Datenstrukturen und Algorithmen

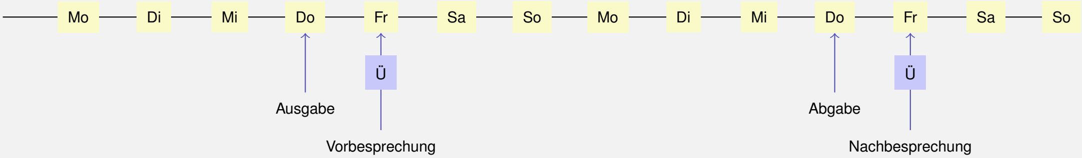
Übung 1

FS 2021

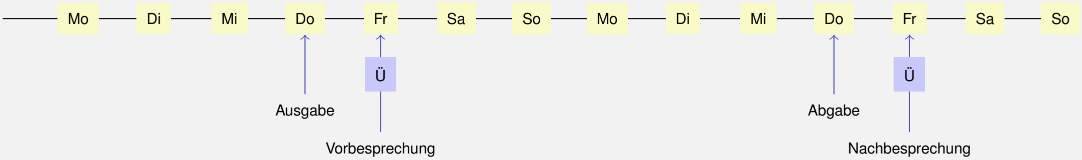
Programm von heute

1. Ablauf der Übungen
2. Vorbereitung Theorie
   - Asymptotische Laufzeit
3. Programmieraufgabe

Ablauf des Übungsbetriebes



Ablauf des Übungsbetriebes



- Donnerstags:
  - Ausgabe des neuen Übungsblatt (online per Code Expert).
  - Abgabe des alten Übungsblatt (online per Code Expert).
- Freitags in der Übungsstunde:
  - Vorbesprechung des neuen Übungsblatt.
  - Nachbesprechung des alten Übungsblatt.
  - Möglichkeit, Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen zu stellen!

2. Vorbereitung Theorie

Für die nächsten Vorlesungen benötigt

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = ?$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Warum?

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Warum?

Intuition

$$1 + ... + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (50 + 51)$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Warum?

Intuition

$$1 + ... + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (50 + 51)$$

Formaler?

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} (n - i) = ?$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i) = \sum_{i=0}^{n} i$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i) = \sum_{i=0}^{n} i$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2\cdot\sum_{i=0}^{n} i &= \sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n}(n-i) \\ &= \sum_{i=0}^{n}(i+(n-i)) = \sum_{i=0}^{n} n = (n+1)\cdot n\end{aligned}$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i) = \sum_{i=0}^{n} i$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} i &= \sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n}(n-i) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(i + (n-i)\right) = \sum_{i=0}^{n} n = (n+1)\cdot n
\end{aligned}$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = ?$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Das muss man nicht auswendig wissen. Aber man sollte wissen, dass es ein Polynom dritten Grades in n ist

[Summen]

Wie kommt man darauf?

[Summen]

Wie kommt man darauf? Interessanter Trick: Einerseits

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = n^3,$$

[Summen]

Wie kommt man darauf? Interessanter Trick: Einerseits

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = n^3,$$

andererseits

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 &= \sum_{i=1}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^3 - (i-1)^3 = \sum_{i=1}^{n} 3 \cdot i^2 - 3 \cdot i + 1\end{aligned}$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = ?$$

$$\frac{a^x}{a^y} = ?$$

$$a^{x \cdot y} = ?$$

$$\log_b x = ?$$

$$\log_a (x \cdot y) = ?$$

$$\log_a \frac{x}{y} = ?$$

$$\log_a x^y = ?$$

$$\log_a n! = ?$$

$$a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\log_a (x \cdot y) = ?$$

$$\frac{a^x}{a^y} = ?$$

$$\log_a \frac{x}{y} = ?$$

$$a^{x \cdot y} = ?$$

$$\log_a x^y = ?$$

$$\log_a n! = ?$$

$$\log_b x = ?$$

$$a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{x \cdot y} = ?$$

$$\log_b x = ?$$

$$\log_a (x \cdot y) = ?$$

$$\log_a \frac{x}{y} = ?$$

$$\log_a x^y = ?$$

$$\log_a n! = ?$$

$$a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\log_b x = ?$$

$$\log_a (x \cdot y) = ?$$

$$\log_a \frac{x}{y} = ?$$

$$\log_a x^y = ?$$

$$\log_a n! = ?$$

$$a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \log_a (x \cdot y) = ?$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \log_a \frac{x}{y} = ?$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y \qquad \log_a x^y = ?$$

$$\log_a n! = ?$$

$$\log_b x = ? \qquad a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \log_a \frac{x}{y} =?$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y \qquad \log_a x^y =?$$

$$\log_a n! =?$$

$$\log_b x =? \qquad a^{\log_b x} =?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y \qquad \log_a x^y = ?$$

$$\log_a n! = ?$$

$$\log_b x = ? \qquad a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y \qquad \log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a n! = ?$$

$$\log_b x = ? \qquad a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y \qquad \log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a n! = \sum_{i=1}^{n} \log i$$

$$\log_b x =? \qquad a^{\log_b x} =?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a n! = \sum_{i=1}^{n} \log i$$

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$

$$a^{\log_b x} = ?$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a n! = \sum_{i=1}^{n} \log i$$

$$a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$$

Exponenten und Logarithmen

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad (a > 0, y > 0)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$
$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^y = y \log_a x$$
$$\log_a n! = \sum_{i=1}^{n} \log i$$

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$
$$a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$$

Letzteres sieht man durch Einsetzen von $x \to a^{\log_a x}$

Vergleiche

$$\frac{n^2}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} ?$$

Vergleiche

$$\frac{n^2}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Vergleiche

$$\frac{n^{10000}}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} ?$$

Vergleiche

$$\frac{n^{10000}}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Vergleiche

$d > 1, c > 0$

$$\frac{n^c}{d^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} ?$$

Vergleiche

$d > 1, c > 0$

$$\frac{n^c}{d^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Vergleiche

$d > 1, c > 0$

$$\frac{n^c}{d^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

denn

$$\frac{n^c}{d^n} = \frac{2^{\log_2 n^c}}{2^{\log_2 d^n}} = 2^{c \cdot \log_2 n - n \log_2 d}$$

Vergleiche

$$\frac{n}{\log n} \xrightarrow[n\to\infty]{} ?$$

Vergleiche

$$\frac{n}{\log n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Vergleiche

$$\frac{n \log n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} ?$$

Vergleiche

$$\frac{n \log n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

Vergleiche

$$\frac{\log_2 n^2}{\sqrt{n}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} ?$$

Vergleiche

$$\frac{\log_2 n^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Vergleiche

$$\frac{\log_2 n^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\begin{aligned}
\log_2 n^2 &= 2\log_2 n \\
\sqrt{n} &= n^{1/2} = 2^{\log_2 n^{1/2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 n} \\
\frac{\log n^2}{\sqrt{n}} &= 2\frac{\log_2 n}{\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 n}}
\end{aligned}$$

verhält sich wegen $\log_2 n \to \infty$ für $n \to \infty$ wie $2\frac{n}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$

Warm-up

- Was ist ein Problem?

Warm-up

- Was ist ein Problem?
- Was ist ein Algorithmus?

Warm-up

- Was ist ein Problem?
- Was ist ein Algorithmus?

  ➜ wohldefinierte Berechnungsvorschrift, welche aus Eingabedaten (input) Ausgabedaten (output) berechnet.

Warm-up

- Was ist ein Problem?
- Was ist ein Algorithmus?

  ➜ wohldefinierte Berechnungsvorschrift, welche aus Eingabedaten (input) Ausgabedaten (output) berechnet.

- Was ist ein Programm?

Warm-up

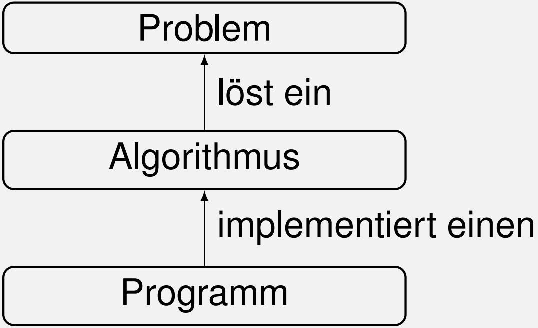
- Was ist ein Problem?
- Was ist ein Algorithmus?

  → wohldefinierte Berechnungsvorschrift, welche aus Eingabedaten (input) Ausgabedaten (output) berechnet.

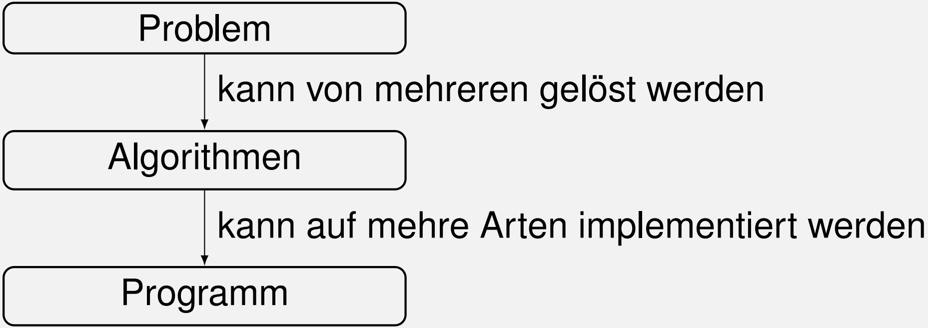
- Was ist ein Programm?

  → Konkrete Implementation eines Algorithmus.

Warm-up


Problem
löst ein
Algorithmus
implementiert einen
Programm

Warm-up


Problem
kann von mehreren gelöst werden
Algorithmen
kann auf mehre Arten implementiert werden
Programm

Effizienz

Problem	Komplexität	Minimale (asymptotische) Kosten über alle Algorithmen, die das Problem lösen.
Algorithmus	Kosten	Anzahl Elementaroperationen
Programm	Laufzeit	Messbarer Wert auf einer konkreten Maschine.

Effizienz

Problem	Komplexität	Minimale (asymptotische) Kosten über alle Algorithmen, die das Problem lösen.
Algorithmus	Kosten	Anzahl Elementaroperationen
Programm	Laufzeit	Messbarer Wert auf einer konkreten Maschine.

➜ Abschätzen von *Kosten* oder *Laufzeit* abhängig von der Eingabegrösse n.

Asymptotisches Verhalten

- Was sind $\Omega(g(n))$, $\Theta(g(n))$, $\mathcal{O}(g(n))$?

Asymptotisches Verhalten

- Was sind $\Omega(g(n))$, $\Theta(g(n))$, $\mathcal{O}(g(n))$?

➜ Mengen von Funktionen!

Asymptotisches Verhalten

- Was sind $\Omega(g(n))$, $\Theta(g(n))$, $\mathcal{O}(g(n))$?

➜ Mengen von Funktionen!

Wiederholung, Mengen A, B:

Teilmenge	$A \subseteq B$
echte Teilmenge	$A \subsetneq B$
Schnittmenge	$A \cap B$

Asymptotisches Verhalten

Gegeben Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Definition:

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$
$$\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$
$$\Theta(g) = \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g)$$

Etwas seltener verwendet

Gegeben Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Definition:

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$$o(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \forall c > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$$\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

$$\omega(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \forall c > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

$f \in o(g)$: f wächst echt langsamer als g

$f \in \omega(g)$: f wächst echt schneller als g

Nützliches fürs Aufgabenblatt

Theorem

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{O}(g), \mathcal{O}(f) \subsetneq \mathcal{O}(g)$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C > 0$ *(C konstant)* $\Rightarrow f \in \Theta(g)$.
3. $\frac{f(n)}{g(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow g \in \mathcal{O}(f), \mathcal{O}(g) \subsetneq \mathcal{O}(f)$.

Nützliches fürs Aufgabenblatt

Theorem

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{O}(g), \mathcal{O}(f) \subsetneq \mathcal{O}(g)$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C > 0$ *(C konstant)* $\Rightarrow f \in \Theta(g)$.
3. $\frac{f(n)}{g(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow g \in \mathcal{O}(f), \mathcal{O}(g) \subsetneq \mathcal{O}(f)$.

Beispiel

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0 \Rightarrow n \in \mathcal{O}(n^2), \mathcal{O}(n) \subsetneq \mathcal{O}(n^2)$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = 2 > 0 \Rightarrow 2n \in \Theta(n)$.
3. $\frac{n^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow n \in \mathcal{O}(n^2), \mathcal{O}(n) \subsetneq \mathcal{O}(n^2)$.

Eigenschaft

$$f_1 \in \mathcal{O}(g), f_2 \in \mathcal{O}(g) \Rightarrow f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(g)$$

Beispiele

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\ \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$f(n)$	$f \in \mathcal{O}(?)$	Beispiel
$3n + 4$		
$2n$		
$n^2 + 100n$		
$n + \sqrt{n}$		

Beispiele

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\ \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$f(n)$	$f \in \mathcal{O}(?)$	Beispiel
$3n + 4$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 4, n_0 = 4$
$2n$		
$n^2 + 100n$		
$n + \sqrt{n}$		

Beispiele

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\ \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$f(n)$	$f \in \mathcal{O}(?)$	Beispiel
$3n + 4$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 4, n_0 = 4$
$2n$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 2, n_0 = 0$
$n^2 + 100n$		
$n + \sqrt{n}$		

Beispiele

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$f(n)$	$f \in \mathcal{O}(?)$	Beispiel
$3n + 4$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 4, n_0 = 4$
$2n$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 2, n_0 = 0$
$n^2 + 100n$	$\mathcal{O}(n^2)$	$c = 2, n_0 = 100$
$n + \sqrt{n}$		

Beispiele

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\ \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$f(n)$	$f \in \mathcal{O}(?)$	Beispiel
$3n + 4$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 4, n_0 = 4$
$2n$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 2, n_0 = 0$
$n^2 + 100n$	$\mathcal{O}(n^2)$	$c = 2, n_0 = 100$
$n + \sqrt{n}$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 2, n_0 = 1$

Beispiele

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch:

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$!

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$!

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$!
- $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n \to \infty}{\to} \infty$!
- $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$ ist korrekt

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$!
- $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$ ist korrekt

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$!
- $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$ ist korrekt
- $\Theta(n) \subseteq \Theta(n^2)$

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$!
- $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$ ist korrekt
- $\Theta(n) \subseteq \Theta(n^2)$ ist falsch:

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{n} = 2n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$!
- $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$ ist korrekt
- $\Theta(n) \subseteq \Theta(n^2)$ ist falsch: $n \notin \Omega(n^2) \supset \Theta(n^2)$

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$? ✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$? ✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$

$2n + 1 \in \Theta(n)$?

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	✓

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	✓
$\mathcal{O}(\sqrt{n}) \subset \mathcal{O}(n)$?	

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	✓
$\mathcal{O}(\sqrt{n}) \subset \mathcal{O}(n)$?	✓

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	✓
$\mathcal{O}(\sqrt{n}) \subset \mathcal{O}(n)$?	✓
$2^n \notin \mathcal{O}(\exp(n))$?	

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	✓
$\mathcal{O}(\sqrt{n}) \subset \mathcal{O}(n)$?	✓
$2^n \notin \mathcal{O}(\exp(n))$?	✗

Quiz

$1 \in \mathcal{O}(15)$?	✓ besser $1 \in \mathcal{O}(1)$
$2n + 1 \in \Theta(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$?	✓
$\sqrt{n} \in \Omega(n)$?	✗
$n \in \Omega(\sqrt{n})$?	✓
$\sqrt{n} \notin \Theta(n)$?	✓
$\mathcal{O}(\sqrt{n}) \subset \mathcal{O}(n)$?	✓
$2^n \notin \mathcal{O}(\exp(n))$?	✗

Quiz: Eine gute Strategie?

... dann kaufe ich mir eben eine neue Maschine!

1

Quiz: Eine gute Strategie?

... dann kaufe ich mir eben eine neue Maschine! Wenn ich heute ein Problem der Grösse n lösen kann, dann kann ich mit einer 10 oder 100 mal so schnellen Maschine...[1]

Komplexität	(speed $\times 10$)	(speed $\times 100$)
$\log_2 n$		
n		
n^2		
2^n		

1

Quiz: Eine gute Strategie?

... dann kaufe ich mir eben eine neue Maschine! Wenn ich heute ein Problem der Grösse n lösen kann, dann kann ich mit einer 10 oder 100 mal so schnellen Maschine...[1]

Komplexität	(speed $\times 10$)	(speed $\times 100$)
$\log_2 n$	$n \to n^{10}$	$n \to n^{100}$
n		
n^2		
2^n		

1

Quiz: Eine gute Strategie?

... dann kaufe ich mir eben eine neue Maschine! Wenn ich heute ein Problem der Grösse n lösen kann, dann kann ich mit einer 10 oder 100 mal so schnellen Maschine...[1]

Komplexität	(speed $\times 10$)	(speed $\times 100$)
$\log_2 n$	$n \to n^{10}$	$n \to n^{100}$
n	$n \to 10 \cdot n$	$n \to 100 \cdot n$
n^2		
2^n		

1

Quiz: Eine gute Strategie?

... dann kaufe ich mir eben eine neue Maschine! Wenn ich heute ein Problem der Grösse n lösen kann, dann kann ich mit einer 10 oder 100 mal so schnellen Maschine...[1]

Komplexität	(speed $\times 10$)	(speed $\times 100$)
$\log_2 n$	$n \to n^{10}$	$n \to n^{100}$
n	$n \to 10 \cdot n$	$n \to 100 \cdot n$
n^2	$n \to 3.16 \cdot n$	$n \to 10 \cdot n$
2^n		

1

Quiz: Eine gute Strategie?

... dann kaufe ich mir eben eine neue Maschine! Wenn ich heute ein Problem der Grösse n lösen kann, dann kann ich mit einer 10 oder 100 mal so schnellen Maschine...[1]

Komplexität	(speed $\times 10$)	(speed $\times 100$)
$\log_2 n$	$n \to n^{10}$	$n \to n^{100}$
n	$n \to 10 \cdot n$	$n \to 100 \cdot n$
n^2	$n \to 3.16 \cdot n$	$n \to 10 \cdot n$
2^n	$n \to n + 3.32$	$n \to n + 6.64$

[1] Um das zu sehen, setzt man jeweils $f(n') = c \cdot f(n)$ ($c = 10$ oder $c = 100$) und löst nach n' auf.

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

```
void run(int n){
  for (int i = 1; i<n; ++i)
    for (int j = 1; j<n; ++j)
      op();
}
```

Wie oft wird `op()` aufgerufen?

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

```
void run(int n){
  for (int i = 1; i<n; ++i)
    for (int j = i; j<n; ++j)
      op();
}
```

Wie oft wird `op()` aufgerufen?

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

```
void run(int n){
  for (int i = 1; i<n; ++i){
    op();
    for (int j = i; j<n; ++j)
      op();
    }
}
```

Wie oft wird `op()` aufgerufen?

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

```
void run(int n){
  for(int i = 1; i <= n; ++i)
    for(int j = 1; j*j <= n; ++j)
      for(int k = n; k >= 2; --k)
        op();
}
```

Wie oft wird `op()` aufgerufen?

3. Programmieraufgabe

Summe in Subintervall (naiver Algorithmus)

Input: Eine Folge von n Zahlen $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ und Subintervall $I = [x_0, x_1]$

Output: $\sum_{i=x_0}^{x_1} a_i$.

$\mathcal{S} \leftarrow 0$
for $i \in \{x_0, \ldots, x_1\}$ **do**
  $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} + a_i$
return $\mathcal{S}$

Summe in Subintervall (naiver Algorithmus)

Input: Eine Folge von n Zahlen $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ und Subintervall $I = [x_0, x_1]$

Output: $\sum_{i=x_0}^{x_1} a_i$.

$\mathcal{S} \leftarrow 0$
for $i \in \{x_0, \dots, x_1\}$ **do**
  $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} + a_i$
return $\mathcal{S}$

Idee

- Benutze die Präfixsumme um für beliebige Subintervalle die Summe in konstanter Komplexität zu berechnen.
- Verallgemeinere in zwei Dimensionen.

Mehrdimensionale Vektoren

Definition

```
std::vector< std::vector<int> > my_vec( n_rows,
std::vector<int>(n_cols,init_value) );
```

Indexierung

```
my_vec[row][col]
```

Klassen

```
class Insurance { // Definition
public: // public section
        Insurance(double rate) {rate_ = rate;} // Construktor
        double get_rate() {return rate_;} // member function
private: // private section
        double rate_; // data member
};

int main() {
        Insurance insurance(2.);
        std::cout << insurance.get_rate();
        return 0;
}
```

Fragen oder Anregungen?