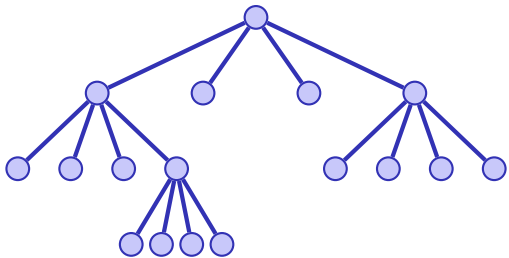
19. Quadtrees

Quadtrees, Kollisionsdetektion, Bildsegmentierung

Quadtree

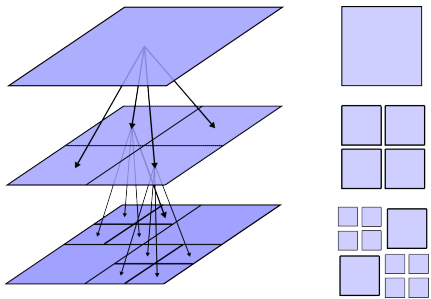
Ein Quadtree ist ein Baum der Ordnung 4.



... und ist als solcher nicht besonders interessant, ausser man verwendet ihn zur...

Quadtree - Interpretation und Nutzen

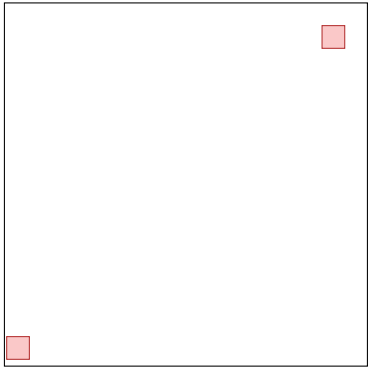
Partitionierung eines zweidimensionalen Bereiches in 4 gleich grosse Teile.



[Analog für drei Dimensionen mit einem *Octtree* (Baum der Ordnung 8)]

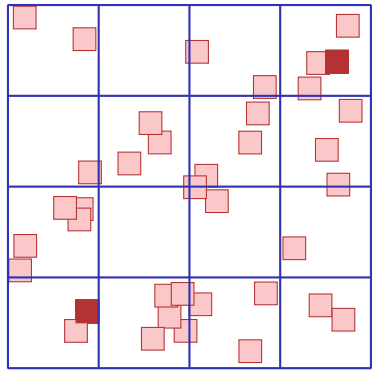
Beispiel 1: Erkennung von Kollisionen

- Objekte in der 2D-Ebene, z.B. Teilchensimulation auf dem Bildschirm.
- Ziel: Erkennen von Kollisionen



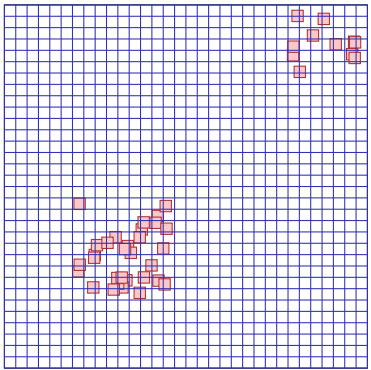
Idee

- Viele Objekte: n^2 Vergleiche (naiv)
- Verbesserung?
- Offensichtlich: keine Kollisionsdetektion für weit entfernte Objekte nötig.
- Was ist „weit entfernt”?
- Gitter ($m \times m$)
- Kollisionsdetektion pro Gitterzelle



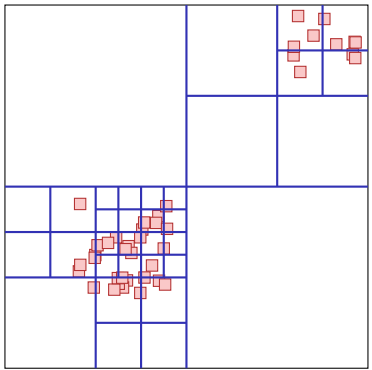
Gitter

- Gitter hilft oft, aber nicht immer
- Verbesserung?
- Gitter verfeinern?
- Zu viele Gitterzellen!



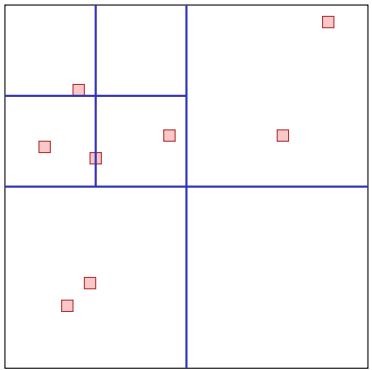
Adaptive Gitter

- Gitter hilft oft, aber nicht immer
- Verbesserung?
- Gitter *adaptiv* verfeinern!
- Quadtree!



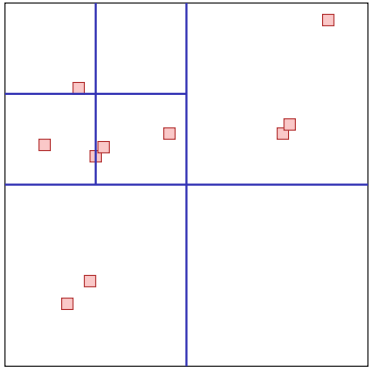
Algorithmus: Einfügen

- Quadtree startet mit einem einzigen Knoten
- Objekte werden zu dem Knoten hinzugefügt. Wenn in einem Knoten zu viele Objekte sind, wird der Knoten geteilt.
- Objekte, die beim Split auf dem Rand zu liegen kommen, werden im höher gelegenen Knoten belassen.

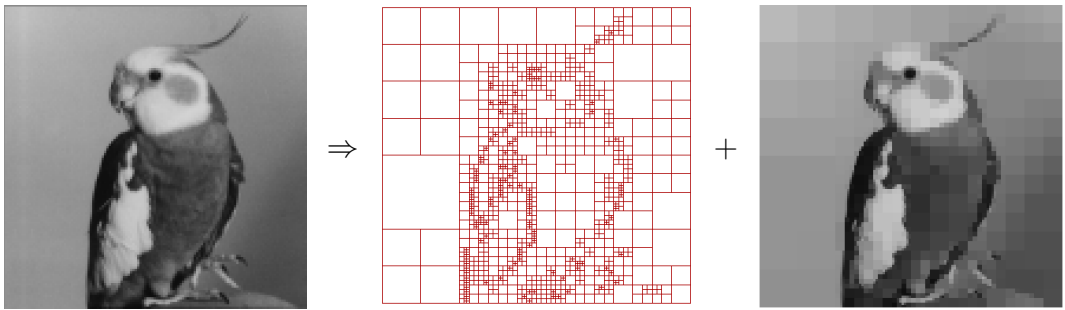


Algorithmus: Kollisionsdetektion

- Durchlaufe den Quadtree rekursiv. Für jeden Knoten teste die Kollision der enthaltenen Objekte mit Objekten im selben Knoten oder (rekursiv) enthaltenen Knoten.

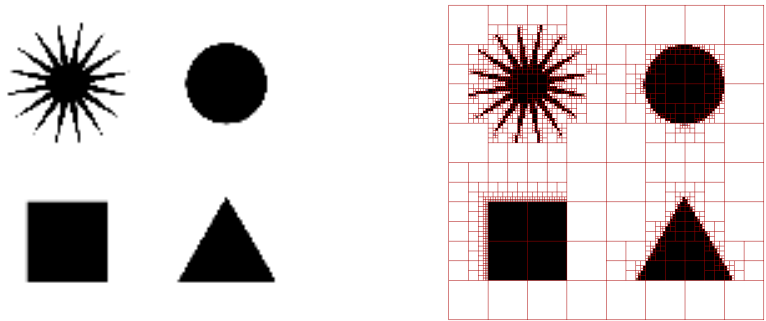


Beispiel 2: Bildsegmentierung



(Mögliche Anwendungen: Kompression, Entrauschen, Kantendetektion)

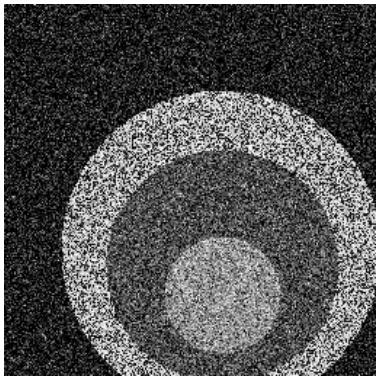
Quadtree auf Einfarbenbild

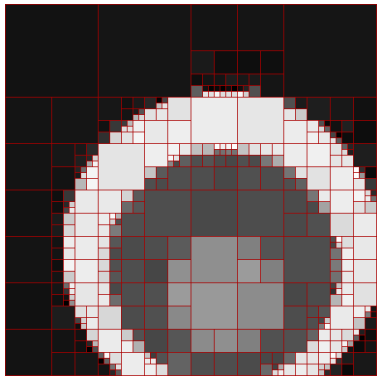


Erzeugung des Quadtree ähnlich wie oben: unterteile Knoten rekursiv bis jeder Knoten nur Pixel einer Farbe enthält.

Quadtree mit Approximation

Wenn mehr als zwei Farbewerte vorhanden sind, wird der Quadtree oft sehr gross. $\Rightarrow$ Komprimierte Darstellung: *approximiere* das Bild stückweise konstant auf Rechtecken eines Quadtrees.





Stückweise konstante Approximation

(Graustufen-)Bild $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^S$ auf den Pixelindizes S. [30]
Rechteck $r \subset S$.
Ziel: bestimme

$$\arg\min_{v \in \mathbb{R}} \sum_{s \in r} (y_s - v)^2$$

Lösung: das arithmetisches Mittel $\mu_r = \frac{1}{|r|} \sum_{s \in r} y_s$

[30] Wir nehmen an, dass S ein Quadrat ist mit Seitenlänge 2^k für ein $k \geq 0$

Zwischenergebnis

Die im Sinne des mittleren quadratischen Fehlers beste Approximation

$$\mu_r = \frac{1}{|r|} \sum_{s \in r} y_s$$

und der dazugehörige Fehler

$$\sum_{s \in r} (y_s - \mu_r)^2 =: \|\boldsymbol{y}_r - \boldsymbol{\mu}_r\|_2^2$$

können nach einer $\mathcal{O}(|S|)$ Tabellierung schnell berechnet werden: Präfixsummen!

Welcher Quadtree?

Konflikt

- Möglichst nahe an den Daten $\Rightarrow$ kleine Rechtecke, grosser Quadtree.
  Extremer Fall: ein Knoten pro Pixel. Approximation = Original
- Möglichst wenige Knoten $\Rightarrow$ Grosse Rechtecke, kleiner Quadtree
  Extremfall: ein einziges Rechteck. Approximation = ein Grauwert

Welcher Quadtree?

Idee: wähle zwischen Datentreue und Komplexität durch Einführung eines Regularisierungsparameters $\gamma \geq 0$

Wähle Quadtree T mit Blättern[31] $L(T)$ so, dass T folgenden Funktion minimiert

$$H_\gamma(T, \boldsymbol{y}) := \gamma \cdot \underbrace{|L(T)|}_{\text{Anzahl Blätter}} + \underbrace{\sum_{r \in L(T)} \|y_r - \mu_r\|_2^2}_{\text{Summierter Approximationsfehler aller Blätter}} .$$

[31] hier: Blatt = Knoten mit Nullkindern¸

Regularisierung

Sei T ein Quadtree über einem Rechteck S_T und seien $T_{ll}, T_{lr}, T_{ul}, T_{ur}$ vier mögliche Unterbäume und

$$\widehat{H}_\gamma(T, y) := \min_T \gamma \cdot |L(T)| + \sum_{r \in L(T)} \|y_r - \mu_r\|_2^2$$

Extremfälle:
$\gamma = 0 \Rightarrow$ Originaldaten;
$\gamma \to \infty \Rightarrow$ ein Rechteck

Beobachtung: Rekursion

- Wenn der (Sub-)Quadtree T nur ein Pixel hat, so kann nicht aufgeteilt werden und es gilt

$$\widehat{H}_\gamma(T, \boldsymbol{y}) = \gamma$$

- Andernfalls seien

$$M_1 := \gamma + \|\boldsymbol{y}_{S_T} - \boldsymbol{\mu}_{S_T}\|_2^2$$
$$M_2 := \widehat{H}_\gamma(T_{ll}, \boldsymbol{y}) + \widehat{H}_\gamma(T_{lr}, \boldsymbol{y}) + \widehat{H}_\gamma(T_{ul}, \boldsymbol{y}) + \widehat{H}_\gamma(T_{ur}, \boldsymbol{y})$$

Dann

$$\widehat{H}_\gamma(T, y) = \min\{\underbrace{M_1(T, \gamma, \boldsymbol{y})}_{\text{kein Split}}, \underbrace{M_2(T, \gamma, \boldsymbol{y})}_{\text{Split}}\}$$

Algorithmus: Minimize($\boldsymbol{y}$,r,γ)

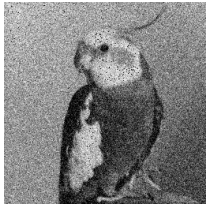
Input: Bilddaten $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^S$, Rechteck $r \subset S$, Regularisierung $\gamma > 0$
Output: $\min_T \gamma|L(T)| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_{L(T)}\|_2^2$

if $|r| = 0$ **then return** 0
$m \leftarrow \gamma + \sum_{s \in r}(y_s - \mu_r)^2$
if $|r| > 1$ **then**
    Split r into r_{ll},r_{lr},r_{ul},r_{ur}
    $m_1 \leftarrow \text{Minimize}(\boldsymbol{y}, r_{ll}, \gamma)$; $m_2 \leftarrow \text{Minimize}(\boldsymbol{y}, r_{lr}, \gamma)$
    $m_3 \leftarrow \text{Minimize}(\boldsymbol{y}, r_{ul}, \gamma)$; $m_4 \leftarrow \text{Minimize}(\boldsymbol{y}, r_{ur}, \gamma)$
    $m' \leftarrow m_1 + m_2 + m_3 + m_4$
else
    $m' \leftarrow \infty$
if $m' < m$ **then** $m \leftarrow m'$
return m

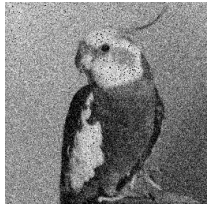
Analyse

Der Minimierungsalgorithmus über dyadische Partitionen (Quadtree) benötigt $\mathcal{O}(|S| \log |S|)$ Schritte.

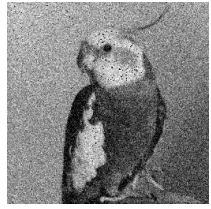
Anwendung: Entrauschen (zusätzlich mit Wedgelets)



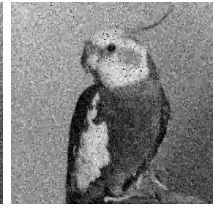
noised



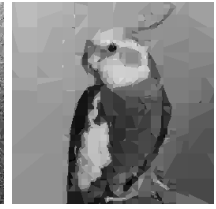
$\gamma = 0.003$



$\gamma = 0.01$



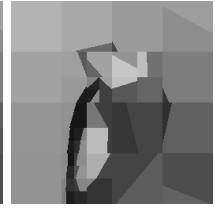
$\gamma = 0.03$



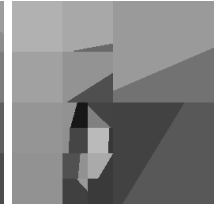
$\gamma = 0.1$

$\gamma = 0.3$

$\gamma = 1$

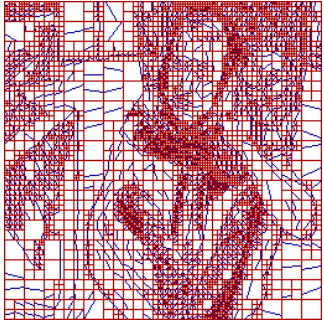


$\gamma = 3$



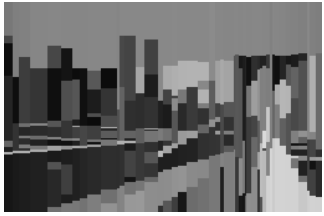
$\gamma = 10$

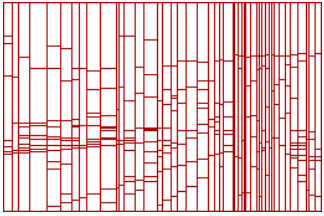
Erweiterungen: Affine Regression + Wedgelets



Andere Ideen

kein Quadtree: hierarchisch-eindimensionales Modell (benötigt Dynamic Programming)





19.1 Anhang

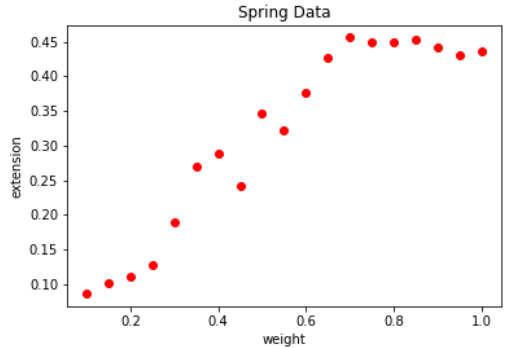
Lineare Regression

Das Lernproblem

Ausgangslage

- Wir beobachten N Datenpunkte
- Eingaben: $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_N)^\top$
- Beobachtete Ausgaben: $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_N)^\top$
- Annahme: es gibt eine zugrundeliegende Wahrheit

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$



Ziel: Finden einer approximativen Wahrheit $h \approx f$, um Prädiktionen $h(\boldsymbol{x})$ für neue Datenpunkte $\boldsymbol{x}$ zu machen oder um die Daten zu erklären und beispielsweise komprimiert darzustellen.

Hier $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$. $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ (Regression).

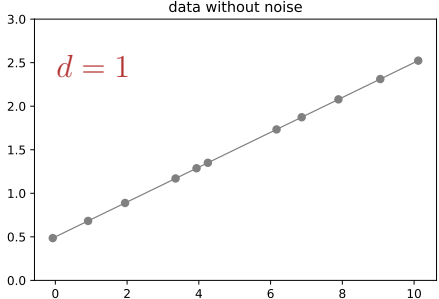
Modell: Lineare Regression

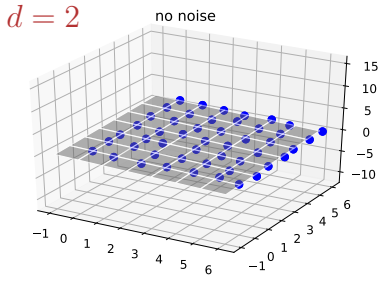
Annahme: Die zugrunde liegende Wahrheit lässt sich darstellen als

$$h_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = w_0 + w_1 x_1 + \cdots + w_d x_d = w_0 + \sum_{i=1}^{d} w_i x_i.$$

linear in $\boldsymbol{w}$!

$\Rightarrow$ Wir suchen $\boldsymbol{w}$ (manchmal auch d).





Trick für vereinfachte Notation

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \rightarrow (\underbrace{x_0}_{\equiv 1}, x_1, \ldots, x_d)$$

$$\begin{aligned} h_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) &= w_0 x_0 + w_1 x_1 + \cdots + w_d x_d \\ &= \sum_{i=0}^{d} w_i x_i \\ &= \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

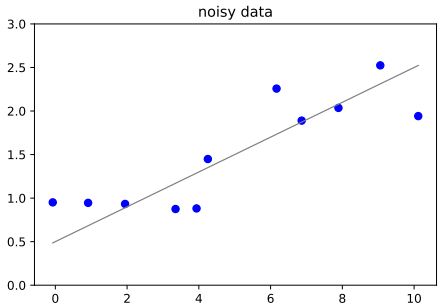
Datenmatrix

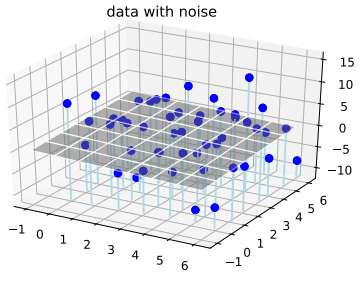
$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\equiv 1}{\downarrow} & & & & \\ X_{1,0} & X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,d} \\ X_{2,0} & X_{2,1} & X_{2,2} & \dots & X_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n,0} & X_{n,1} & X_{n,2} & \dots & X_{n,d} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{w} \approx \boldsymbol{y}?$$

Ungenaue Beobachtungen

Realität: die Daten sind ungenau bzw. das Modell ist nur ein Modell.



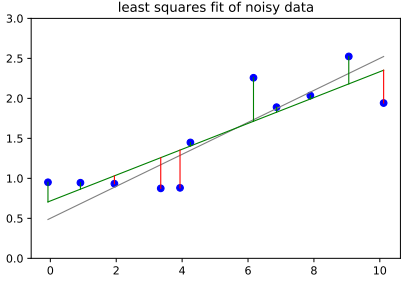


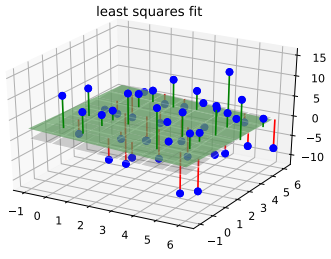
Was tun?

Fehlerfunktion

$$E(\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{N} (h_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{X}_i) - y_i)^2$$

Suchen ein $\widehat{\boldsymbol{w}}$ das $E(w)$ minimiert.
Linearität von $h_{\boldsymbol{w}}$ in $\boldsymbol{w} \Rightarrow$ Lösung mit linearer Algebra.





Lösung aus der Linearen Algebra

$$\widehat{\boldsymbol{w}} = \underbrace{\left(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}^\top}_{=:\boldsymbol{X}^\dagger} \boldsymbol{y}.$$

$\boldsymbol{X}^\dagger$: *Moore-Penroe Pseudo-Inverse*

Polynome fitten

Geht genauso mit linearer Regression.

$$h_{\boldsymbol{w}}(x) = w_0 + w_1 x^1 + w_2 x^2 + \cdots + w_d x^d = w_0 + \sum_{i=1}^{d} w_i x^i.$$

Denn $h_{\boldsymbol{w}}(x)$ ist immer noch linear in $\boldsymbol{w}$!

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^d \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^d \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix}$$

Beispiel: Konstante Approximation

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\boldsymbol{w}} = \left(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y} = \left[\frac{1}{n} \sum y_i\right].$$

Beispiel: Lineare Approximation

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ 1 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \\ \vdots & & \\ 1 & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\boldsymbol{w}} = \left(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} N & \sum x_i^{(1)} & \sum x_i^{(2)} \\ \sum x_i^{(1)} & \sum \left(x_i^{(1)}\right)^2 & \sum x_i^{(1)} \cdot x_i^{(2)} \\ \sum x_i^{(2)} & \sum x_i^{(1)} \cdot x_i^{(2)} & \sum \left(x_i^{(2)}\right)^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \cdot x_i^{(1)} \\ \sum y_i \cdot x_i^{(2)} \end{bmatrix}$$