = c \cdot f(n)$ ($c = 10$ oder $c = 100$) und löst nach n' auf.

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

```
void run(int n){
  for (int i = 1; i<n; ++i)
  op();
}
```

Wie oft wird `op()` in Abhängigkeit von n aufgerufen?

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

```
void run(int n){
  for (int i = 1; i<n; ++i)
    for (int j = 1; j<n; ++j)
      op();
}
```

Wie oft wird `op()` in Abhängigkeit von n aufgerufen?

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

```
void run(int n){
  for (int i = 1; i<n; ++i)
    for (int j = i; j<n; ++j)
      op();
}
```

Wie oft wird `op()` in Abhängigkeit von n aufgerufen?

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

```
void run(int n){
  for (int i = 1; i<n; ++i){
    op();
    for (int j = i; j<n; ++j)
      op();
    }
}
```

Wie oft wird `op()` in Abhängigkeit von n aufgerufen?

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

```
void run(int n){
  for (int i = 1; i<n; ++i){
    op();
    for (int j = 1; j<i*i; ++j)
      op();
    }
}
```

Wie oft wird `op()` in Abhängigkeit von n aufgerufen?

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

```
void run(int n){
  for(int i = 1; i <= n; ++i)
    for(int j = 1; j*j <= n; ++j)
      for(int k = n; k >= 2; --k)
        op();
}
```

Wie oft wird `op()` in Abhängigkeit von n aufgerufen?

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

```
int f(int n){
    i=1;
    while (i <= n*n*n){
        i = i*2;
    }
    return i;
}
```

Wie oft wird **`op()`** in Abhängigkeit von n aufgerufen?

3. Programmieraufgabe

Vorbereitende Bemerkungen für die Programmieraufgaben (Prefix Sum in 2D)

Summe in Subarray (naiver Algorithmus)

Input: Eine Folge von n Zahlen $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ und Subintervall $I = [x_0, x_1]$
Output: $\sum_{i=x_0}^{x_1} a_i$.

$\mathcal{S} \leftarrow 0$
for $i \in \{x_0, \ldots, x_1\}$ **do**
  $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} + a_i$
return $\mathcal{S}$

Summe in Subarray (naiver Algorithmus)

Input: Eine Folge von n Zahlen $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ und Subintervall $I = [x_0, x_1]$
Output: $\sum_{i=x_0}^{x_1} a_i$.

$\mathcal{S} \leftarrow 0$
for $i \in \{x_0, \ldots, x_1\}$ **do**
  $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} + a_i$
return $\mathcal{S}$

Idee der Hausaufgabe

- Benutze die Präfixsumme um für beliebige Subintervalle die Summe mit konstant beschränkter Laufzeit zu berechnen.
- **Verallgemeinere** für zwei Dimensionen.

4. Anhang

Einige Formeln mit Herleitung

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = ?$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Warum?

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Warum?

Intuition

$$1 + \ldots + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51)$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Warum?

Intuition

$$1 + \ldots + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51)$$

Formaler?

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} (n - i) = ?$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i) = \sum_{i=0}^{n} i$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i) = \sum_{i=0}^{n} i$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} i &= \sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n}(n-i) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(i + (n-i)) = \sum_{i=0}^{n} n = (n+1) \cdot n
\end{aligned}$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i)=\sum_{i=0}^{n}i$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2\cdot\sum_{i=0}^{n}i &= \sum_{i=0}^{n}i+\sum_{i=0}^{n}(n-i)\\ &= \sum_{i=0}^{n}(i+(n-i))=\sum_{i=0}^{n}n=(n+1)\cdot n\end{aligned}$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = ?$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Das muss man nicht auswendig wissen. Aber man sollte wissen, dass es ein Polynom dritten Grades in n ist

[Summen]

Wie kommt man darauf?

[Summen]

Wie kommt man darauf? Interessanter Trick: Einerseits

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = n^3,$$

[Summen]

Wie kommt man darauf? Interessanter Trick: Einerseits

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = n^3,$$

andererseits

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 &= \sum_{i=1}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^3 - (i-1)^3 = \sum_{i=1}^{n} 3 \cdot i^2 - 3 \cdot i + 1\end{aligned}$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = ? \qquad \log_a(x \cdot y) = ?$$

$$\frac{a^x}{a^y} = ? \qquad \log_a \frac{x}{y} = ?$$

$$a^{x \cdot y} = ? \qquad \log_a x^y = ?$$

$$\log_a n! = ?$$

$$\log_b x = ? \qquad a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} =?$$

$$a^{x \cdot y} =?$$

$$\log_b x =?$$

$$\log_a(x \cdot y) =?$$

$$\log_a \frac{x}{y} =?$$

$$\log_a x^y =?$$

$$\log_a n! =?$$

$$a^{\log_b x} =?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\ a^{x \cdot y} &=? \\ \\ \log_b x &=? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_a (x \cdot y) &=? \\ \log_a \frac{x}{y} &=? \\ \log_a x^y &=? \\ \log_a n! &=? \\ a^{\log_b x} &=? \end{aligned}$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\log_b x = ?$$

$$\log_a (x \cdot y) = ?$$

$$\log_a \frac{x}{y} = ?$$

$$\log_a x^y = ?$$

$$\log_a n! = ?$$

$$a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\log_b x = ?$$

$$\log_a (x \cdot y) = ?$$

$$\log_a \frac{x}{y} = ?$$

$$\log_a x^y = ?$$

$$\log_a n! = ?$$

$$a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \log_a \frac{x}{y} = ?$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y \qquad \log_a x^y = ?$$

$$\log_a n! = ?$$

$$\log_b x = ? \qquad a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\log_b x = ?$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = ?$$

$$\log_a n! = ?$$

$$a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y \qquad \log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a n! = ?$$

$$\log_b x = ? \qquad a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a n! = \sum_{i=1}^{n} \log i$$

$$\log_b x = ?$$

$$a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a n! = \sum_{i=1}^{n} \log i$$

$$a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a n! = \sum_{i=1}^{n} \log i$$

$$a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y \qquad \log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a n! = \sum_{i=1}^{n} \log i$$

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x \qquad a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$$

Letzteres sieht man durch Einsetzen von $x \to a^{\log_a x}$

Vergleiche

$$\frac{n^2}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} ?$$

Vergleiche

$$\frac{n^2}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Vergleiche

$$\frac{n^{10000}}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} ?$$

Vergleiche

$$\frac{n^{10000}}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Vergleiche

$d > 1, c > 0$

$$\frac{n^c}{d^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} ?$$

Vergleiche

$d > 1, c > 0$

$$\frac{n^c}{d^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Vergleiche

$d > 1, c > 0$

$$\frac{n^c}{d^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

denn

$$\frac{n^c}{d^n} = \frac{2^{\log_2 n^c}}{2^{\log_2 d^n}} = 2^{c \cdot \log_2 n - n \log_2 d}$$

Vergleiche

$$\frac{n}{\log n} \xrightarrow[n \to \infty]{} ?$$

Vergleiche

$$\frac{n}{\log n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

Vergleiche

$$\frac{n \log n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} ?$$

Vergleiche

$$\frac{n \log n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

Vergleiche

$$\frac{\log_2 n^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} ?$$

Vergleiche

$$\frac{\log_2 n^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Vergleiche

$$\frac{\log_2 n^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\begin{aligned} \log_2 n^2 &= 2\log_2 n \\ \sqrt{n} &= n^{1/2} = 2^{\log_2 n^{1/2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 n} \\ \frac{\log n^2}{\sqrt{n}} &= 2\frac{\log_2 n}{\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 n}} \end{aligned}$$

verhält sich wegen $\log_2 n \to \infty$ für $n \to \infty$ wie $2\frac{n}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$