Datenstrukturen und Algorithmen

Übung 7

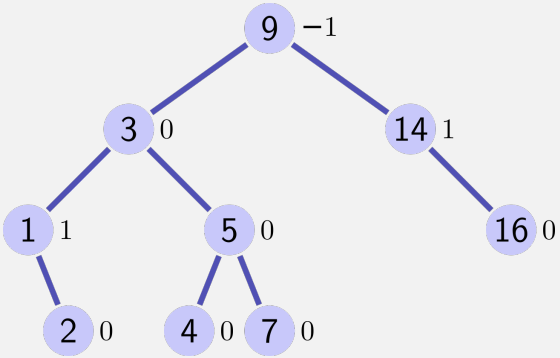
FS 2021

Programm von heute

1. Feedback letzte Übung(en)
2. Wiederholung Theorie
   - Quadtrees

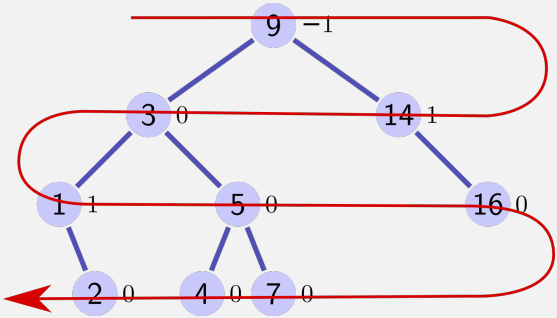
AVL Einfügesequenz

- Gegeben ein AVL Baum: Gibt es eine Einfügesequenz die den selben Baum erstellt und keine Rotation benötigt?



AVL Einfügesequenz

- Gegeben ein AVL Baum: Gibt es eine Einfügesequenz die den selben Baum erstellt und keine Rotation benötigt?



AVL Einfügesequenz - Beweisskizze

- Alle Sequenzen die die Höhenreihenfolge nicht ändern sind i.O.
- Beweis?
- Induktion über Baumhöhe

AVL Einfügesequenz - Beweisskizze

- Alle Sequenzen die die Höhenreihenfolge nicht ändern sind i.O.
- Beweis?
- Induktion über Baumhöhe
- Hypothese: Schlüssel an Höhe h und tiefer sind korrekt platziert und ihre Einfügeoperation verursacht keine Rotation.

AVL Einfügesequenz - Beweisskizze

- Alle Sequenzen die die Höhenreihenfolge nicht ändern sind i.O.
- Beweis?
- Induktion über Baumhöhe
- Hypothese: Schlüssel an Höhe h und tiefer sind korrekt platziert und ihre Einfügeoperation verursacht keine Rotation.
- Schritt: Zeige dass Traversierung gleich ist wie im Originalbaum, ergibt gleiche Positionierung. Dann, benutze AVL Eigenschaft um zu zeigen dass nie einen Höhenunterschied grösser als 1 eintreten kann und deshalb keine Rotationen nötig sind.

2. Wiederholung Theorie

Funktionalminimierung zur Bildsegmentierung

$\mathcal{P}$ Partition — $\gamma \geq 0$ Regularisierungsparameter
$f_{\mathcal{P}}$ Approximation — z Bild = 'Daten'

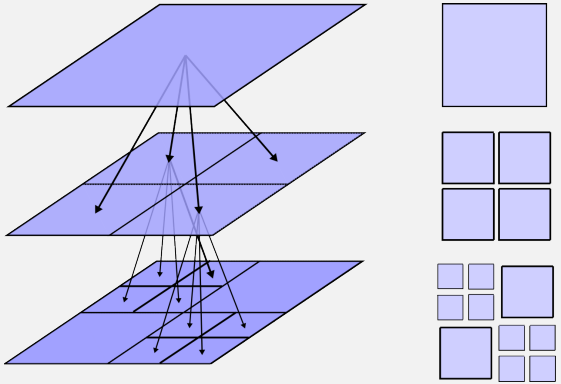
Ziel: Effiziente Minimierung des Funktionals

$$H_{\gamma,z} : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}, \quad (\mathcal{P}, f_{\mathcal{P}}) \mapsto \gamma \cdot |\mathcal{P}| + \|z - f_{\mathcal{P}}\|_2^2.$$

Ergebnis $(\hat{\mathcal{P}}, \hat{f}_{\hat{\mathcal{P}}}) \in \operatorname{argmin}_{(\mathcal{P}, f_{\mathcal{P}})} H_{\gamma,z}$ interpretierbar als *optimaler Kompromiss zwischen Regularität und Datentreue*.

Minimierung eines Funktionals mithilfe Quadtrees

Partitionierung eines zweidimensionalen Bereiches in 4 gleich grosse Teile.

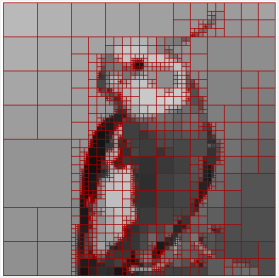


Algorithmus: Minimize(z,r,γ)

Input: Bilddaten $z \in \mathbb{R}^S$, Rechteck $r \subset S$, Regularisierung $\gamma > 0$
Output: $\min_T \gamma|L(T)| + \|z - \mu_{L(T)}\|_2^2$

if $|r| = 0$ **then return** 0
$m \leftarrow \gamma + \sum_{s \in r} (z_s - \mu_r)^2$
if $|r| > 1$ **then**
    Split r into r_{ll},r_{lr},r_{ul},r_{ur}
    $m_1 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{ll}, \gamma)$; $m_2 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{lr}, \gamma)$
    $m_3 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{ul}, \gamma)$; $m_4 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{ur}, \gamma)$
    $m' \leftarrow m_1 + m_2 + m_3 + m_4$
else
    $m' \leftarrow \infty$
if $m' < m$ **then** $m \leftarrow m'$
return m

Minimierung eines Funktionals mithilfe Quadtrees



Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle**:

Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle**: Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?

Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle**: Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags**:

Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle**: Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags**: Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?

Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle**: Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags**: Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
- **Berechnungsreihenfolge**:

Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle**: Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags**: Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
- **Berechnungsreihenfolge**: In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?

Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle**: Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags**: Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
- **Berechnungsreihenfolge**: In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?
- **Auslesen der Lösung**:

Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle**: Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags**: Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
- **Berechnungsreihenfolge**: In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?
- **Auslesen der Lösung**: Wie lässt sich die Lösung am Ende aus der Tabelle auslesen?

Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle**: Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags**: Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
- **Berechnungsreihenfolge**: In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?
- **Auslesen der Lösung**: Wie lässt sich die Lösung am Ende aus der Tabelle auslesen?

Längste aufsteigende Sequenz in Matrix

Gegeben $n \times m$ Matrix A:

9	27	42	41	48
35	39	8	3	5
12	49	2	38	4
15	47	29	28	6
19	1	25	33	10

Längste aufsteigende Sequenz in Matrix

Gegeben $n \times m$ Matrix A:

9	27	42	41	48
35	39	8	3	5
12	49	2	38	4
15	47	29	28	6
19	1	25	33	10

Gesucht längste aufsteigende Sequenz:

$$4, 6, 28, 29, 47, 49$$

Definition der DP-Tabelle

- Welche Dimensionen hat die Tabelle?

Definition der DP-Tabelle

- Welche Dimensionen hat die Tabelle?
  - $n \times m$

Definition der DP-Tabelle

- Welche Dimensionen hat die Tabelle?
  - $n \times m (\times 2)$

Definition der DP-Tabelle

- Welche Dimensionen hat die Tabelle?
  - $n \times m (\times 2)$
- Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?

Definition der DP-Tabelle

- Welche Dimensionen hat die Tabelle?
  - $n \times m (\times 2)$
- Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
  - In $T[x][y]$ steht Länge der längsten aufsteigenden Sequenz, die im Feld $A[x][y]$ endet
  - In $S[x][y]$ steht Koordinaten des Vorgängers von (x, y) in aufsteigender Sequenz (falls existänt)

Berechnung eines Eintrags

- Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?

Berechnung eines Eintrags

- Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
  - Betrachte Nachbarn mit kleineren Eintrag in A.

Berechnung eines Eintrags

- Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
  - Betrachte Nachbarn mit kleineren Eintrag in A.
  - Wähle von den kleineren Einträgen den mit dem grössten Eintrag in T

Berechnung eines Eintrags

- Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
  - Betrachte Nachbarn mit kleineren Eintrag in A.
  - Wähle von den kleineren Einträgen den mit dem grössten Eintrag in T
  - Aktuallisiere T und S. (S erhält Koordinaten vom ausgewählten Nachbar, T erhält Wert um eins erhöht vom ausgewählten Nachbar.)

Berechnung eines Eintrags

- Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
  - Betrachte Nachbarn mit kleineren Eintrag in A.
  - Wähle von den kleineren Einträgen den mit dem grössten Eintrag in T
  - Aktuallisiere T und S. (S erhält Koordinaten vom ausgewählten Nachbar, T erhält Wert um eins erhöht vom ausgewählten Nachbar.)

Berechnungsreihenfolge

- In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?

Berechnungsreihenfolge

- In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?

- Beginne mit kleinstem Element in A und so weiter. (Bedeutet dass man A sortieren muss.)

Berechnungsreihenfolge

- In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?

- Beginne mit kleinstem Element in A und so weiter. (Bedeutet dass man A sortieren muss.)

- Beliebige Reihenfolge, falls Eintrag schon berechnet überspringen sonst rekursiv von kleinern Nachbarn berechnen.

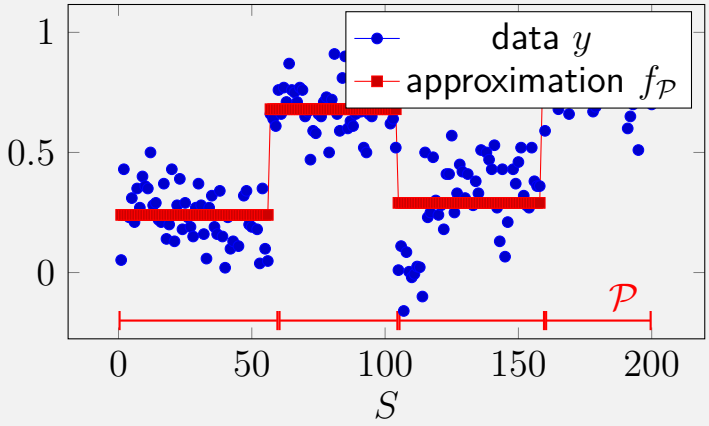
Auslesen der Lösung

- Wie lässt sich die Lösung am Ende aus der Tabelle auslesen?

Auslesen der Lösung

- Wie lässt sich die Lösung am Ende aus der Tabelle auslesen?
  - Betrachte alle Einträge um den Eintrag zu finden, in dem eine längste Sequenz endet. Von dort aus können wir die Lösung rekonstruieren, indem wir dem entsprechenden Vorgänger folgen.

Stückweise konstante Approximation



Stückweise konstante Approximation

$$H_{\gamma,y} : \mathcal{P} \mapsto \gamma|\mathcal{P}| + \sum_{I \in \mathcal{P}} \sum_{i \in I} (y_i - \mu_I)^2$$

Stückweise konstante Approximation

$$H_{\gamma,y} : \mathcal{P} \mapsto \gamma|\mathcal{P}| + \sum_{I \in \mathcal{P}} \sum_{i \in I} (y_i - \mu_I)^2$$

- $\mathcal{P}$: Partition von S (Menge von Intervallen I_i, so dass $\cup_i I_i = S$).
- **Ziel:** Finde die Partition $\hat{\mathcal{P}}$, so dass $H_{\gamma,y}(\hat{\mathcal{P}})$ minimal
- Nutze aus: effizientes Berechnen von Durchschnitten mit Präfixsummen (Übung 1): $\mu_I = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} y_i$

Stückweise konstante Approximation

$$H_{\gamma,y} : \mathcal{P} \mapsto \gamma|\mathcal{P}| + \sum_{I \in \mathcal{P}} \sum_{i \in I} (y_i - \mu_I)^2$$

- $\mathcal{P}$: Partition von S (Menge von Intervallen I_i, so dass $\cup_i I_i = S$).
- **Ziel:** Finde die Partition $\hat{\mathcal{P}}$, so dass $H_{\gamma,y}(\hat{\mathcal{P}})$ minimal
- Nutze aus: effizientes Berechnen von Durchschnitten mit Präfixsummen (Übung 1): $\mu_I = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} y_i$
- Nutze aus: effizientes Berechnen von $e_{[l,r)} = \sum_{i=l}^{r-1} (y_i - \mu_{[l,r)})^2$

Stückweise konstante Approximation

$$H_{\gamma,y} : \mathcal{P} \mapsto \gamma|\mathcal{P}| + \sum_{I \in \mathcal{P}} \sum_{i \in I} (y_i - \mu_I)^2$$

- $\mathcal{P}$: Partition von S (Menge von Intervallen I_i, so dass $\cup_i I_i = S$).
- **Ziel:** Finde die Partition $\hat{\mathcal{P}}$, so dass $H_{\gamma,y}(\hat{\mathcal{P}})$ minimal
- Nutze aus: effizientes Berechnen von Durchschnitten mit Präfixsummen (Übung 1): $\mu_I = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} y_i$
- Nutze aus: effizientes Berechnen von $e_{[l,r)} = \sum_{i=l}^{r-1} (y_i - \mu_{[l,r)})^2$

Stückweise konstante Approximation

$$H_{\gamma,y} : \mathcal{P} \mapsto \gamma|\mathcal{P}| + \sum_{I \in \mathcal{P}} \sum_{i \in I} (y_i - \mu_I)^2$$

- **Ziel:** Finde die Partition $\hat{\mathcal{P}}$, so dass $H_{\gamma,y}(\hat{\mathcal{P}})$ minimal
- **Dynamische Programmierung**: Definition der Tabelle, Berechnung eines Eintrags, Berechnungsreihenfolge, Auslesen der Lösung
- Nutze aus*: $H_{\gamma,y}(\mathcal{P} \cup \{[l, r)\}) = H_{\gamma,y}(\mathcal{P}) + \gamma + e_{[l,r)}$

*Vorraussetzung: $\mathcal{P} \cup \{[l, r)\}$ ist eine Partition

Fragen?