9. Sortieren III

Untere Schranken für das vergleichsbasierte Sortieren, Radix- und Bucketsort

9.1 Untere Grenzen für Vergleichbasiertes Sortieren

[Ottman/Widmayer, Kap. 2.8, Cormen et al, Kap. 8.1]

Untere Schranke für das Sortieren

Bis hierher: Sortieren im schlechtesten Fall benötigt $\Omega(n \log n)$ Schritte.
Geht es besser?

Untere Schranke für das Sortieren

Bis hierher: Sortieren im schlechtesten Fall benötigt $\Omega(n \log n)$ Schritte.
Geht es besser? Nein:

Theorem 14

Vergleichsbasierte Sortierverfahren benötigen im schlechtesten Fall und im Mittel mindestens $\Omega(n \log n)$ Schlüsselvergleiche.

Vergleichsbasiertes Sortieren

- Algorithmus muss unter $n!$ vielen Anordnungsmöglichkeiten einer Folge $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ die richtige identifizieren.

Vergleichsbasiertes Sortieren

- Algorithmus muss unter $n!$ vielen Anordnungsmöglichkeiten einer Folge $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ die richtige identifizieren.
- Zu Beginn weiss der Algorithmus nichts.

Vergleichsbasiertes Sortieren

- Algorithmus muss unter $n!$ vielen Anordnungsmöglichkeiten einer Folge $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ die richtige identifizieren.
- Zu Beginn weiss der Algorithmus nichts.
- Betrachten den “Wissensgewinn” des Algorithmus als Entscheidungsbaum:

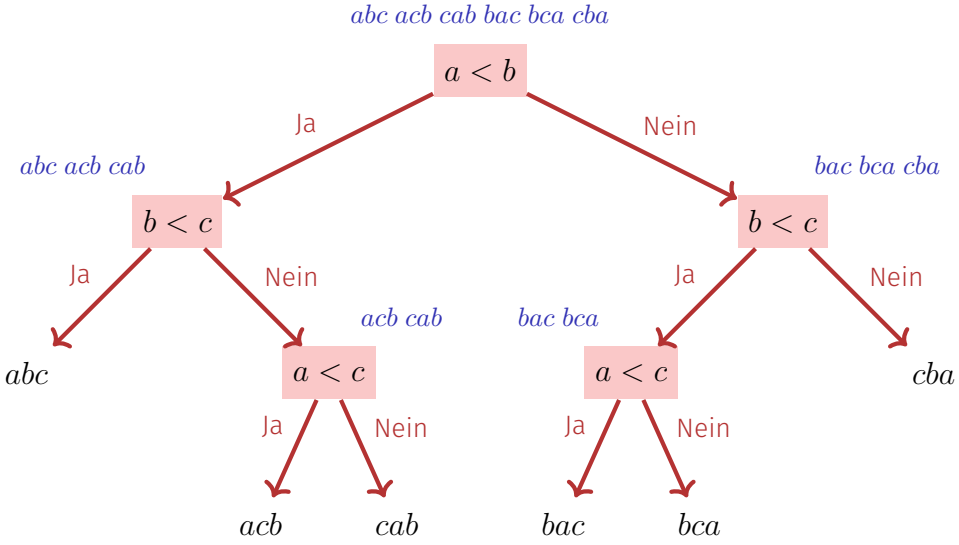
Vergleichsbasiertes Sortieren

- Algorithmus muss unter $n!$ vielen Anordnungsmöglichkeiten einer Folge $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ die richtige identifizieren.
- Zu Beginn weiss der Algorithmus nichts.
- Betrachten den “Wissensgewinn” des Algorithmus als Entscheidungsbaum:
  - Knoten enthalten verbleibende Möglichkeiten

Vergleichsbasiertes Sortieren

- Algorithmus muss unter $n!$ vielen Anordnungsmöglichkeiten einer Folge $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ die richtige identifizieren.
- Zu Beginn weiss der Algorithmus nichts.
- Betrachten den “Wissensgewinn” des Algorithmus als Entscheidungsbaum:
  - Knoten enthalten verbleibende Möglichkeiten
  - Kanten enthalten Entscheidungen

Entscheidungsbaum

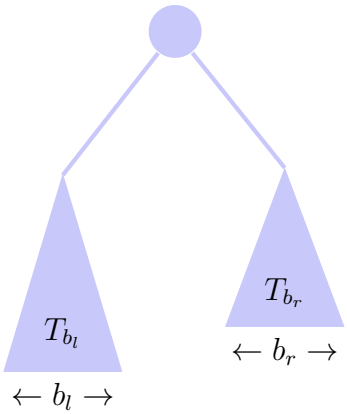


Entscheidungsbaum

Ein binärer Baum mit L Blättern hat $K = L - 1$ innere Knoten.[11]
Die Höhe eines binären Baumes mit L Blättern ist mindestens $\log_2 L$. $\Rightarrow$ Höhe des Entscheidungsbaumes $h \geq \log n! \in \Omega(n \log n)$.
Somit auch die Länge des längsten Pfades im Entscheidungsbaum $\in \Omega(n \log n)$.
Bleibt zu zeigen: mittlere Länge $M(n)$ eines Pfades $M(n) \in \Omega(n \log n)$.

[11] Beweis: starte mit leerem Baumm, $K = 0$, $L = 1$. Jeder hinzugefügte Knoten ersetzt ein Blatt durch 2 Blätter. Also.

Untere Schranke im Mittel



- Entscheidungsbaum T_n mit n Blättern, mittlere Tiefe eines Blatts $m(T_n)$
- Annahme: $m(T_n) \geq \log n$ nicht für alle n.
- Wähle kleinstes b mit $m(T_b) < \log b \Rightarrow b \geq 2$
- $b_l + b_r = b$ with $b_l > 0$ und $b_r > 0 \Rightarrow$ $b_l < b, b_r < b \Rightarrow m(T_{b_l}) \geq \log b_l$ und $m(T_{b_r}) \geq \log b_r$

Untere Schranke im Mittel

Mittlere Tiefe eines Blatts:

$$\begin{aligned} m(T_b) &= \frac{b_l}{b}(m(T_{b_l})+1) + \frac{b_r}{b}(m(T_{b_r})+1) \\ &\geq \frac{1}{b}(b_l(\log b_l + 1) + b_r(\log b_r + 1)) = \frac{1}{b}(b_l \log 2b_l + b_r \log 2b_r) \\ &\geq \frac{1}{b}(b \log b) = \log b. \end{aligned}$$

Widerspruch. ■

Die letzte Ungleichung gilt, da $f(x) = x \log x$ konvex ist ($f''(x) = 1/x > 0$) und für eine konvexe Funktion gilt $f((x+y)/2) \leq 1/2 f(x) + 1/2 f(y)$ ($x = 2b_l$, $y = 2b_r$ einsetzen).[12] Einsetzen von $x = 2b_l$, $y = 2b_r$, und $b_l + b_r = b$.

[12] allgemein $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ für $0 \leq \lambda \leq 1$.

9.2 Radixsort und Bucketsort

Radixsort, Bucketsort [Ottman/Widmayer, Kap. 2.5, Cormen et al, Kap. 8.3]

Radix Sort

Vergleichsbasierte Sortierverfahren: Schlüssel vergleichbar ($<$ oder $>$, $=$). Ansonsten keine Voraussetzung.

Radix Sort

Vergleichsbasierte Sortierverfahren: Schlüssel vergleichbar ($<$ oder $>$, $=$). Ansonsten keine Voraussetzung.

Andere Idee: nutze mehr Information über die Zusammensetzung der Schlüssel.

Annahmen

Annahme: Schlüssel darstellbar als Wörter aus einem Alphabet mit m Elementen.

Beispiele

$m = 10$ Dezimalzahlen $183 = 183_{10}$

m heisst die Wurzel (lateinisch *Radix) der Darstellung.*

Annahmen

Annahme: Schlüssel darstellbar als Wörter aus einem Alphabet mit m Elementen.

Beispiele

$m = 10$	Dezimalzahlen	$183 = 183_{10}$
$m = 2$	Dualzahlen	101_2

m heisst die Wurzel (lateinisch *Radix) der Darstellung.*

Annahmen

Annahme: Schlüssel darstellbar als Wörter aus einem Alphabet mit m Elementen.

Beispiele

$m = 10$	Dezimalzahlen	$183 = 183_{10}$
$m = 2$	Dualzahlen	101_2
$m = 16$	Hexadezimalzahlen	$A0_{16}$

m heisst die Wurzel (lateinisch *Radix) der Darstellung.*

Annahmen

Annahme: Schlüssel darstellbar als Wörter aus einem Alphabet mit m Elementen.

Beispiele

$m = 10$	Dezimalzahlen	$183 = 183_{10}$
$m = 2$	Dualzahlen	101_2
$m = 16$	Hexadezimalzahlen	$A0_{16}$
$m = 26$	Wörter	`"INFORMATIK"`

m heisst die Wurzel (lateinisch *Radix) der Darstellung.*

Annahmen

- Schlüssel =m-adische Zahlen mit gleicher Länge.

Annahmen

- Schlüssel =m-adische Zahlen mit gleicher Länge.
- Verfahren z zur Extraktion der k-ten Ziffer eines Schlüssels in $\mathcal{O}(1)$ Schritten.

Beispiel

$$z_{10}(0, 85) = 5$$
$$z_{10}(1, 85) = 8$$
$$z_{10}(2, 85) = 0$$

Radix-Exchange-Sort

Schlüssel mit Radix 2.
Beobachtung: Wenn für ein $k \geq 0$:

$$z_2(i, x) = z_2(i, y) \text{ für alle } i > k$$

und

$$z_2(k, x) < z_2(k, y),$$

dann ist $x < y$.

Radix-Exchange-Sort

Idee:

- Starte mit maximalem k.
- Binäres Aufteilen der Datensätze mit $z_2(k, \cdot) = 0$ vs. $z_2(k, \cdot) = 1$ wie bei Quicksort.
- $k \leftarrow k - 1$.

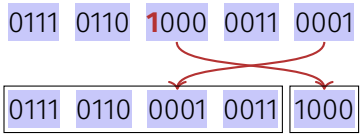
Radix-Exchange-Sort

0111 0110 1000 0011 0001

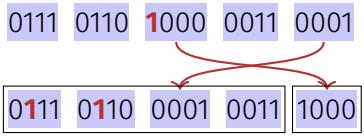
Radix-Exchange-Sort

0111 0110 1000 0011 0001

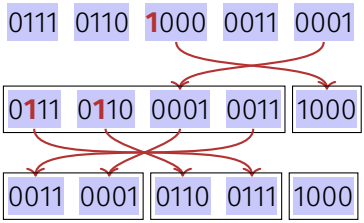
Radix-Exchange-Sort



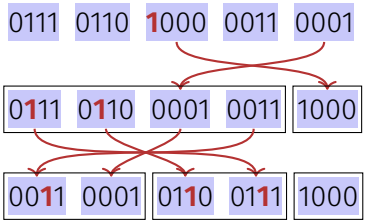
Radix-Exchange-Sort



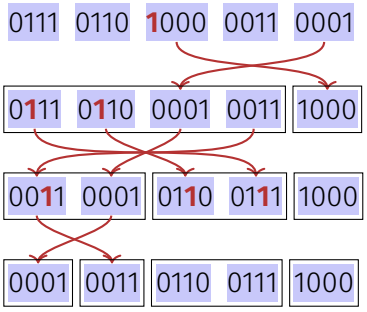
Radix-Exchange-Sort



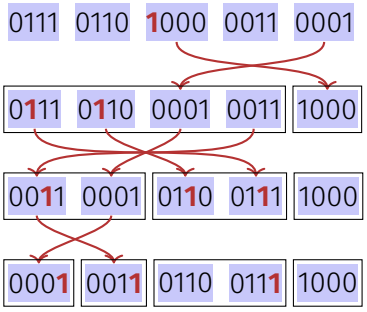
Radix-Exchange-Sort



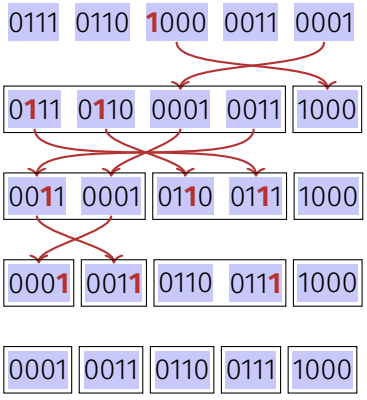
Radix-Exchange-Sort



Radix-Exchange-Sort



Radix-Exchange-Sort



Algorithmus RadixExchangeSort(A, l, r, b)

Input: Array A der Länge n, linke und rechte Grenze $1 \leq l \leq r \leq n$, Bitposition b

Output: Array A, im Bereich $[l, r]$ nach Bits $[0, \ldots, b]$ sortiert.

if $l < r$ **and** $b \geq 0$ **then**

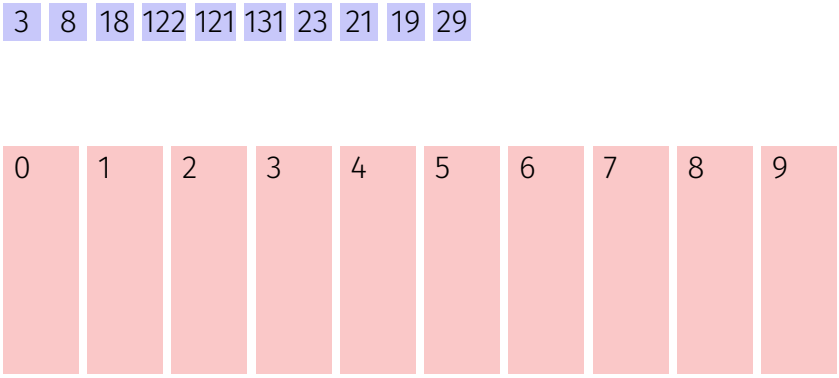
- $i \leftarrow l - 1$
- $j \leftarrow r + 1$
- **repeat**
  - **repeat** $i \leftarrow i + 1$ **until** $z_2(b, A[i]) = 1$ **or** $i \geq j$
  - **repeat** $j \leftarrow j - 1$ **until** $z_2(b, A[j]) = 0$ **or** $i \geq j$
  - **if** $i < j$ **then** swap$(A[i], A[j])$
- **until** $i \geq j$
- RadixExchangeSort$(A, l, i - 1, b - 1)$
- RadixExchangeSort$(A, i, r, b - 1)$

Analyse

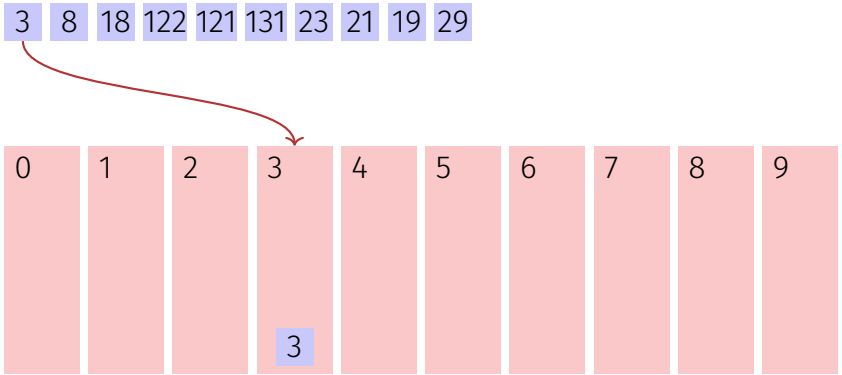
RadixExchangeSort ist rekursiv mit maximaler Rekursionstiefe = maximaler Anzahl Ziffern p.

Laufzeit im schlechtesten Fall $\mathcal{O}(p \cdot n)$.

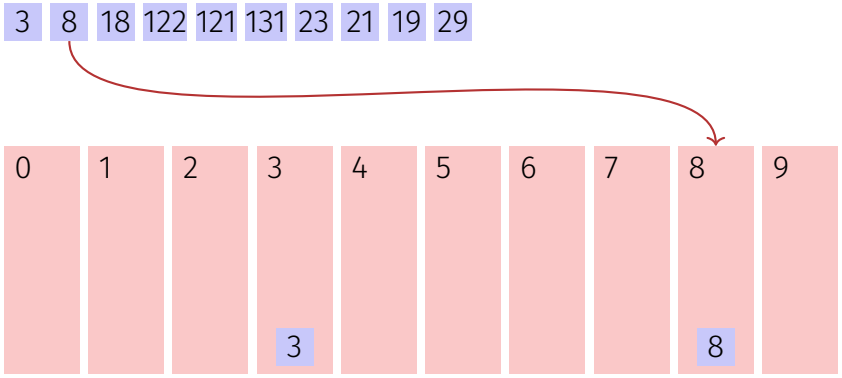
Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)



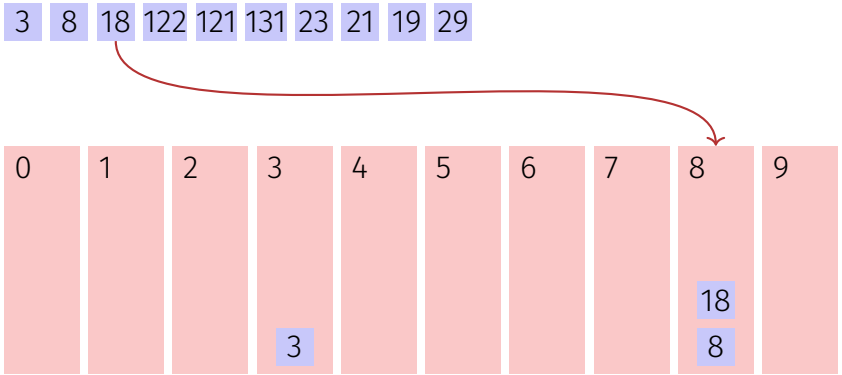
Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)



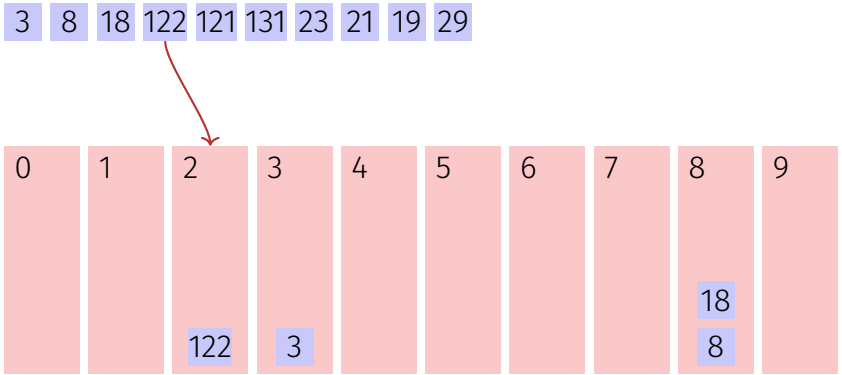
Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)



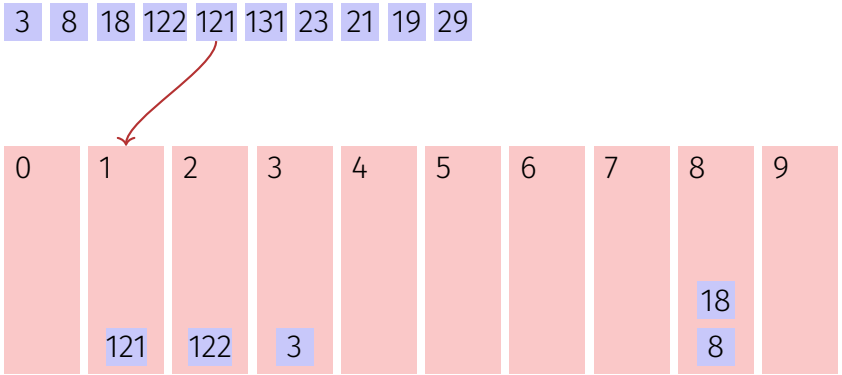
Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)



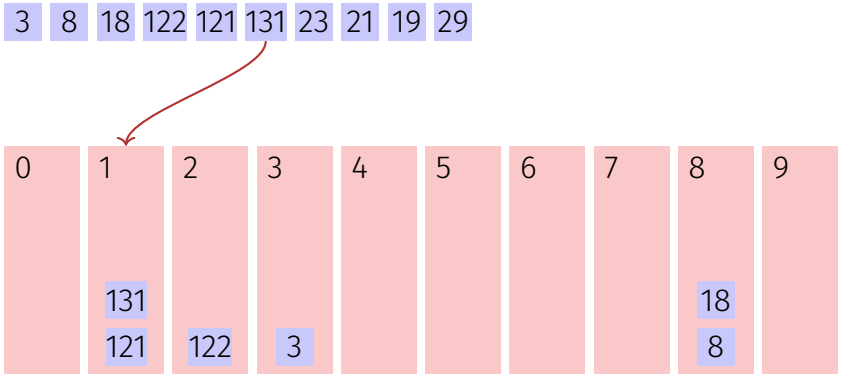
Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)



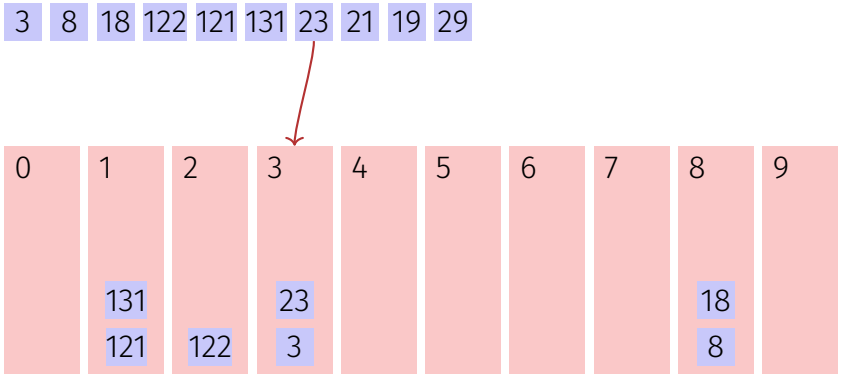
Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)



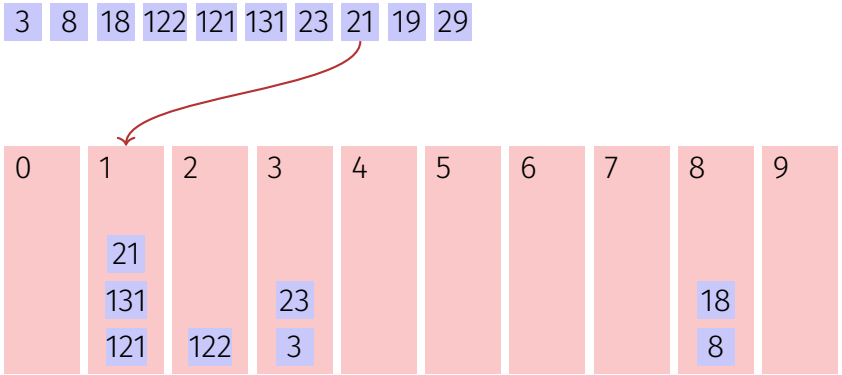
Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)



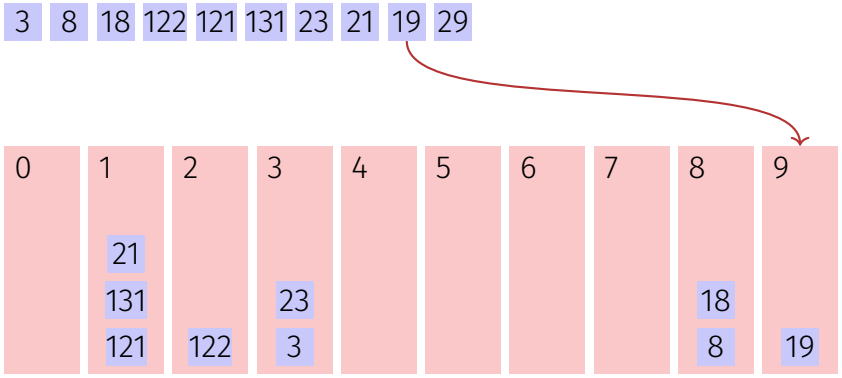
Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)



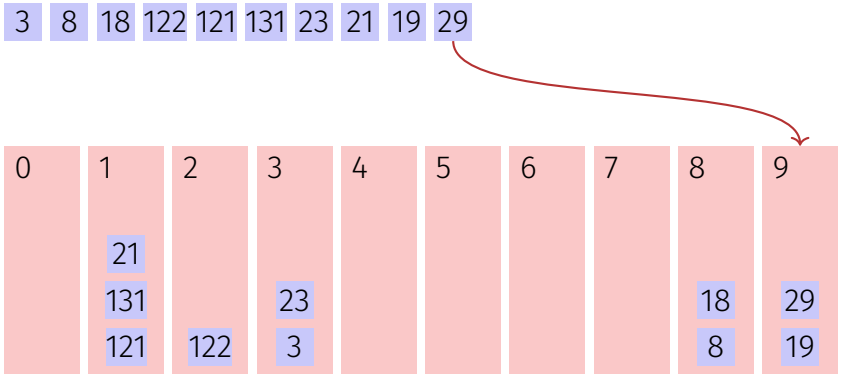
Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)



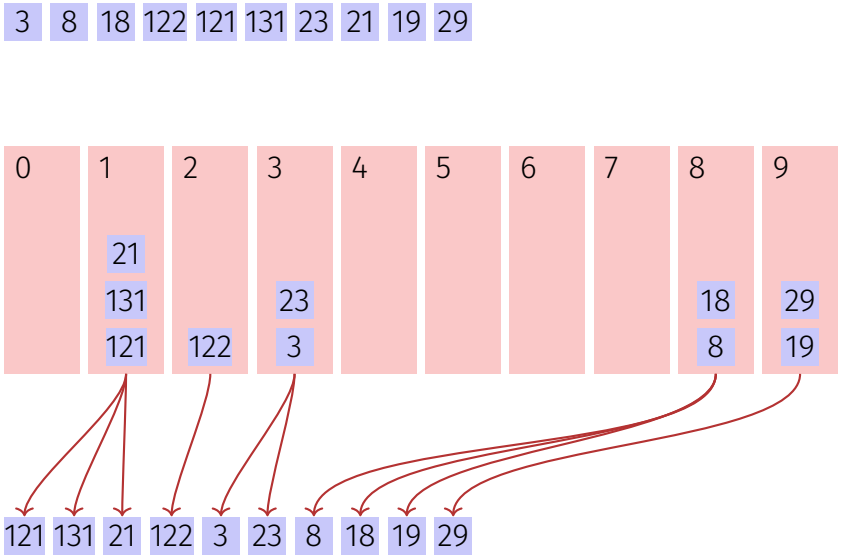
Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)



Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)



Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)

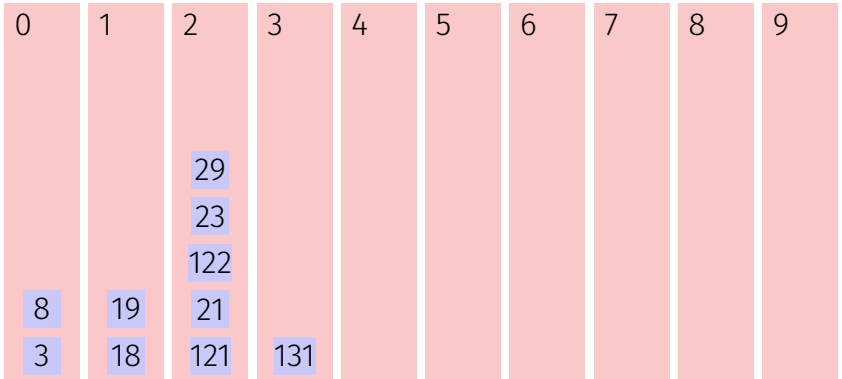


Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)

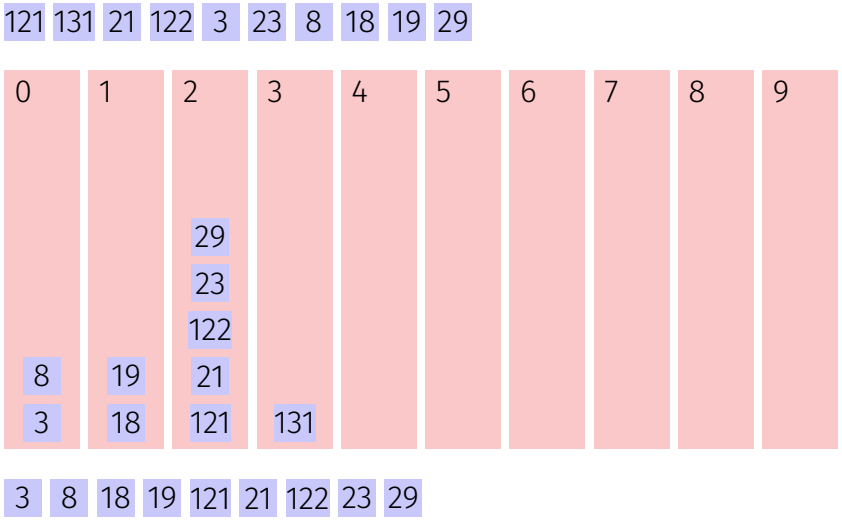
121 131 21 122 3 23 8 18 19 29

Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)

121 131 21 122 3 23 8 18 19 29



Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)

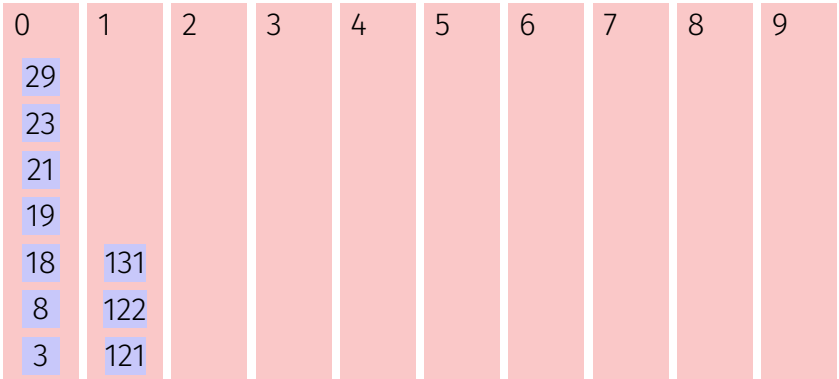


Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)

3 8 18 19 121 21 122 23 29

Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)

3 8 18 19 121 21 122 23 29



Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)

3 8 18 19 121 21 122 23 29

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
29									
23									
21									
19									
18	131								
8	122								
3	121								

3 8 18 19 21 23 29 121 122 131 

Implementationsdetails

Bucketgrösse sehr unterschiedlich. Möglichkeiten

- Verkettete Liste oder dynamisches Array für jede Ziffer.
- Ein Array der Länge n, Offsets für jede Ziffer in erstem Durchlauf bestimmen.

Annahmen: Eingabelänge n , Anzahl Bits / Ganzzahl: k , Anzahl Buckets: 2^b
Asymptotische Laufzeit $\mathcal{O}(\frac{k}{b} \cdot (n + 2^b)$.
Zum Beispiel: $k = 32$, $2^b = 256 : \frac{k}{b} \cdot (n + 2^b) = 4n + 1024$.

Bucket Sort – Andere Voraussetzung

Annahme: gleichmässig verteilte Daten, z.B. aus $[0, 1)$

Input: Array A der Länge n, $A_i \in [0, 1)$, Konstante $M \in \mathbb{N}^+$
Output: Sortiertes Array
$k \leftarrow \lceil n/M \rceil$
$B \leftarrow$ new array of k empty lists
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  $B[\lfloor A_i \cdot k \rfloor]$.append$(A[i])$
for $i \leftarrow 1$ **to** k **do**
  sort $B[i]$ // z.B. insertion sort, mit Laufzeit $\mathcal{O}(M^2)$
return $B[0] \circ B[1] \circ \cdots \circ B[k]$ // konkateniert

Erwartete asymptotische Laufzeit $\mathcal{O}(n)$ (Beweis in Cormen et al, Kap. 8.4)