

7. Sortieren I

Einfache Sortierverfahren

7.1 Einfaches Sortieren

Sortieren durch Auswahl, Sortieren durch Einfügen, Bubblesort

[Ottman/Widmayer, Kap. 2.1, Cormen et al, Kap. 2.1, 2.2, Exercise 2.2-2, Problem 2-2

Problemstellung

Eingabe: Ein Array $A = (A[1], \dots, A[n])$ der Länge n .

Ausgabe: Eine Permutation A' von A , die sortiert ist: $A'[i] \leq A'[j]$ für alle $1 \leq i \leq j \leq n$.

Algorithmus: IsSorted(A)

Input: Array $A = (A[1], \dots, A[n])$ der Länge n .

Output: Boolesche Entscheidung "sortiert" oder "nicht sortiert"

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do  
  if  $A[i] > A[i + 1]$  then  
    return "nicht sortiert";  
return "sortiert";
```

Beobachtung

IsSorted(A): “nicht sortiert”, wenn $A[i] > A[i + 1]$ für ein i .

Beobachtung

IsSorted(A): “nicht sortiert”, wenn $A[i] > A[i + 1]$ für ein i .

⇒ Idee:

Beobachtung

IsSorted(A): "nicht sortiert", wenn $A[i] > A[i + 1]$ für ein i .

⇒ Idee:

```
for  $j \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do  
  if  $A[j] > A[j + 1]$  then  
     $\text{swap}(A[j], A[j + 1]);$ 
```

Ausprobieren

 5 ↔ 6 2 8 4 1 ($j = 1$)

Ausprobieren

5 ↔ 6 2 8 4 1 ($j = 1$)

5 6 ↔ 2 8 4 1 ($j = 2$)

Ausprobieren

 $(j = 1)$

 $(j = 2)$

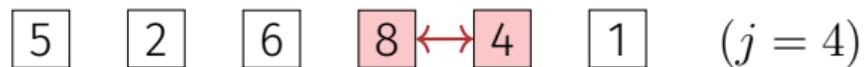
 $(j = 3)$

Ausprobieren

 $(j = 1)$

 $(j = 2)$

 $(j = 3)$

 $(j = 4)$

Ausprobieren

5 ↔ 6 2 8 4 1 ($j = 1$)

5 6 ↔ 2 8 4 1 ($j = 2$)

5 2 6 ↔ 8 4 1 ($j = 3$)

5 2 6 8 ↔ 4 1 ($j = 4$)

5 2 6 4 8 ↔ 1 ($j = 5$)

Ausprobieren

5 ↔ 6 2 8 4 1 ($j = 1$)

5 6 ↔ 2 8 4 1 ($j = 2$)

5 2 6 ↔ 8 4 1 ($j = 3$)

5 2 6 8 ↔ 4 1 ($j = 4$)

5 2 6 4 8 ↔ 1 ($j = 5$)

5 2 6 4 1 8

Ausprobieren

5 ↔ 6 2 8 4 1 ($j = 1$)

5 6 ↔ 2 8 4 1 ($j = 2$)

5 2 6 ↔ 8 4 1 ($j = 3$)

5 2 6 8 ↔ 4 1 ($j = 4$)

5 2 6 4 8 ↔ 1 ($j = 5$)

5 2 6 4 1 8

■ Nicht sortiert! 😞.

Ausprobieren

5 ↔ 6 2 8 4 1 ($j = 1$)

5 6 ↔ 2 8 4 1 ($j = 2$)

5 2 6 ↔ 8 4 1 ($j = 3$)

5 2 6 8 ↔ 4 1 ($j = 4$)

5 2 6 4 8 ↔ 1 ($j = 5$)

5 2 6 4 1 8

■ Nicht sortiert! 😞.

Ausprobieren

5 ↔ 6 2 8 4 1 ($j = 1$)

5 6 ↔ 2 8 4 1 ($j = 2$)

5 2 6 ↔ 8 4 1 ($j = 3$)

5 2 6 8 ↔ 4 1 ($j = 4$)

5 2 6 4 8 ↔ 1 ($j = 5$)

5 2 6 4 1 8

- Nicht sortiert! 😞.
- Aber das grösste Element wandert ganz nach rechts.
⇒ Neue Idee! 😊

Ausprobieren

5	6	2	8	4	1	$(j = 1, i = 1)$
5	6	2	8	4	1	$(j = 2)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 3)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 4)$
5	2	6	4	8	1	$(j = 5)$

- Wende das Verfahren iterativ an.

Ausprobieren

5	6	2	8	4	1	$(j = 1, i = 1)$
5	6	2	8	4	1	$(j = 2)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 3)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 4)$
5	2	6	4	8	1	$(j = 5)$
5	2	6	4	1	8	$(j = 1, i = 2)$

- Wende das Verfahren iterativ an.
- Für $A[1, \dots, n]$,

Ausprobieren

5	6	2	8	4	1	$(j = 1, i = 1)$
5	6	2	8	4	1	$(j = 2)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 3)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 4)$
5	2	6	4	8	1	$(j = 5)$
5	2	6	4	1	8	$(j = 1, i = 2)$
2	5	6	4	1	8	$(j = 2)$

- Wende das Verfahren iterativ an.
- Für $A[1, \dots, n]$,
dann $A[1, \dots, n - 1]$,

Ausprobieren

5	6	2	8	4	1	$(j = 1, i = 1)$
5	6	2	8	4	1	$(j = 2)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 3)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 4)$
5	2	6	4	8	1	$(j = 5)$
5	2	6	4	1	8	$(j = 1, i = 2)$
2	5	6	4	1	8	$(j = 2)$
2	5	6	4	1	8	$(j = 3)$

- Wende das Verfahren iterativ an.
- Für $A[1, \dots, n]$,
dann $A[1, \dots, n - 1]$,

Ausprobieren

5	6	2	8	4	1	$(j = 1, i = 1)$
5	6	2	8	4	1	$(j = 2)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 3)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 4)$
5	2	6	4	8	1	$(j = 5)$
5	2	6	4	1	8	$(j = 1, i = 2)$
2	5	6	4	1	8	$(j = 2)$
2	5	6	4	1	8	$(j = 3)$
2	5	4	6	1	8	$(j = 4)$

■ Wende das Verfahren iterativ an.

■ Für $A[1, \dots, n]$,
dann $A[1, \dots, n - 1]$,

Ausprobieren

5	6	2	8	4	1	$(j = 1, i = 1)$
5	6	2	8	4	1	$(j = 2)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 3)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 4)$
5	2	6	4	8	1	$(j = 5)$
5	2	6	4	1	8	$(j = 1, i = 2)$
2	5	6	4	1	8	$(j = 2)$
2	5	6	4	1	8	$(j = 3)$
2	5	4	6	1	8	$(j = 4)$
2	5	4	1	6	8	$(j = 1, i = 3)$

■ Wende das Verfahren iterativ an.

■ Für $A[1, \dots, n]$,
dann $A[1, \dots, n - 1]$,
dann $A[1, \dots, n - 2]$,

Ausprobieren

5	6	2	8	4	1	$(j = 1, i = 1)$
5	6	2	8	4	1	$(j = 2)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 3)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 4)$
5	2	6	4	8	1	$(j = 5)$
5	2	6	4	1	8	$(j = 1, i = 2)$
2	5	6	4	1	8	$(j = 2)$
2	5	6	4	1	8	$(j = 3)$
2	5	4	6	1	8	$(j = 4)$
2	5	4	1	6	8	$(j = 1, i = 3)$
2	5	4	1	6	8	$(j = 2)$
2	4	5	1	6	8	$(j = 3)$
2	4	1	5	6	8	$(j = 1, i = 4)$

■ Wende das Verfahren iterativ an.

■ Für $A[1, \dots, n]$,
dann $A[1, \dots, n - 1]$,
dann $A[1, \dots, n - 2]$,

Ausprobieren

5	6	2	8	4	1	$(j = 1, i = 1)$
5	6	2	8	4	1	$(j = 2)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 3)$
5	2	6	8	4	1	$(j = 4)$
5	2	6	4	8	1	$(j = 5)$
5	2	6	4	1	8	$(j = 1, i = 2)$
2	5	6	4	1	8	$(j = 2)$
2	5	6	4	1	8	$(j = 3)$
2	5	4	6	1	8	$(j = 4)$
2	5	4	1	6	8	$(j = 1, i = 3)$
2	5	4	1	6	8	$(j = 2)$
2	4	5	1	6	8	$(j = 3)$
2	4	1	5	6	8	$(j = 1, i = 4)$
2	4	1	5	6	8	$(j = 2)$
2	1	4	5	6	8	$(i = 1, j = 5)$
1	2	4	5	6	8	

- Wende das Verfahren iterativ an.

- Für $A[1, \dots, n]$,
dann $A[1, \dots, n - 1]$,
dann $A[1, \dots, n - 2]$,
etc.

Algorithmus: Bubblesort

Input: Array $A = (A[1], \dots, A[n])$, $n \geq 0$.

Output: Sortiertes Array A

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $n - i$  do
    if  $A[j] > A[j + 1]$  then
      swap( $A[j], A[j + 1]$ );
```

Anzahl Schlüsselvergleiche $\sum_{i=1}^{n-1} (n - i) = \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)$.
Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall: $\Theta(n^2)$

Was ist der schlechteste Fall?

Anzahl Schlüsselvergleiche $\sum_{i=1}^{n-1} (n - i) = \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)$.
Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall: $\Theta(n^2)$

Was ist der schlechteste Fall?

Wenn A absteigend sortiert ist.

Sortieren durch Auswahl

5 6 2 8 4 1 ($i = 1$)
↑

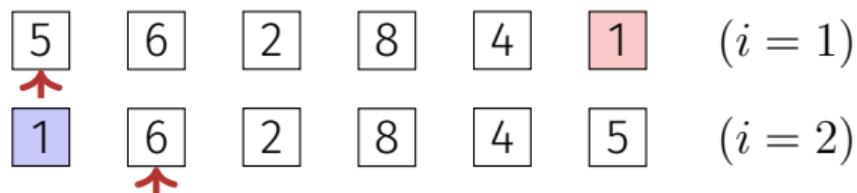
- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.

Sortieren durch Auswahl

5 6 2 8 4 1 ($i = 1$)
↑

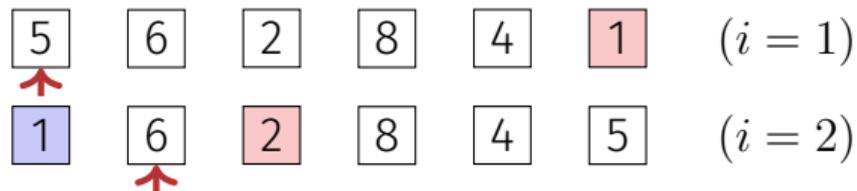
- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.
- Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.

Sortieren durch Auswahl



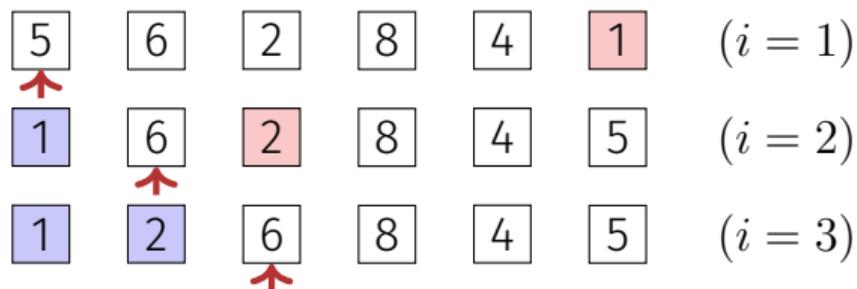
- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.
- Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.
- Unsortierter Teil wird ein Element kleiner ($i \rightarrow i + 1$). Wiederhole bis alles sortiert. ($i = n$)

Sortieren durch Auswahl



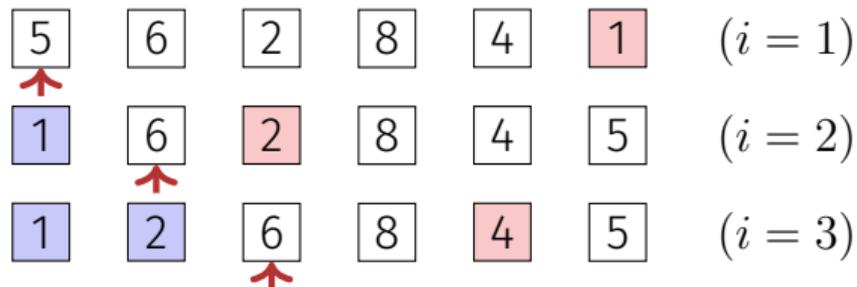
- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.
- Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.
- Unsortierter Teil wird ein Element kleiner ($i \rightarrow i + 1$). Wiederhole bis alles sortiert. ($i = n$)

Sortieren durch Auswahl



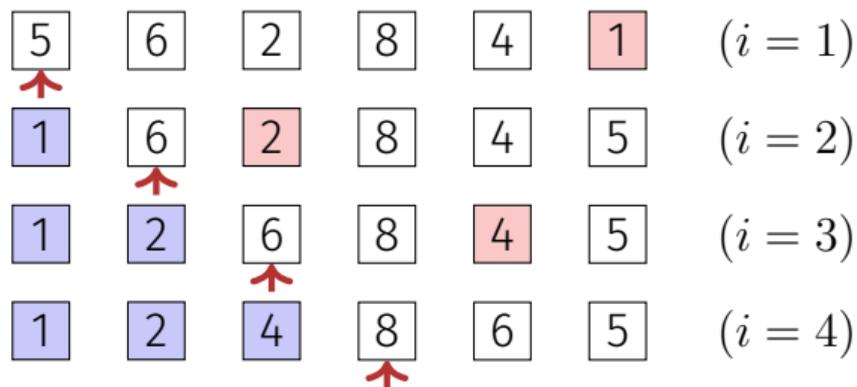
- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.
- Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.
- Unsortierter Teil wird ein Element kleiner ($i \rightarrow i + 1$). Wiederhole bis alles sortiert. ($i = n$)

Sortieren durch Auswahl



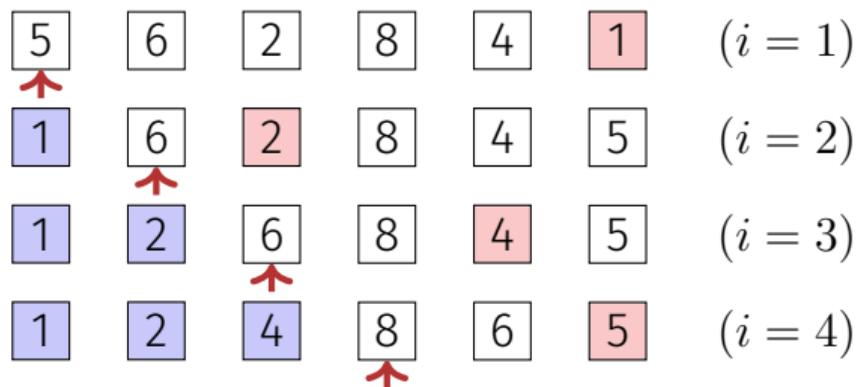
- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.
- Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.
- Unsortierter Teil wird ein Element kleiner ($i \rightarrow i + 1$). Wiederhole bis alles sortiert. ($i = n$)

Sortieren durch Auswahl



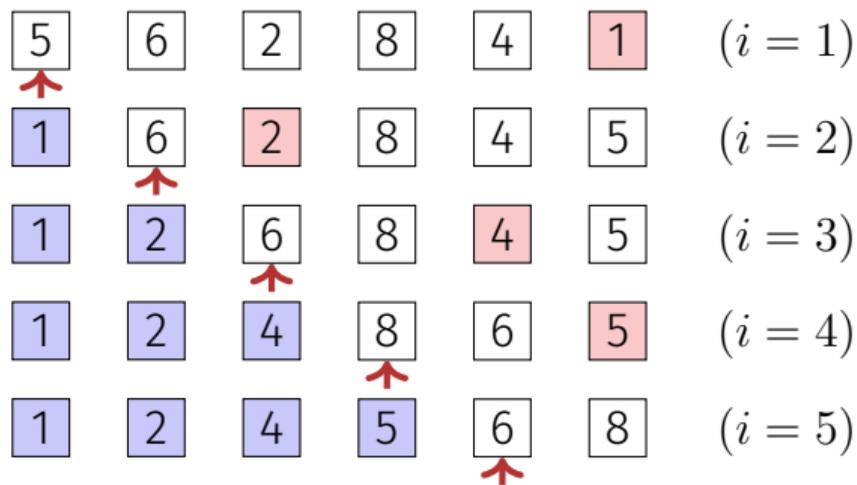
- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.
- Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.
- Unsortierter Teil wird ein Element kleiner ($i \rightarrow i + 1$). Wiederhole bis alles sortiert. ($i = n$)

Sortieren durch Auswahl



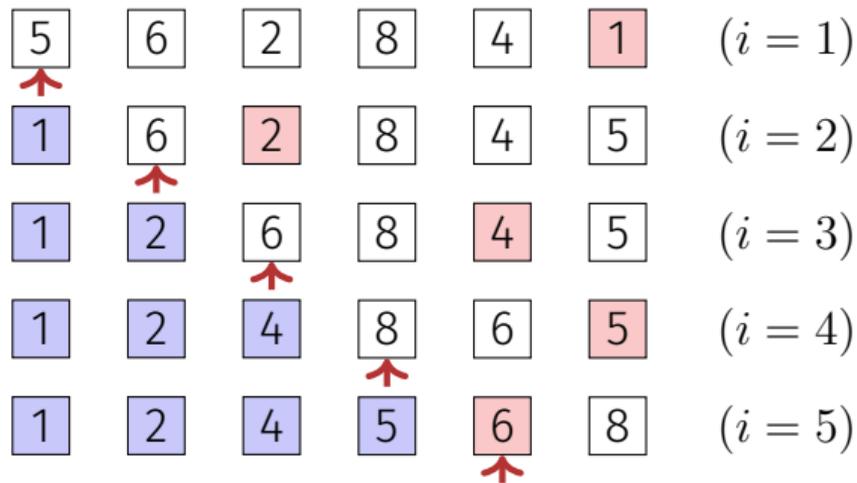
- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.
- Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.
- Unsortierter Teil wird ein Element kleiner ($i \rightarrow i + 1$). Wiederhole bis alles sortiert. ($i = n$)

Sortieren durch Auswahl



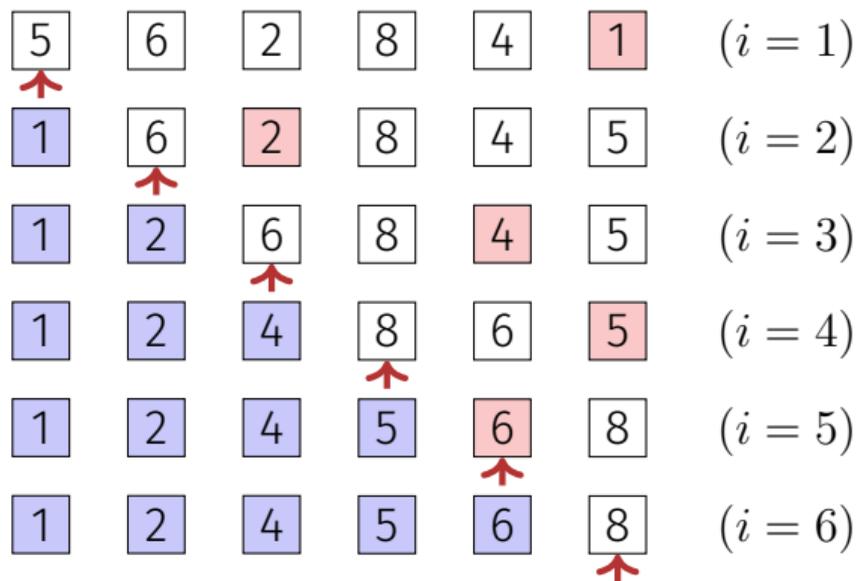
- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.
- Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.
- Unsortierter Teil wird ein Element kleiner ($i \rightarrow i + 1$). Wiederhole bis alles sortiert. ($i = n$)

Sortieren durch Auswahl



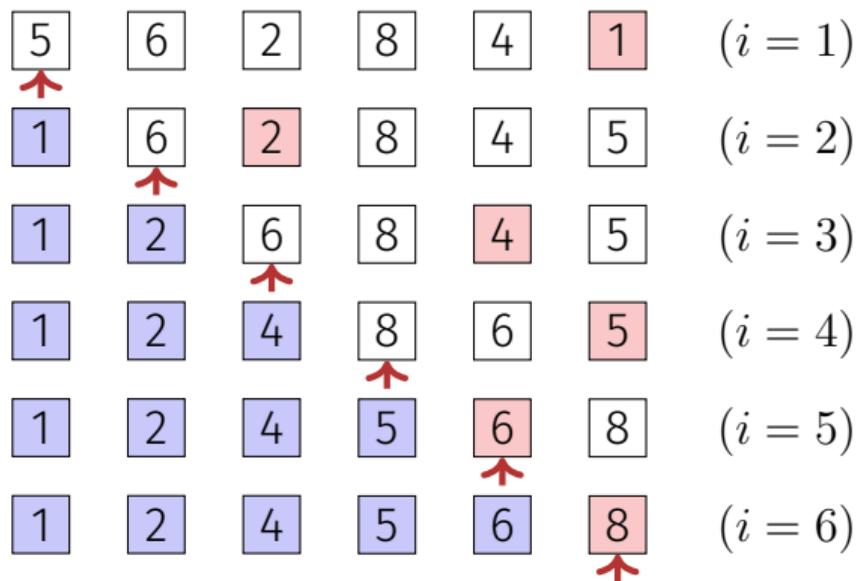
- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.
- Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.
- Unsortierter Teil wird ein Element kleiner ($i \rightarrow i + 1$). Wiederhole bis alles sortiert. ($i = n$)

Sortieren durch Auswahl



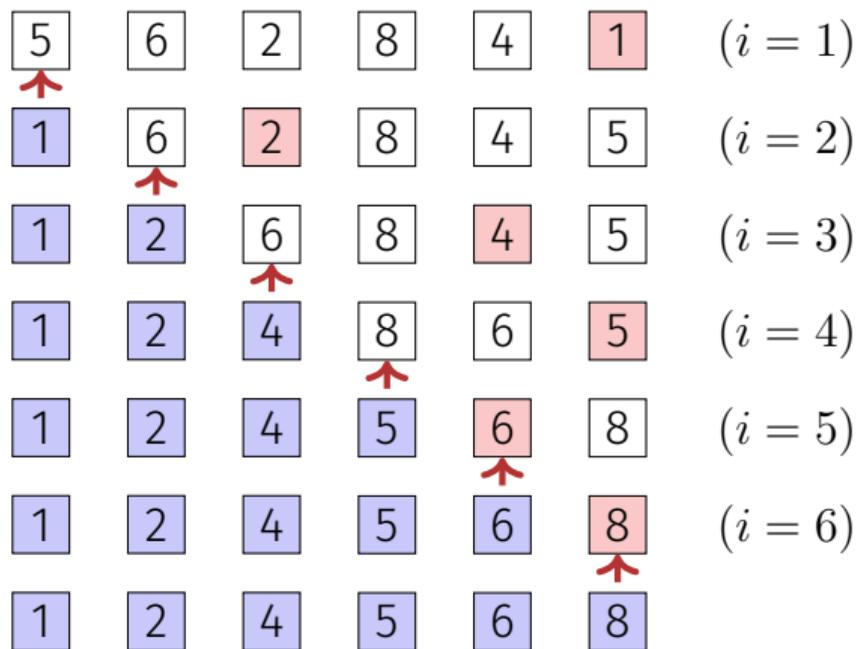
- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.
- Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.
- Unsortierter Teil wird ein Element kleiner ($i \rightarrow i + 1$). Wiederhole bis alles sortiert. ($i = n$)

Sortieren durch Auswahl



- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.
- Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.
- Unsortierter Teil wird ein Element kleiner ($i \rightarrow i + 1$). Wiederhole bis alles sortiert. ($i = n$)

Sortieren durch Auswahl



- Auswahl des kleinsten Elementes durch Suche im unsortierten Teil $A[i..n]$ des Arrays.
- Tausche kleinstes Element an das erste Element des unsortierten Teiles.
- Unsortierter Teil wird ein Element kleiner ($i \rightarrow i + 1$). Wiederhole bis alles sortiert. ($i = n$)

Algorithmus: Sortieren durch Auswahl

Input: Array $A = (A[1], \dots, A[n])$, $n \geq 0$.

Output: Sortiertes Array A

for $i \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**

$p \leftarrow i$

for $j \leftarrow i + 1$ **to** n **do**

if $A[j] < A[p]$ **then**

$p \leftarrow j$;

 swap($A[i], A[p]$)

Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall:

Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall: $\Theta(n^2)$.

Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall:

Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall: $\Theta(n^2)$.

Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall: $n - 1 = \Theta(n)$

Sortieren durch Einfügen

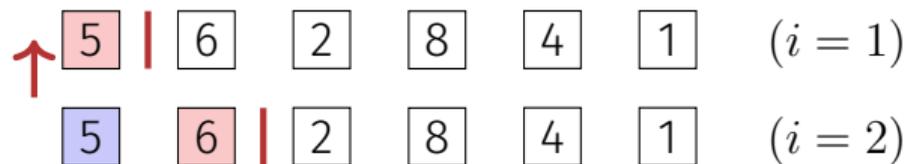
5 | 6 2 8 4 1 ($i = 1$)

Sortieren durch Einfügen

↑ 5 | 6 2 8 4 1 ($i = 1$)

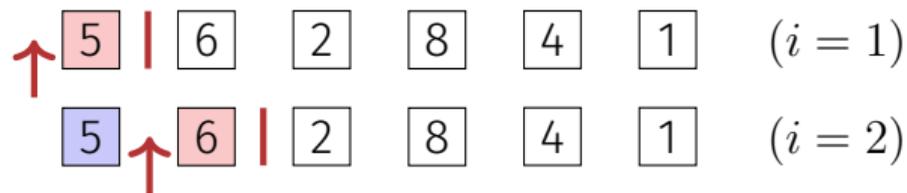
- Iteratives Vorgehen:
 $i = 1 \dots n$

Sortieren durch Einfügen



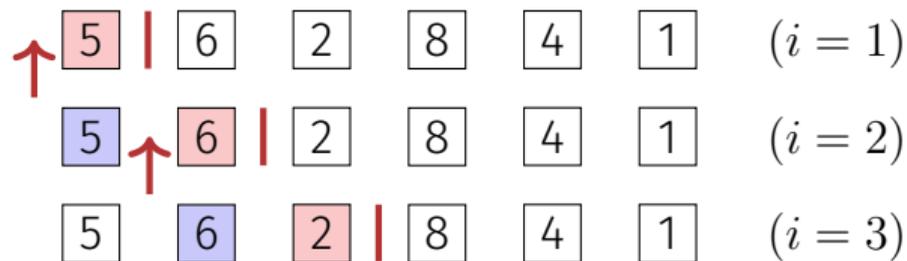
- Iteratives Vorgehen:
 $i = 1 \dots n$
- Einfügeposition für Element i bestimmen.

Sortieren durch Einfügen



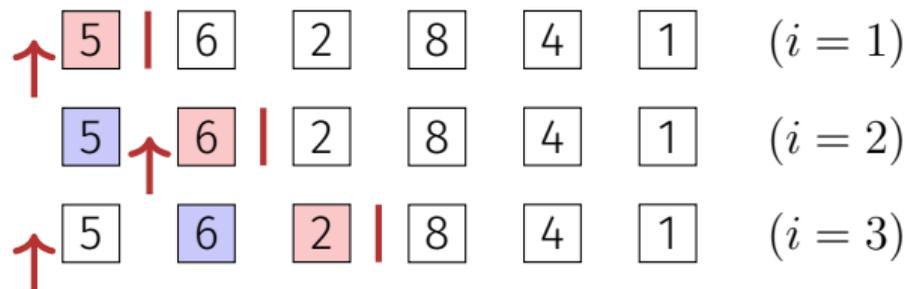
- Iteratives Vorgehen:
 $i = 1 \dots n$
- Einfügeposition für Element i bestimmen.
- Element i einfügen,

Sortieren durch Einfügen



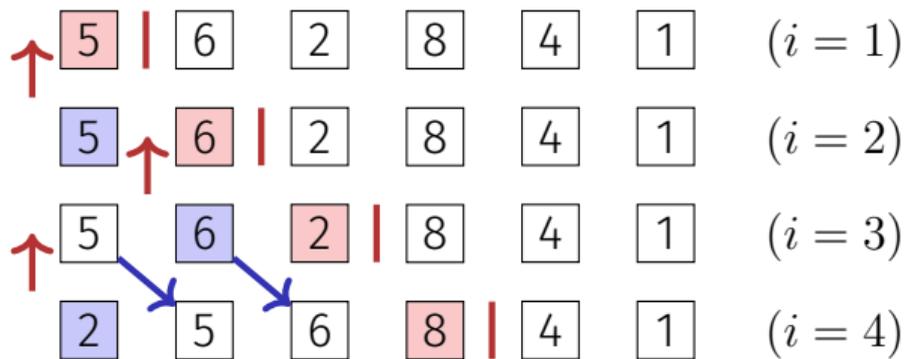
- Iteratives Vorgehen:
 $i = 1 \dots n$
- Einfügeposition für Element i bestimmen.
- Element i einfügen,

Sortieren durch Einfügen



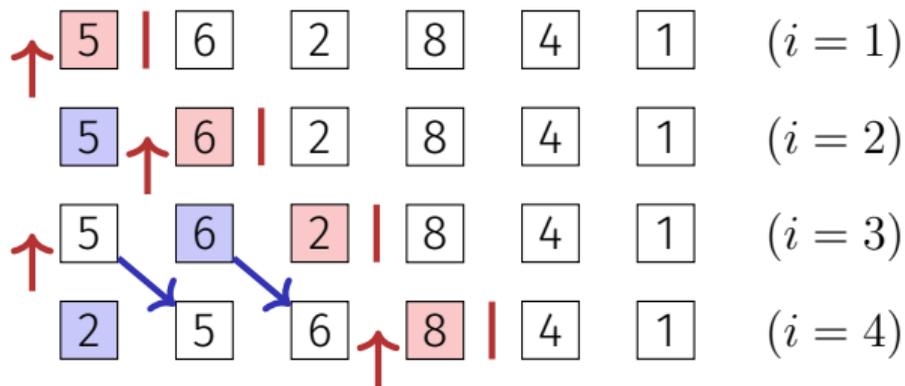
- Iteratives Vorgehen:
 $i = 1 \dots n$
- Einfügeposition für Element i bestimmen.
- Element i einfügen,

Sortieren durch Einfügen



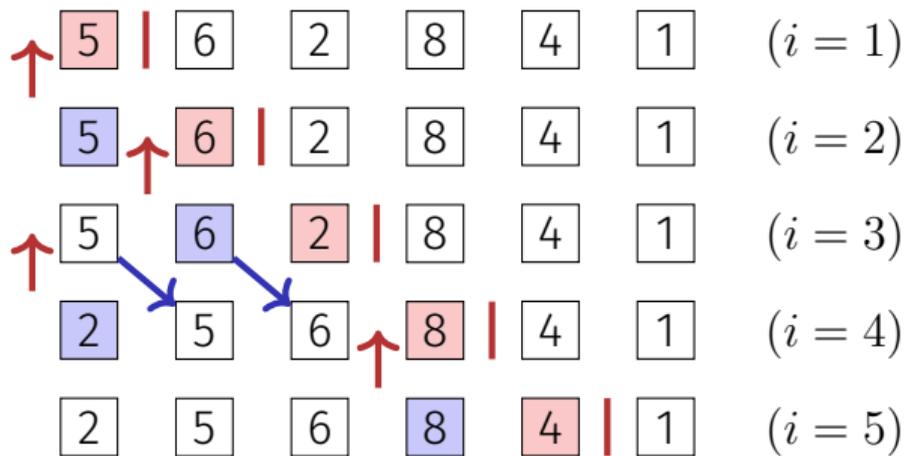
- Iteratives Vorgehen:
 $i = 1 \dots n$
- Einfügeposition für Element i bestimmen.
- Element i einfügen, ggfs. Verschiebung nötig.

Sortieren durch Einfügen



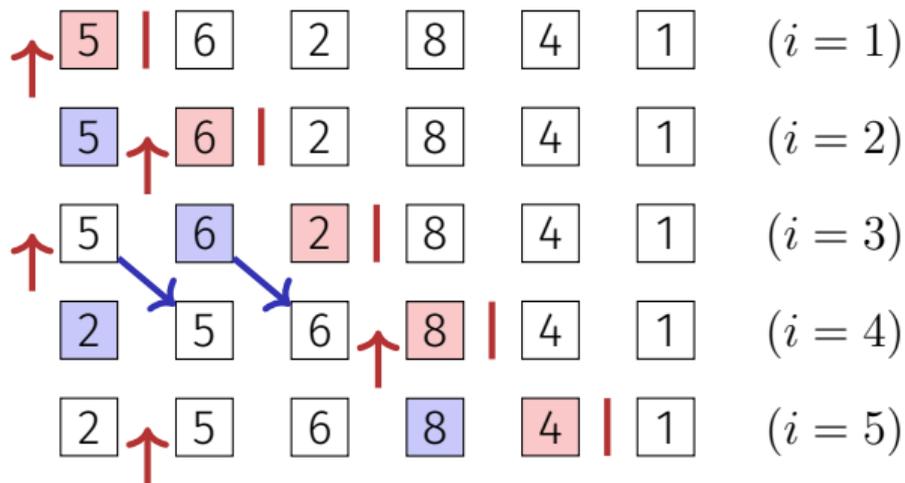
- Iteratives Vorgehen:
 $i = 1 \dots n$
- Einfügeposition für Element i bestimmen.
- Element i einfügen, ggfs. Verschiebung nötig.

Sortieren durch Einfügen



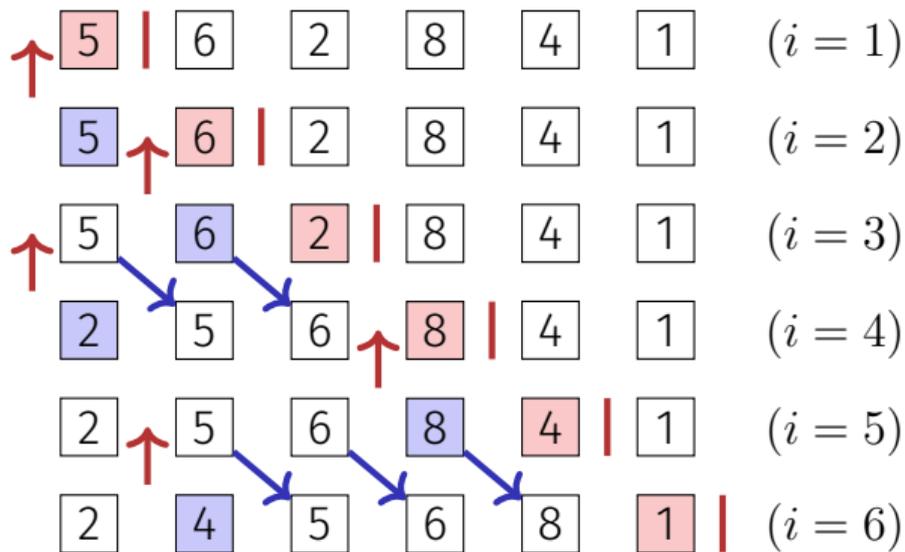
- Iteratives Vorgehen:
 $i = 1 \dots n$
- Einfügeposition für Element i bestimmen.
- Element i einfügen, ggfs. Verschiebung nötig.

Sortieren durch Einfügen



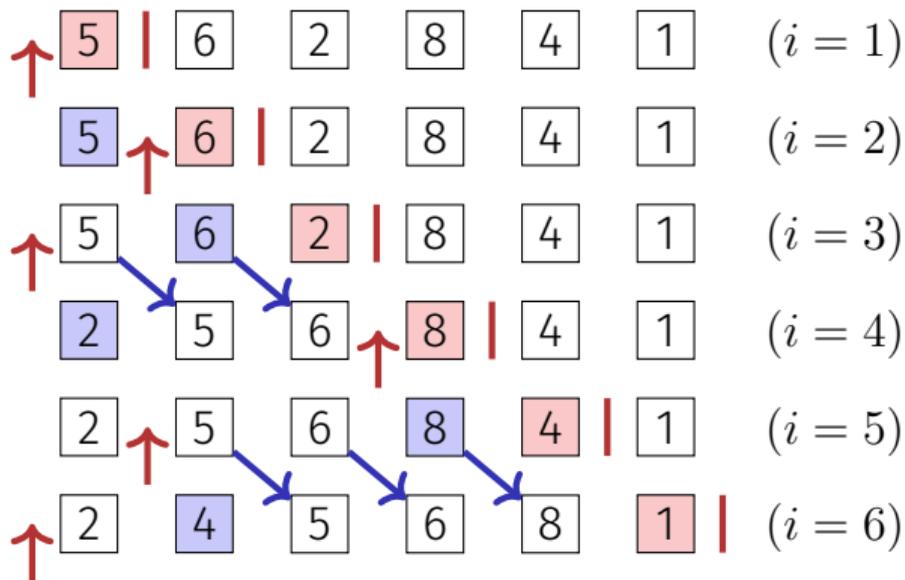
- Iteratives Vorgehen:
 $i = 1 \dots n$
- Einfügeposition für Element i bestimmen.
- Element i einfügen, ggfs. Verschiebung nötig.

Sortieren durch Einfügen



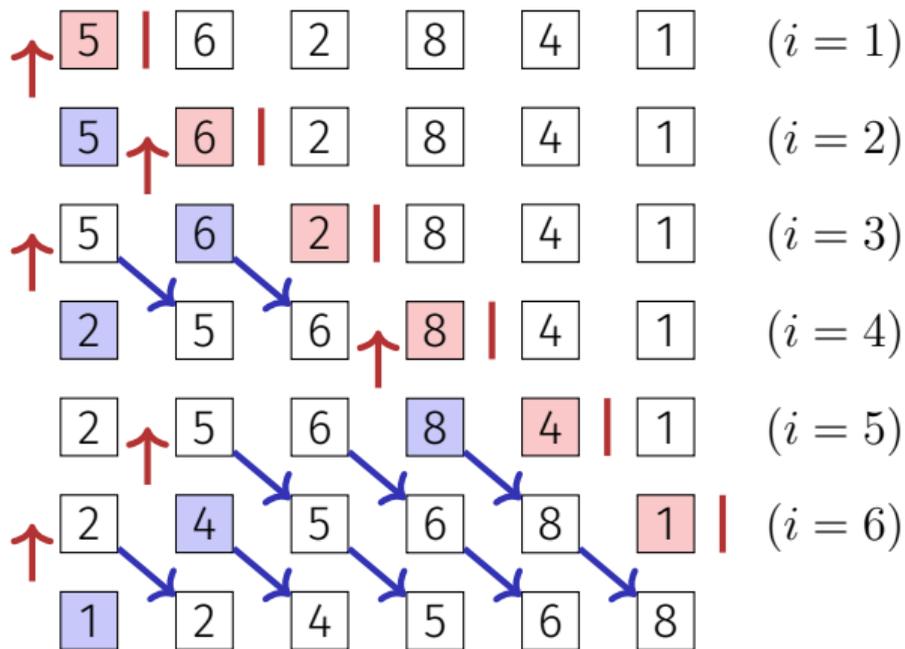
- Iteratives Vorgehen:
 $i = 1 \dots n$
- Einfügeposition für Element i bestimmen.
- Element i einfügen, ggfs. Verschiebung nötig.

Sortieren durch Einfügen



- Iteratives Vorgehen:
 $i = 1 \dots n$
- Einfügeposition für Element i bestimmen.
- Element i einfügen, ggfs. Verschiebung nötig.

Sortieren durch Einfügen



- Iteratives Vorgehen:
 $i = 1 \dots n$
- Einfügeposition für Element i bestimmen.
- Element i einfügen, ggfs. Verschiebung nötig.

Sortieren durch Einfügen

Welchen Nachteil hat der Algorithmus im Vergleich zum Sortieren durch Auswahl?

Sortieren durch Einfügen

Welchen Nachteil hat der Algorithmus im Vergleich zum Sortieren durch Auswahl?

Im schlechtesten Fall viele Elementverschiebungen.

Welchen Vorteil hat der Algorithmus im Vergleich zum Sortieren durch Auswahl?

Sortieren durch Einfügen

Welchen Nachteil hat der Algorithmus im Vergleich zum Sortieren durch Auswahl?

Im schlechtesten Fall viele Elementverschiebungen.

Welchen Vorteil hat der Algorithmus im Vergleich zum Sortieren durch Auswahl?

Der Suchbereich (Einfügebereich) ist bereits sortiert. Konsequenz: binäre Suche möglich.

Algorithmus: Sortieren durch Einfügen

Input: Array $A = (A[1], \dots, A[n])$, $n \geq 0$.

Output: Sortiertes Array A

for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**

$x \leftarrow A[i]$

$p \leftarrow \text{BinarySearch}(A, 1, i - 1, x)$; // Kleinstes $p \in [1, i]$ mit $A[p] \geq x$

for $j \leftarrow i - 1$ **downto** p **do**

$A[j + 1] \leftarrow A[j]$

$A[p] \leftarrow x$

Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall:

Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall:

$$\sum_{k=1}^{n-1} a \cdot \log k = a \log((n-1)!) \in \Theta(n \log n).$$

Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall:

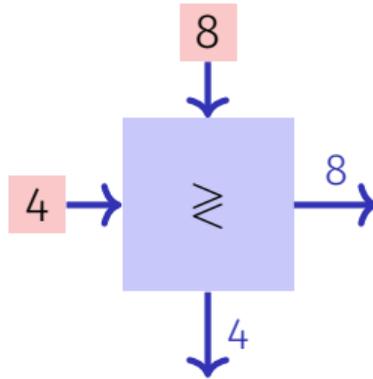
Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall:

$$\sum_{k=1}^{n-1} a \cdot \log k = a \log((n-1)!) \in \Theta(n \log n).$$

Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall: $\sum_{k=2}^n (k-1) \in \Theta(n^2)$

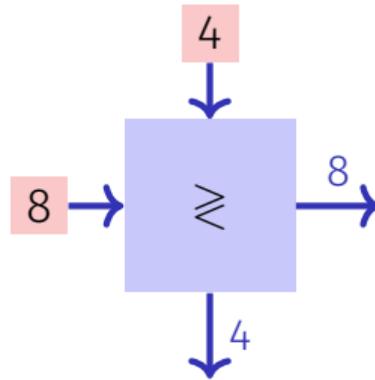
Anderer Blickwinkel

Sortierknoten:



Anderer Blickwinkel

Sortierknoten:



Anderer Blickwinkel

5

6



2



8



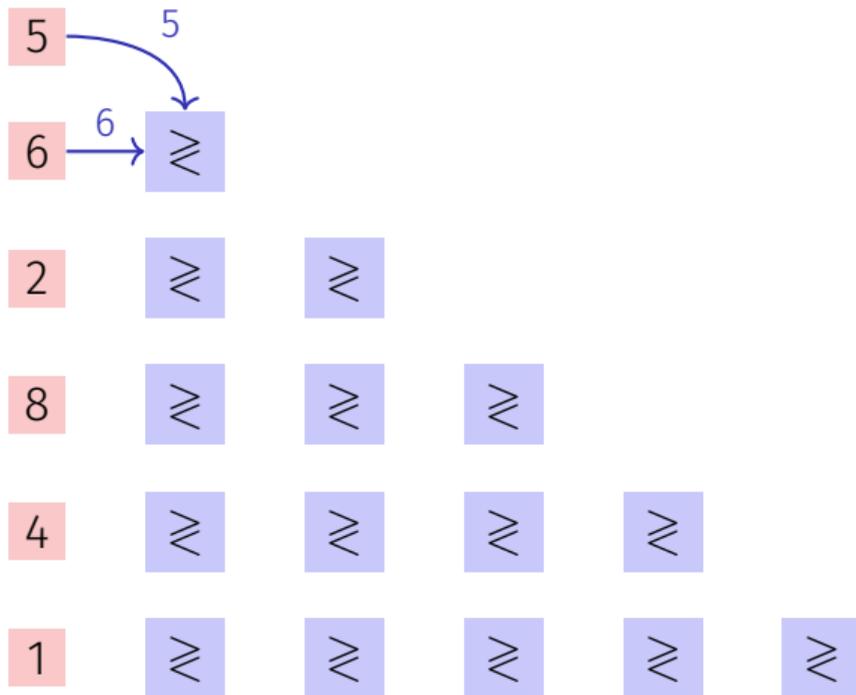
4



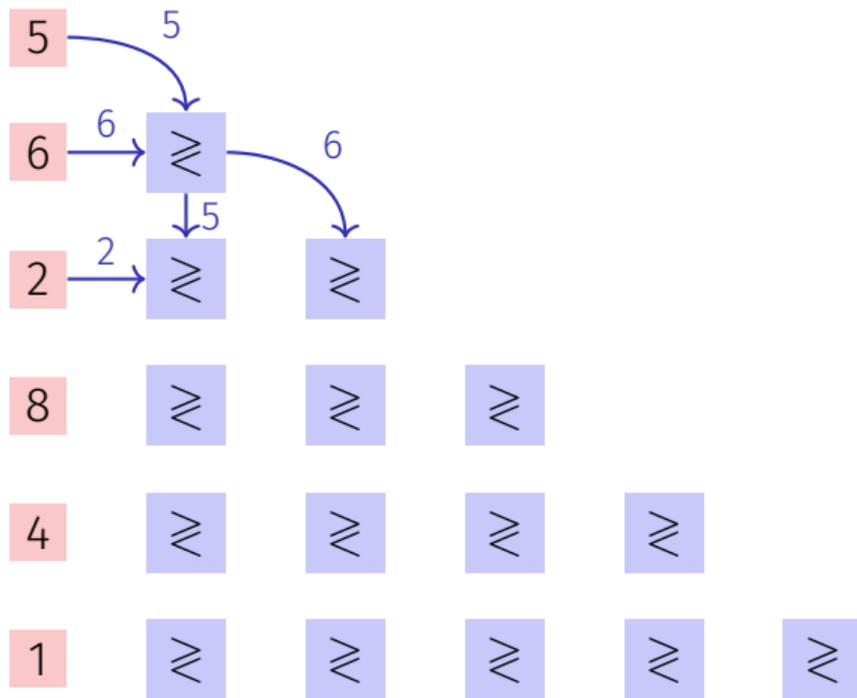
1



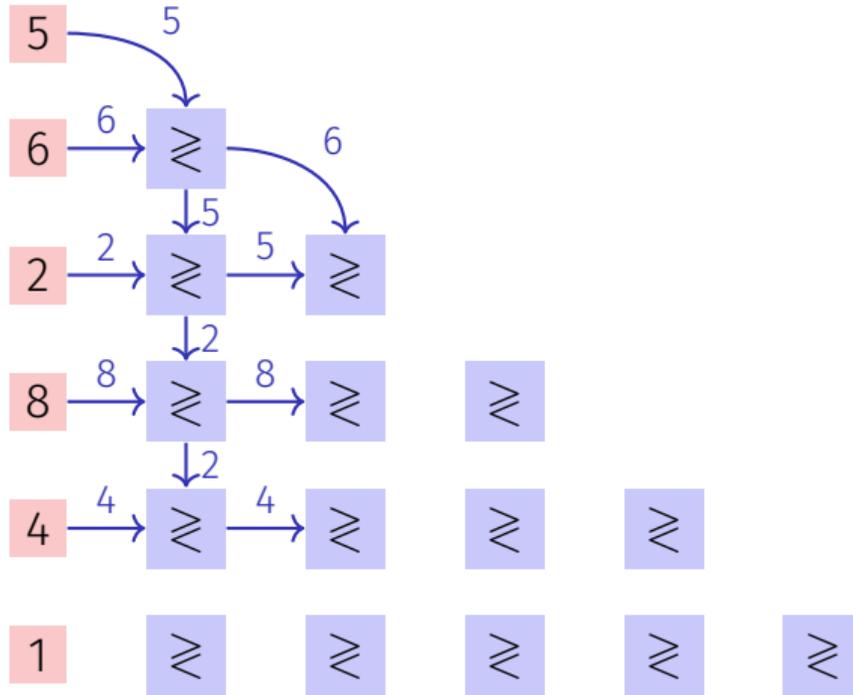
Anderer Blickwinkel



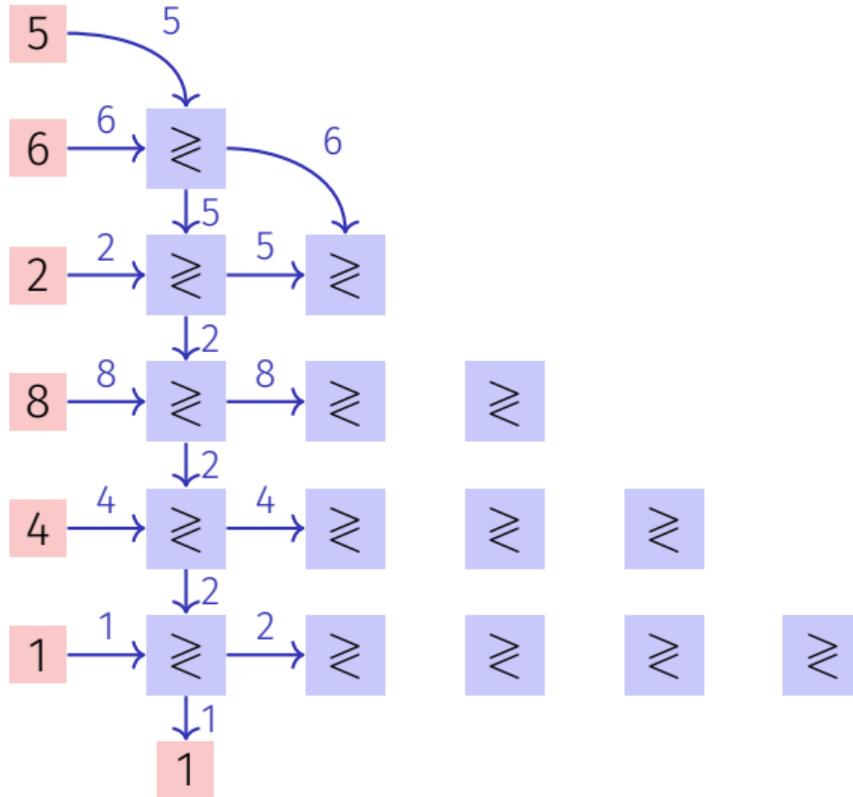
Anderer Blickwinkel



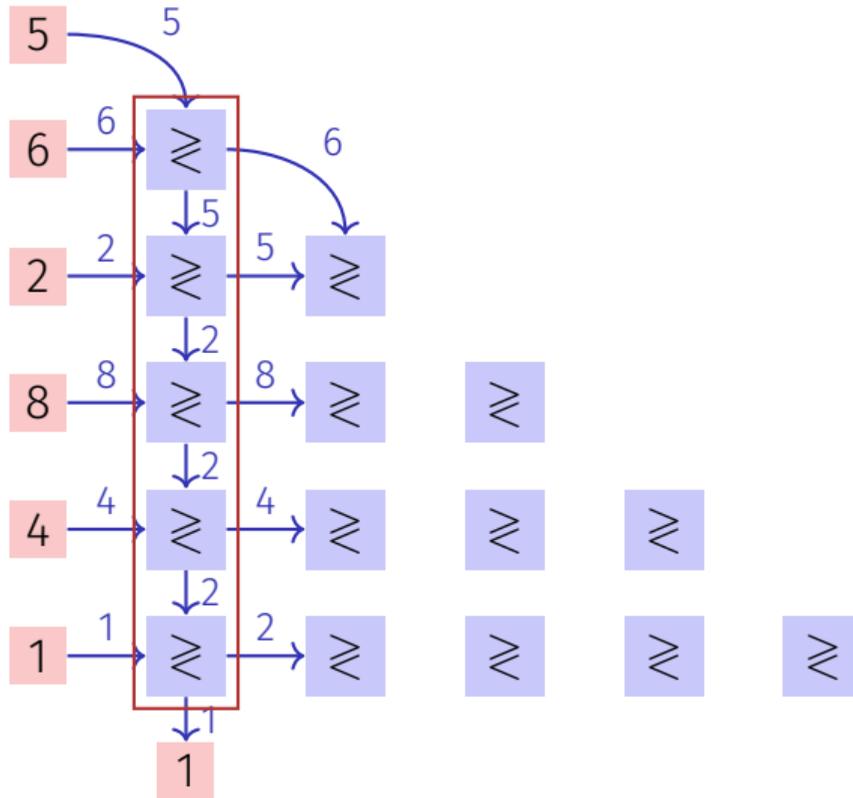
Anderer Blickwinkel



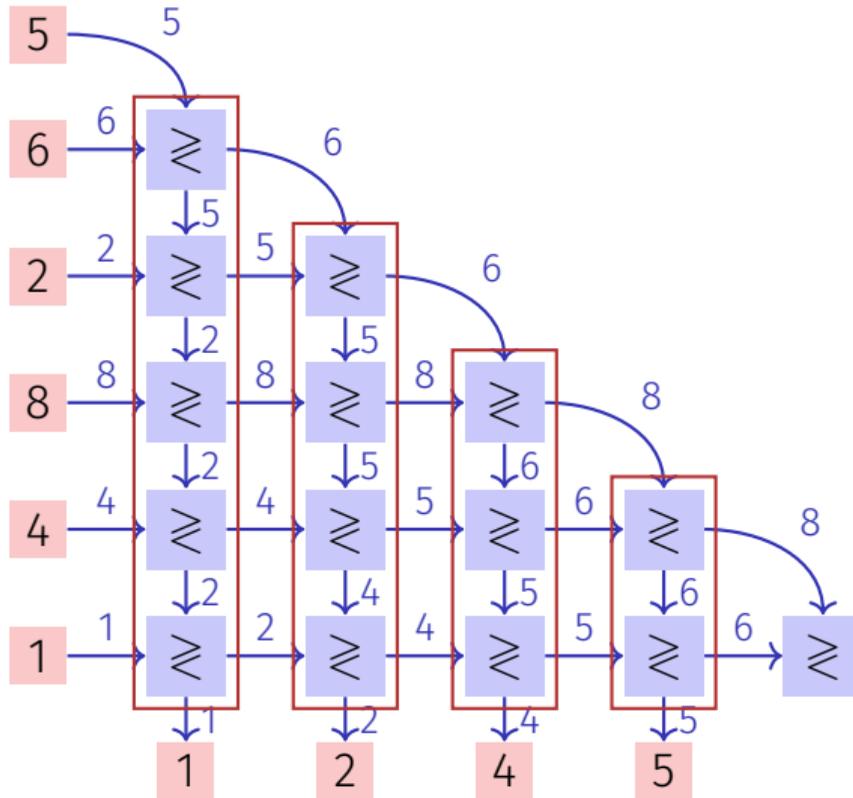
Anderer Blickwinkel



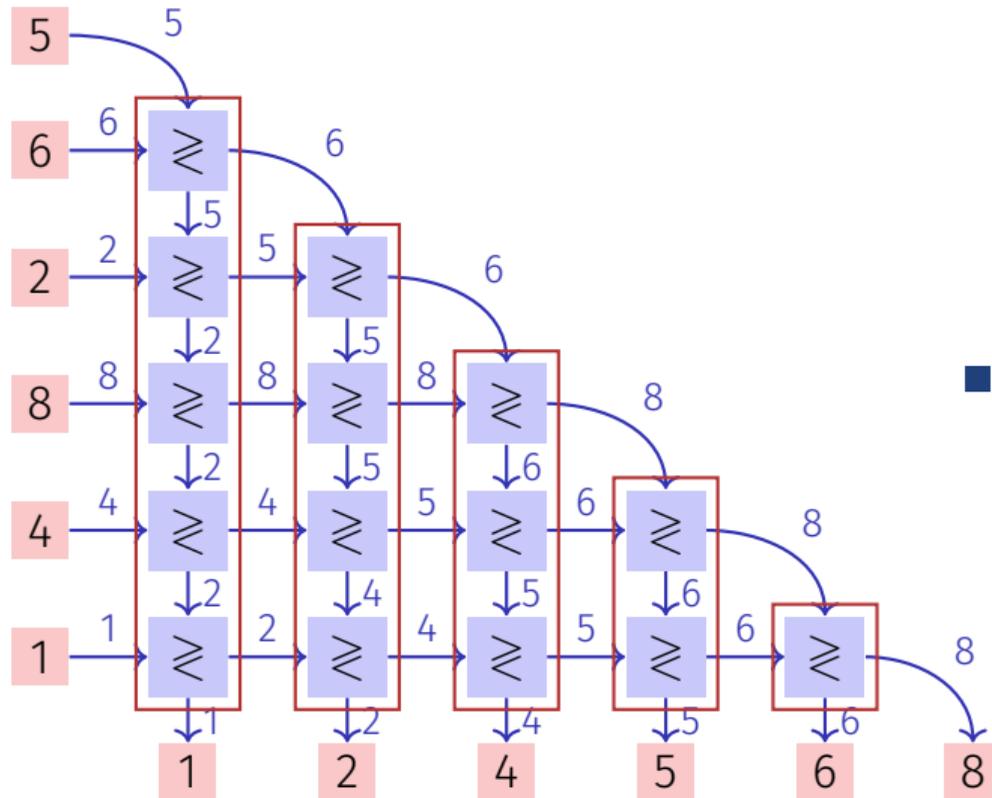
Anderer Blickwinkel



Anderer Blickwinkel

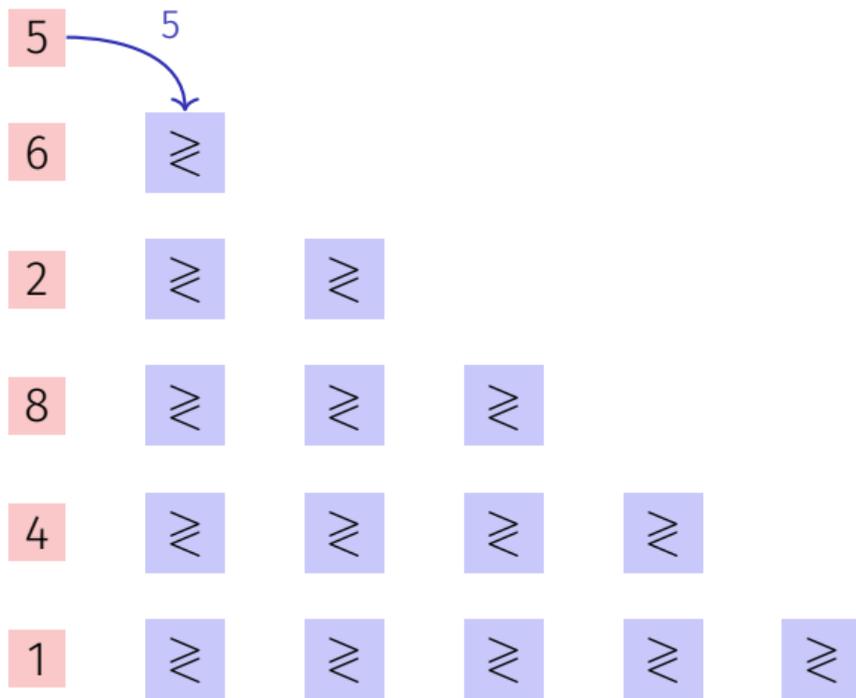


Anderer Blickwinkel

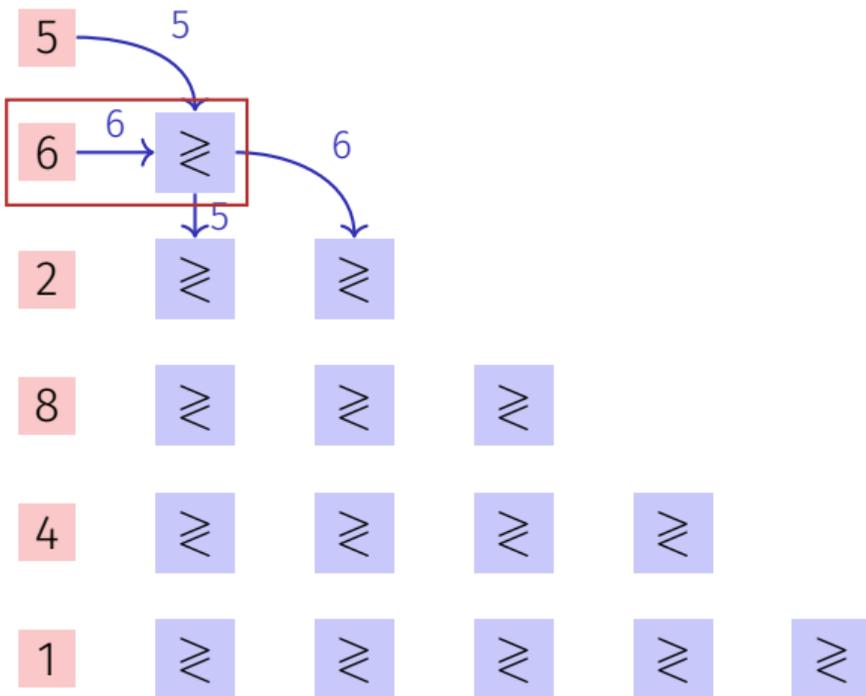


- Wie Selection Sort [und wie Bubble Sort]

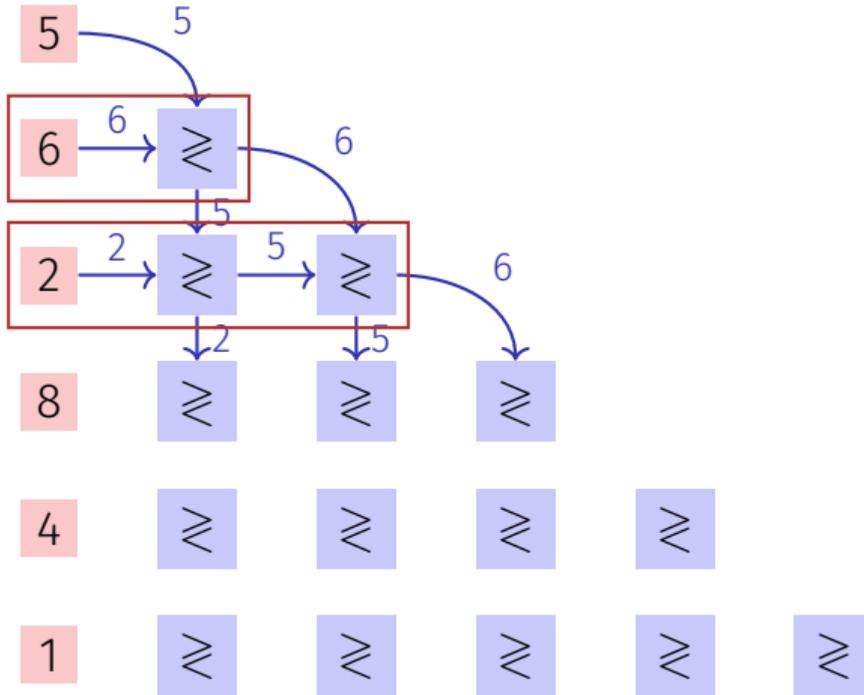
Anderer Blickwinkel



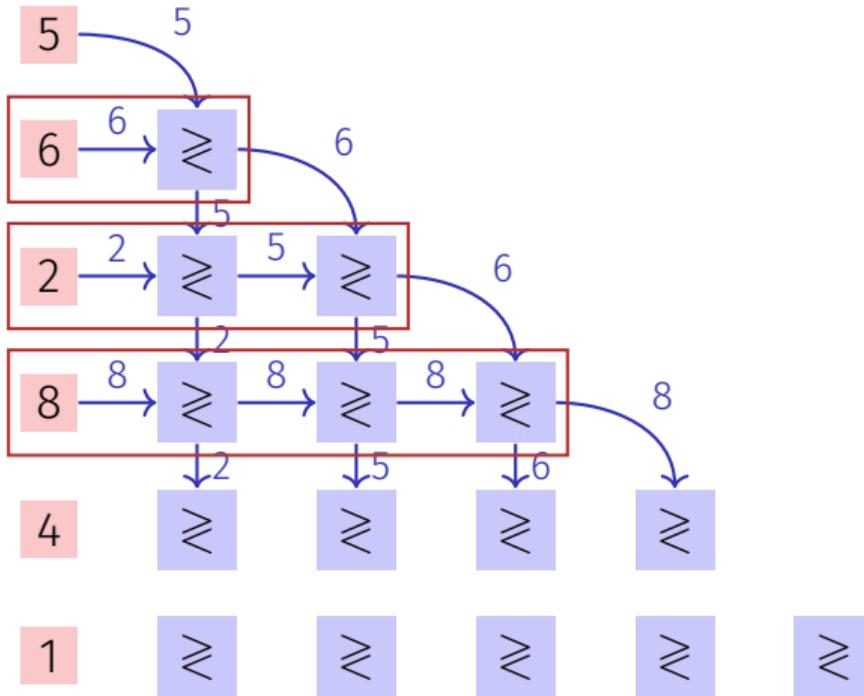
Anderer Blickwinkel



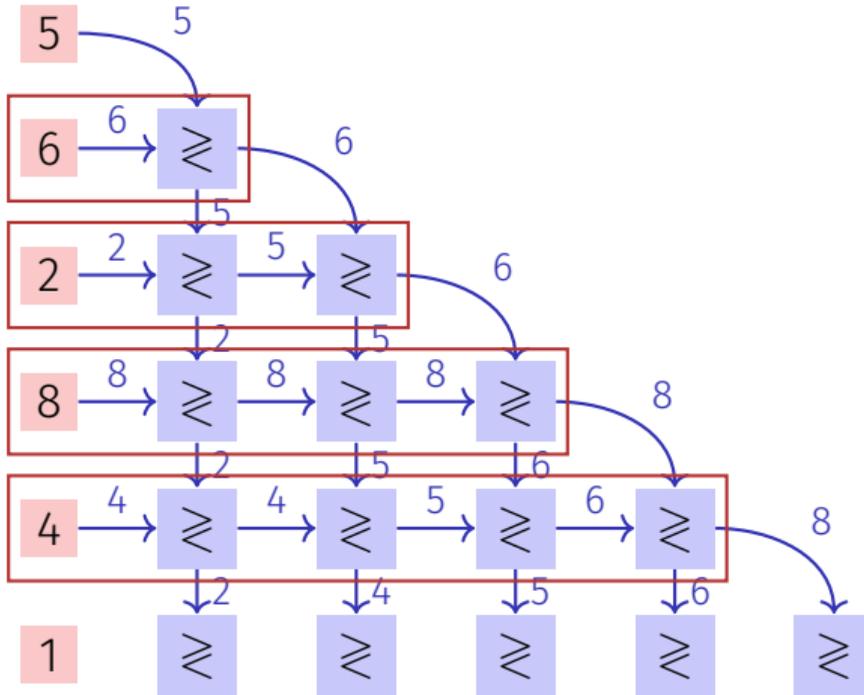
Anderer Blickwinkel



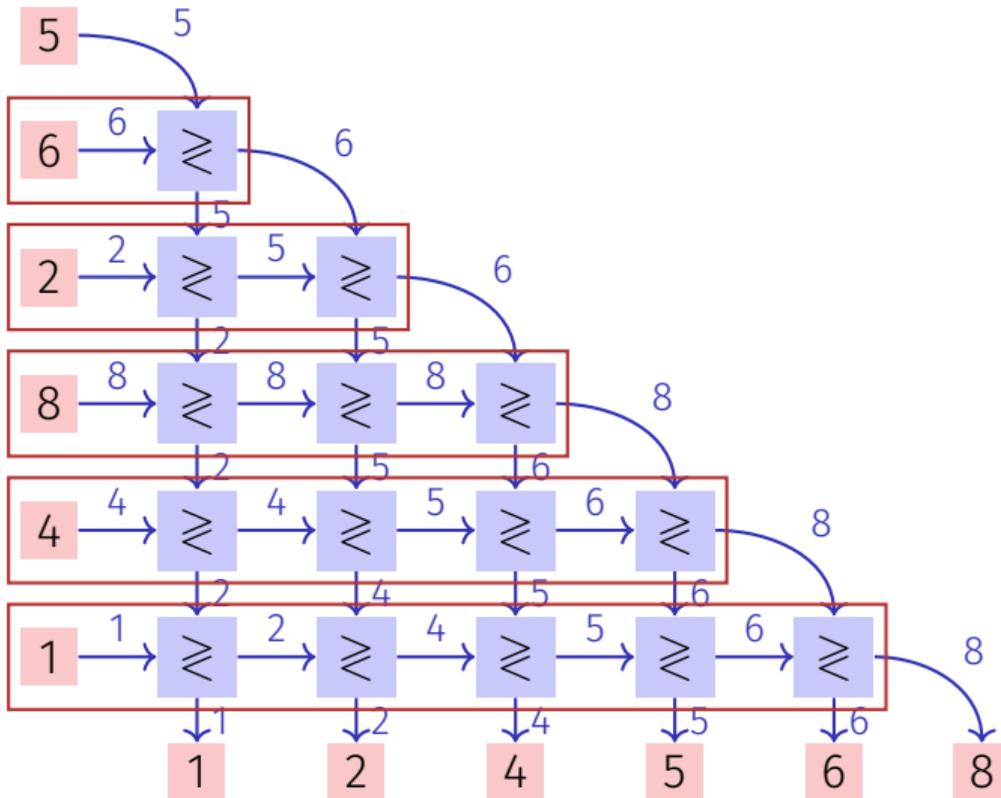
Anderer Blickwinkel



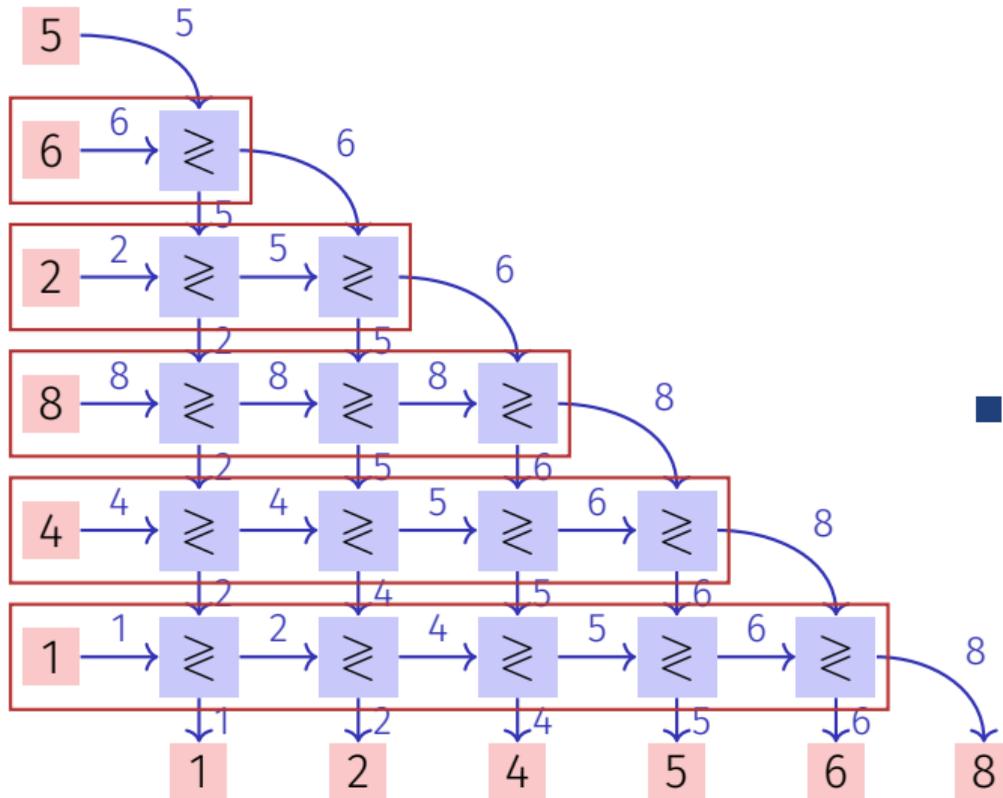
Anderer Blickwinkel



Anderer Blickwinkel



Anderer Blickwinkel



■ Wie Insertion Sort

Schlussfolgerung

Selection Sort, Bubble Sort und Insertion Sort sind in gewissem Sinne dieselben Sortieralgorithmen. Wird später präzisiert.⁹

⁹Im Teil über parallele Sortiernetzwerke. Für sequentiellen Code gelten natürlich weiterhin die zuvor gemachten Feststellungen.

Shellsort (Donald Shell 1959)

Intuition: Verschieben weit entfernter Elemente dauert lange bei obigen naiven Verfahren

Insertion Sort auf Teilfolgen der Form $(A_{k \cdot i})$ ($i \in \mathbb{N}$) mit absteigenden Abständen k . Letzte Länge ist zwingend $k = 1$.

Worst-case Performance hängt kritisch von den gewählten Teilfolgen ab.

Beispiele:

- Ursprünglich mit Folge $1, 2, 4, 8, \dots, 2^k$ konzipiert. Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2)$
- Folge $1, 3, 7, 15, \dots, 2^k - 1$ (Hibbard 1963). $\mathcal{O}(n^{3/2})$
- Folge $1, 2, 3, 4, 6, 8, \dots, 2^p 3^q$ (Pratt 1971). $\mathcal{O}(n \log^2 n)$

Shellsort

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Shellsort

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2 8 7 6 5 4 3 9 1 0 insertion sort, $k = 7$

Shellsort

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2 8 7 6 5 4 3 9 1 0 insertion sort, $k = 7$

2 1 7 6 5 4 3 9 8 0

Shellsort

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2 8 7 6 5 4 3 9 1 0 insertion sort, $k = 7$

2 1 7 6 5 4 3 9 8 0

2 1 0 6 5 4 3 9 8 7

Shellsort

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2 8 7 6 5 4 3 9 1 0 insertion sort, $k = 7$

2 1 7 6 5 4 3 9 8 0

2 1 0 6 5 4 3 9 8 7

2 1 0 3 5 4 6 9 8 7 insertion sort, $k = 3$

Shellsort

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2 8 7 6 5 4 3 9 1 0 insertion sort, $k = 7$

2 1 7 6 5 4 3 9 8 0

2 1 0 6 5 4 3 9 8 7

2 1 0 3 5 4 6 9 8 7 insertion sort, $k = 3$

2 1 0 3 5 4 6 9 8 7

Shellsort

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2 8 7 6 5 4 3 9 1 0 insertion sort, $k = 7$

2 1 7 6 5 4 3 9 8 0

2 1 0 6 5 4 3 9 8 7

2 1 0 3 5 4 6 9 8 7 insertion sort, $k = 3$

2 1 0 3 5 4 6 9 8 7

2 1 0 3 5 4 6 9 8 7

Shellsort

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2 8 7 6 5 4 3 9 1 0 insertion sort, $k = 7$

2 1 7 6 5 4 3 9 8 0

2 1 0 6 5 4 3 9 8 7

2 1 0 3 5 4 6 9 8 7 insertion sort, $k = 3$

2 1 0 3 5 4 6 9 8 7

2 1 0 3 5 4 6 9 8 7

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 insertion sort, $k = 1$

8. Sortieren II

Mergesort, Quicksort

8.1 Mergesort

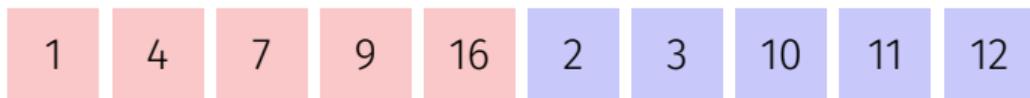
[Ottman/Widmayer, Kap. 2.4, Cormen et al, Kap. 2.3],

Mergesort (Sortieren durch Verschmelzen)

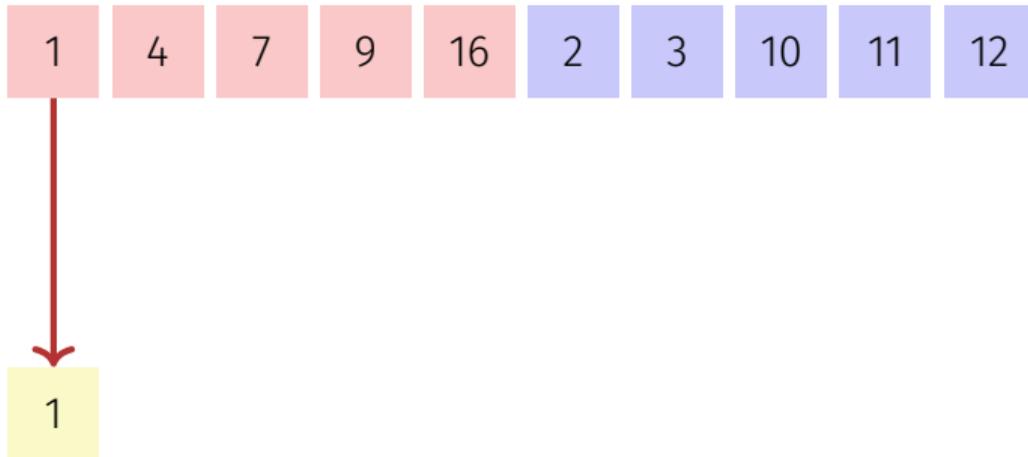
Divide and Conquer!

- Annahme: Zwei Hälften eines Arrays A bereits sortiert.
- Folgerung: Minimum von A kann mit 2 Vergleichen ermittelt werden.
- Iterativ: Füge die beiden vorsortierten Hälften von A zusammen in $\mathcal{O}(n)$.

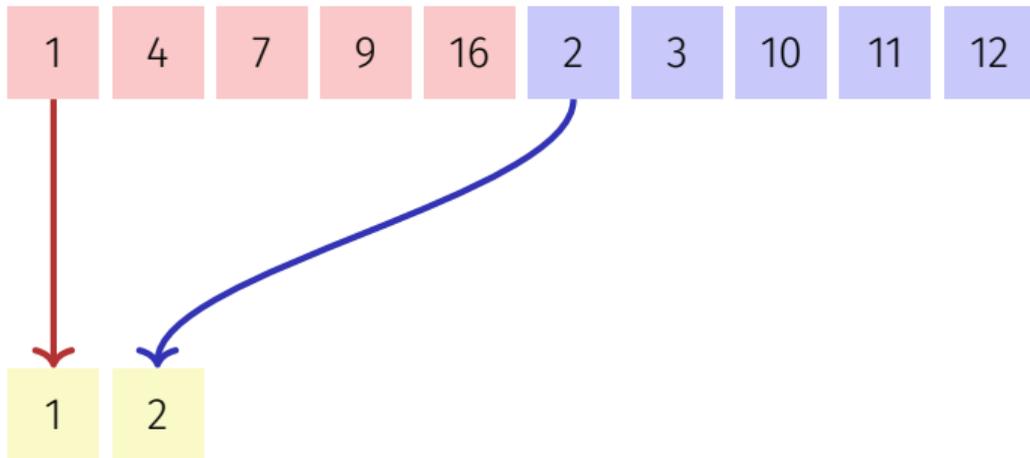
Merge



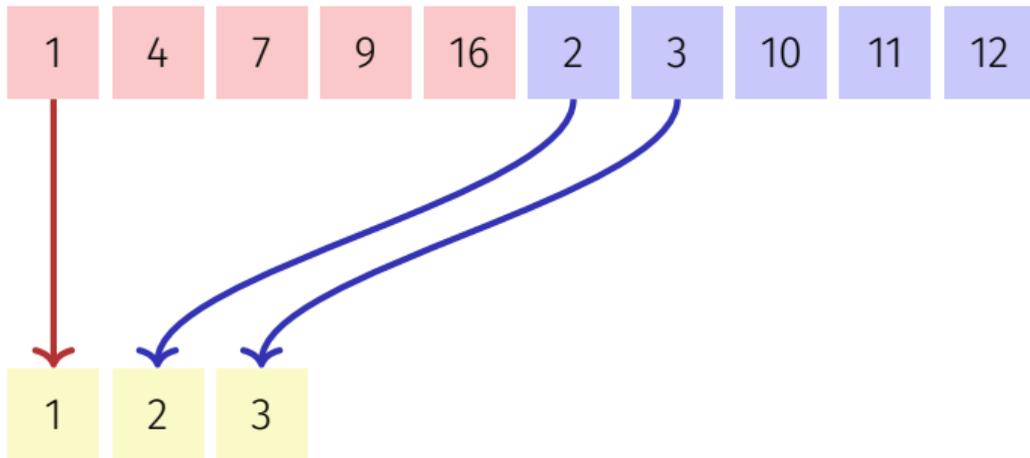
Merge



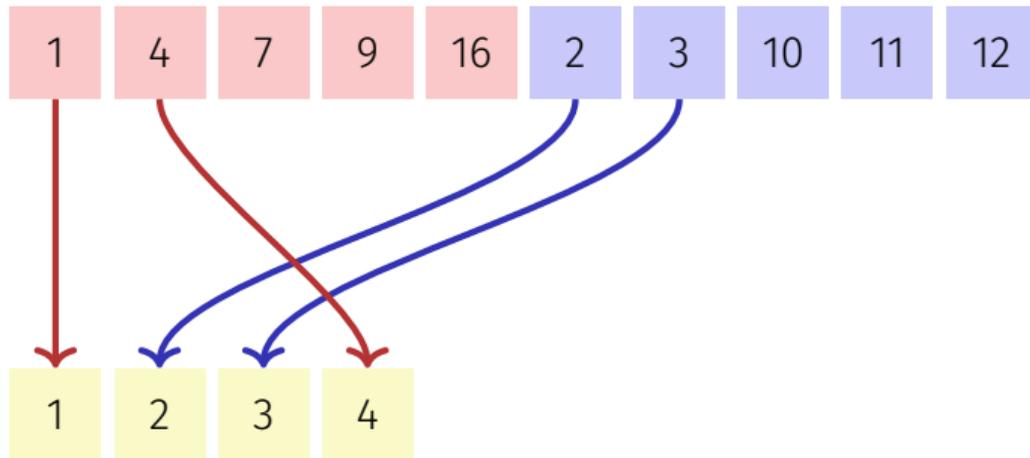
Merge



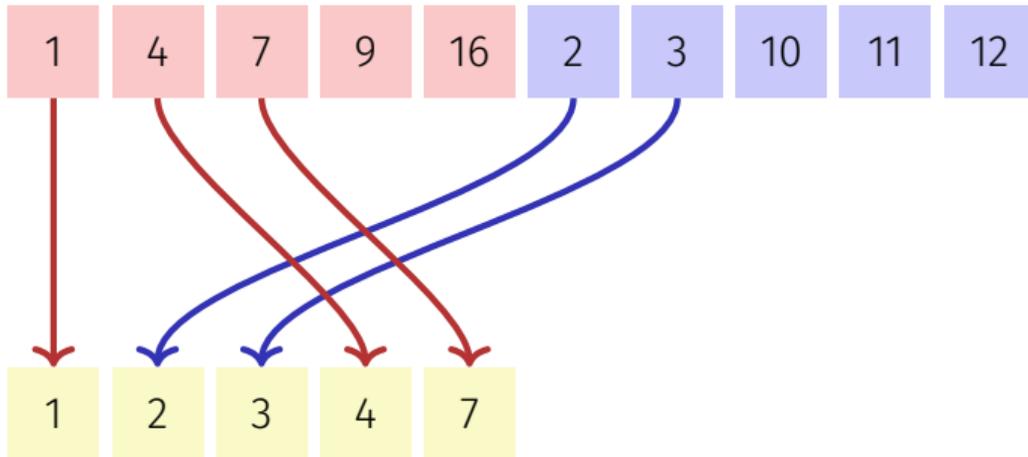
Merge



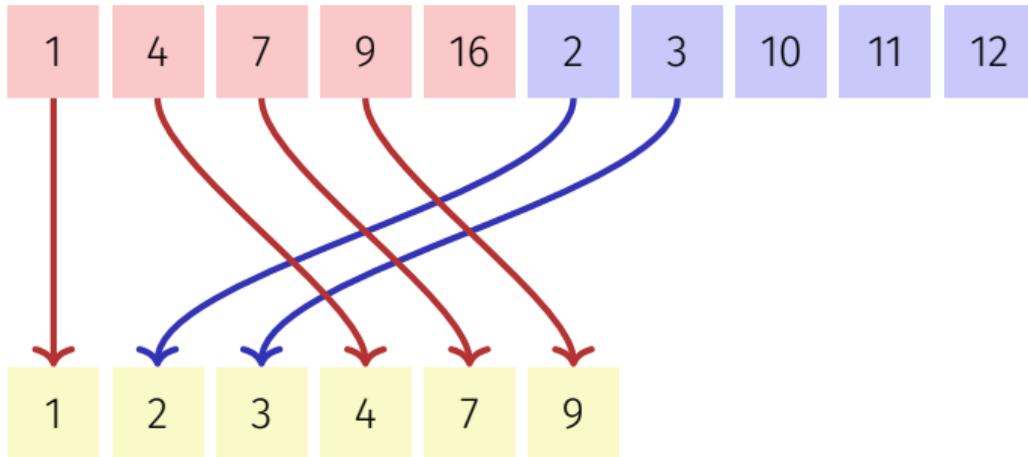
Merge



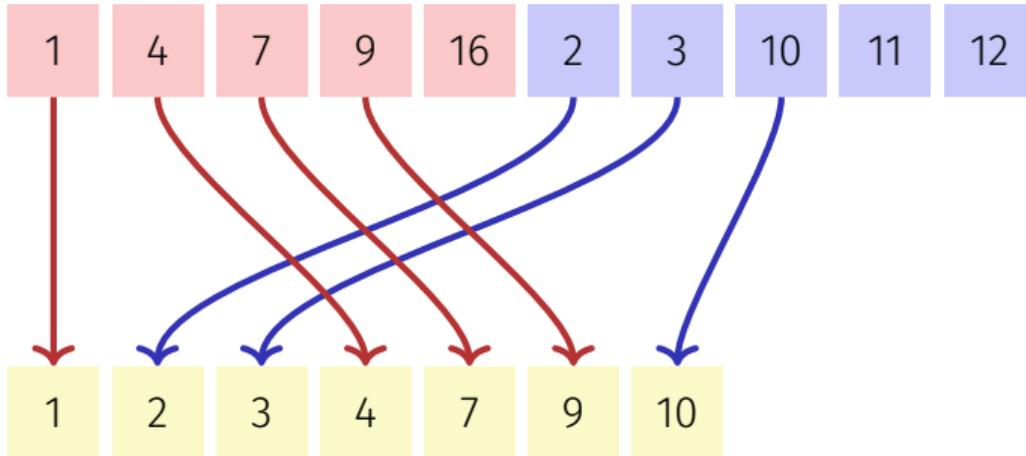
Merge



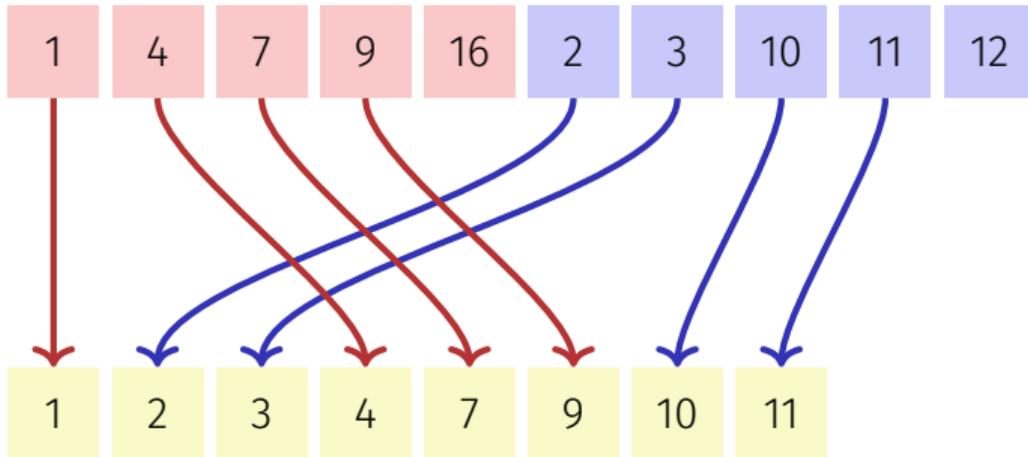
Merge



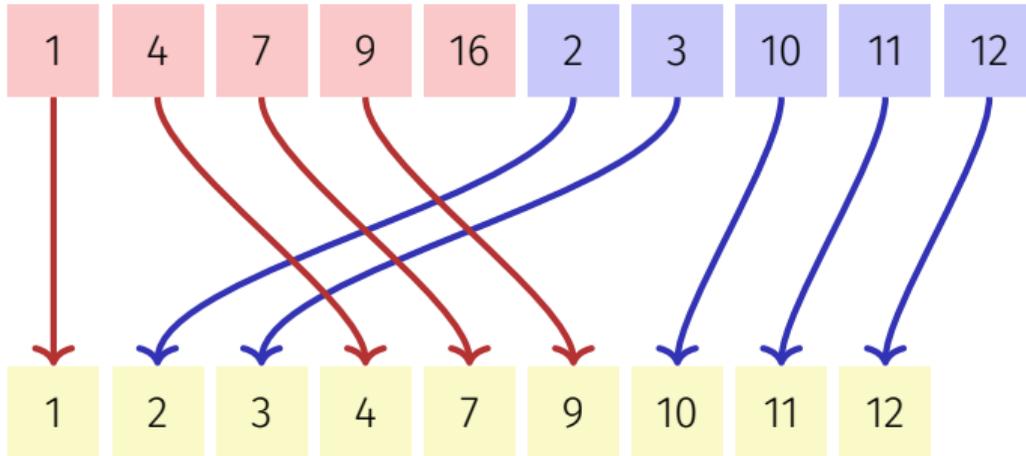
Merge



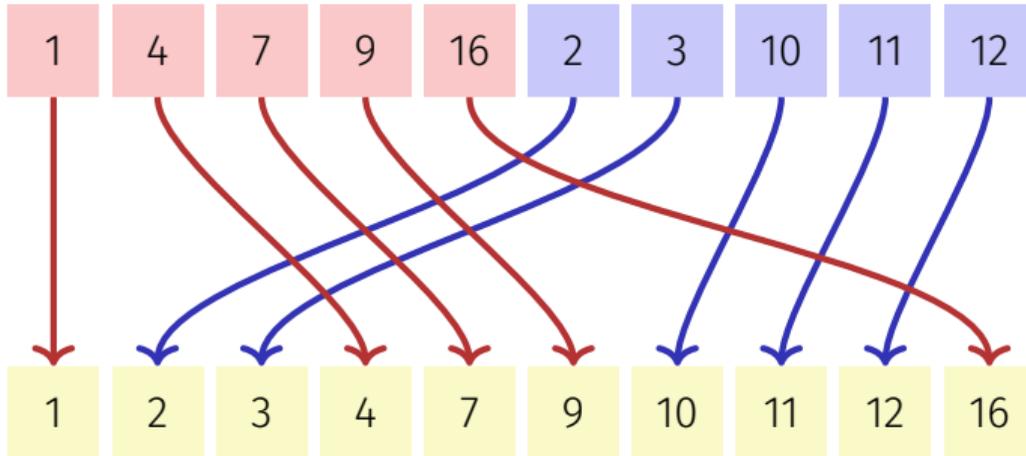
Merge



Merge



Merge



Algorithmus Merge(A, l, m, r)

Input: Array A der Länge n , Indizes $1 \leq l \leq m \leq r \leq n$.
 $A[l, \dots, m]$, $A[m + 1, \dots, r]$ sortiert

Output: $A[l, \dots, r]$ sortiert

```
1  $B \leftarrow$  new Array( $r - l + 1$ )
2  $i \leftarrow l$ ;  $j \leftarrow m + 1$ ;  $k \leftarrow 1$ 
3 while  $i \leq m$  and  $j \leq r$  do
4   if  $A[i] \leq A[j]$  then  $B[k] \leftarrow A[i]$ ;  $i \leftarrow i + 1$ 
5   else  $B[k] \leftarrow A[j]$ ;  $j \leftarrow j + 1$ 
6    $k \leftarrow k + 1$ ;
7 while  $i \leq m$  do  $B[k] \leftarrow A[i]$ ;  $i \leftarrow i + 1$ ;  $k \leftarrow k + 1$ 
8 while  $j \leq r$  do  $B[k] \leftarrow A[j]$ ;  $j \leftarrow j + 1$ ;  $k \leftarrow k + 1$ 
9 for  $k \leftarrow l$  to  $r$  do  $A[k] \leftarrow B[k - l + 1]$ 
```

Korrektheit

Hypothese: Nach k Durchläufen der Schleife von Zeile 3 ist $B[1, \dots, k]$ sortiert und $B[k] \leq A[i]$, falls $i \leq m$ und $B[k] \leq A[j]$ falls $j \leq r$.

Beweis per Induktion:

Induktionsanfang: Das leere Array $B[1, \dots, 0]$ ist trivialerweise sortiert.

Induktionsschluss ($k \rightarrow k + 1$):

- oBdA $A[i] \leq A[j]$, $i \leq m$, $j \leq r$.
- $B[1, \dots, k]$ ist nach Hypothese sortiert und $B[k] \leq A[i]$.
- Nach $B[k + 1] \leftarrow A[i]$ ist $B[1, \dots, k + 1]$ sortiert.
- $B[k + 1] = A[i] \leq A[i + 1]$ (falls $i + 1 \leq m$) und $B[k + 1] \leq A[j]$ falls $j \leq r$.
- $k \leftarrow k + 1$, $i \leftarrow i + 1$: Aussage gilt erneut.

Analyse (Merge)

Lemma 12

Wenn: Array A der Länge n , Indizes $1 \leq l < r \leq n$. $m = \lfloor (l + r)/2 \rfloor$ und $A[l, \dots, m]$, $A[m + 1, \dots, r]$ sortiert.

Dann: im Aufruf $\text{Merge}(A, l, m, r)$ werden $\Theta(r - l)$ viele Schlüsselbewegungen und Vergleiche durchgeführt.

Beweis: (Inspektion des Algorithmus und Zählen der Operationen).

Mergesort

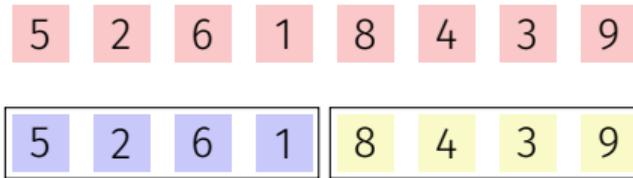
5 2 6 1 8 4 3 9

Mergesort

5 2 6 1 8 4 3 9

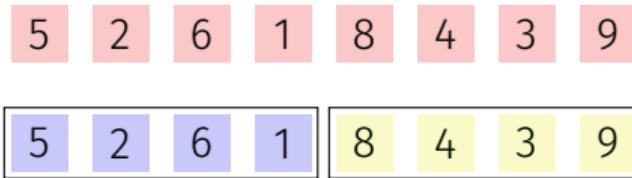
Split

Mergesort



Split

Mergesort



Split

Split

Mergesort

5 2 6 1 8 4 3 9

5 2 6 1 8 4 3 9

5 2 6 1 8 4 3 9

Split

Split

Mergesort

5 2 6 1 8 4 3 9

5 2 6 1 8 4 3 9

5 2 6 1 8 4 3 9

Split

Split

Split

Mergesort

5 2 6 1 8 4 3 9

5 2 6 1 8 4 3 9

5 2 6 1 8 4 3 9

5 2 6 1 8 4 3 9

Split

Split

Split

Mergesort

5 2 6 1 8 4 3 9

5 2 6 1 8 4 3 9

5 2 6 1 8 4 3 9

5 2 6 1 8 4 3 9

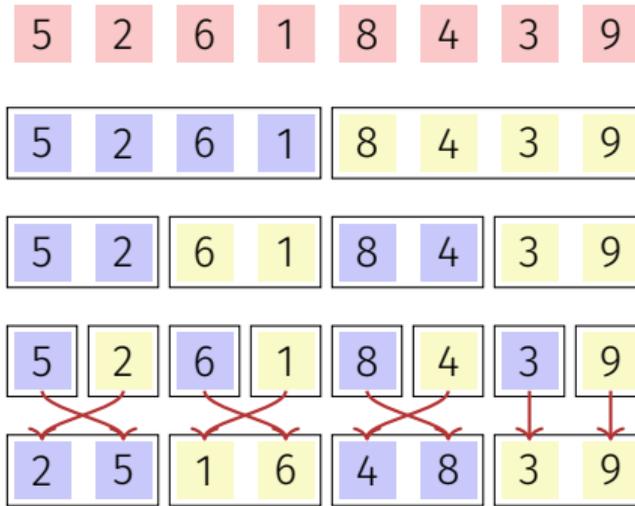
Split

Split

Split

Merge

Mergesort



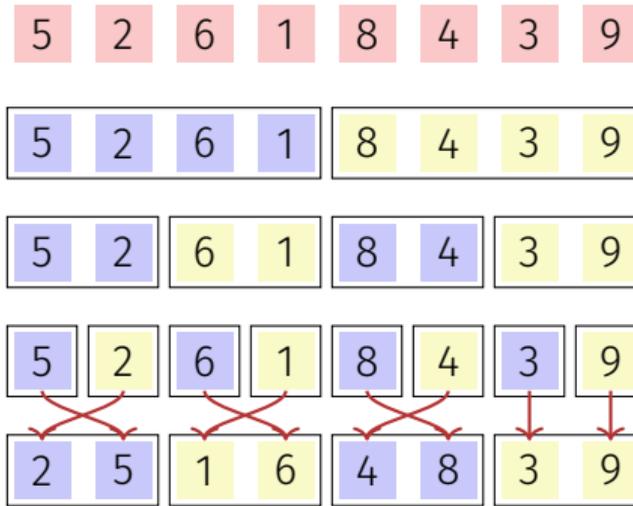
Split

Split

Split

Merge

Mergesort



Split

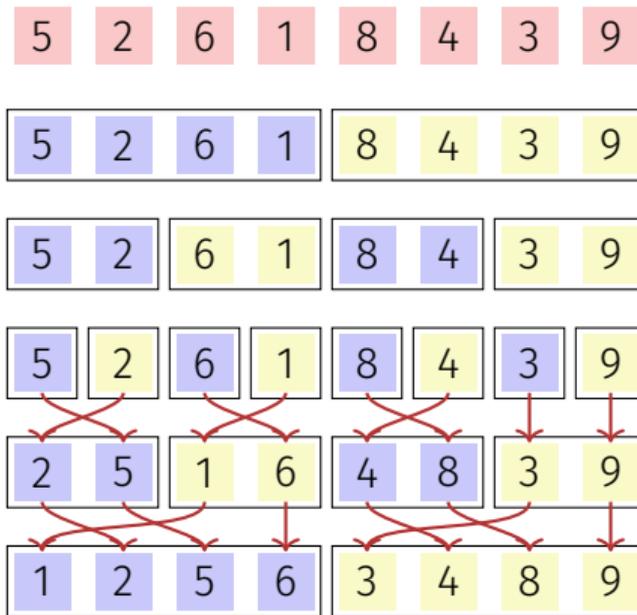
Split

Split

Merge

Merge

Mergesort



Split

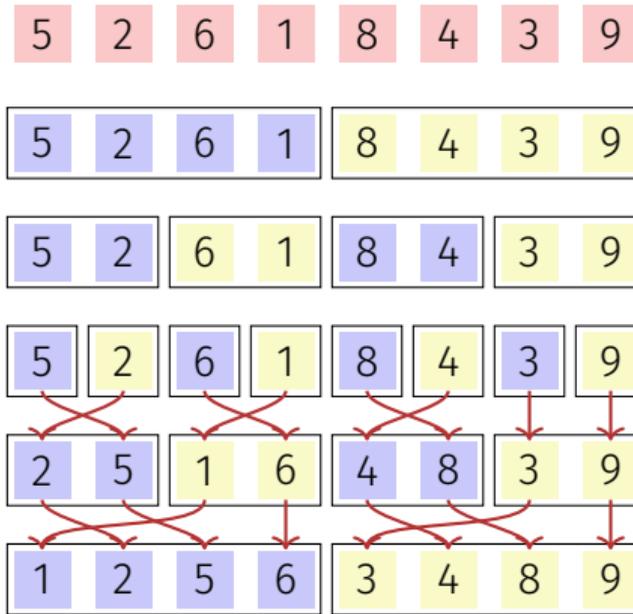
Split

Split

Merge

Merge

Mergesort



Split

Split

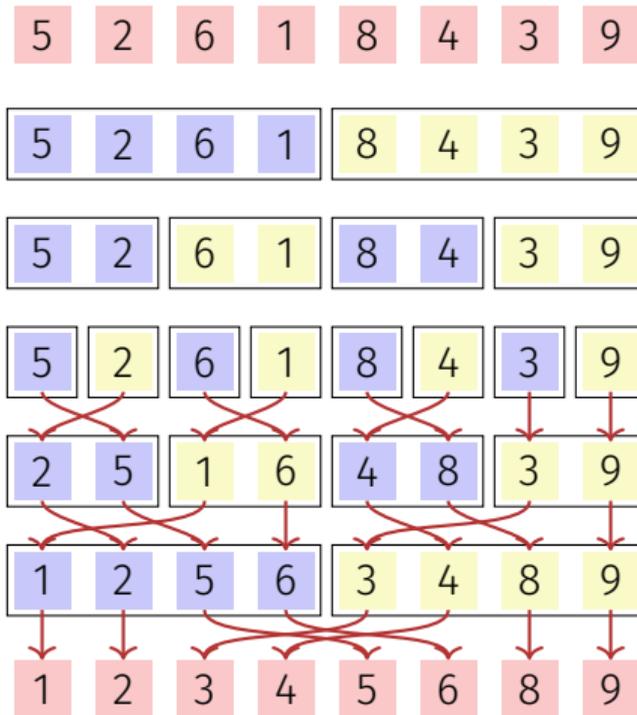
Split

Merge

Merge

Merge

Mergesort



Split

Split

Split

Merge

Merge

Merge

Algorithmus (Rekursives 2-Wege) Mergesort(A, l, r)

Input: Array A der Länge n . $1 \leq l \leq r \leq n$

Output: $A[l, \dots, r]$ sortiert.

if $l < r$ **then**

```
 $m \leftarrow \lfloor (l + r) / 2 \rfloor$  // Mittlere Position  
Mergesort( $A, l, m$ ) // Sortiere vordere Hälfte  
Mergesort( $A, m + 1, r$ ) // Sortiere hintere Hälfte  
Merge( $A, l, m, r$ ) // Verschmelzen der Teilfolgen
```

Rekursionsgleichung für die Anzahl Vergleiche und Schlüsselbewegungen:

$$T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \Theta(n)$$

Rekursionsgleichung für die Anzahl Vergleiche und Schlüsselbewegungen:

$$T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \Theta(n) \in \Theta(n \log n)$$

Algorithmus StraightMergesort(A)

Rekursion vermeiden: Verschmelze Folgen der Länge 1, 2, 4... direkt

Input: Array A der Länge n

Output: Array A sortiert

$length \leftarrow 1$

while $length < n$ **do** // Iteriere über die Längen n

$r \leftarrow 0$

while $r + length < n$ **do** // Iteriere über die Teilfolgen

$l \leftarrow r + 1$

$m \leftarrow l + length - 1$

$r \leftarrow \min(m + length, n)$

Merge(A, l, m, r)

$length \leftarrow length \cdot 2$

Wie rekursives Mergesort führt reines 2-Wege-Mergesort immer $\Theta(n \log n)$ viele Schlüsselvergleiche und -bewegungen aus.

Natürliches 2-Wege Mergesort

Beobachtung: Obige Varianten nutzen nicht aus, wenn vorsortiert ist und führen immer $\Theta(n \log n)$ viele Bewegungen aus.

Wie kann man teilweise vorsortierte Folgen besser sortieren?

Natürliches 2-Wege Mergesort

Beobachtung: Obige Varianten nutzen nicht aus, wenn vorsortiert ist und führen immer $\Theta(n \log n)$ viele Bewegungen aus.

Wie kann man teilweise vorsortierte Folgen besser sortieren?

❗ Rekursives Verschmelzen von bereits vorsortierten Teilen (*Runs*) von *A*.

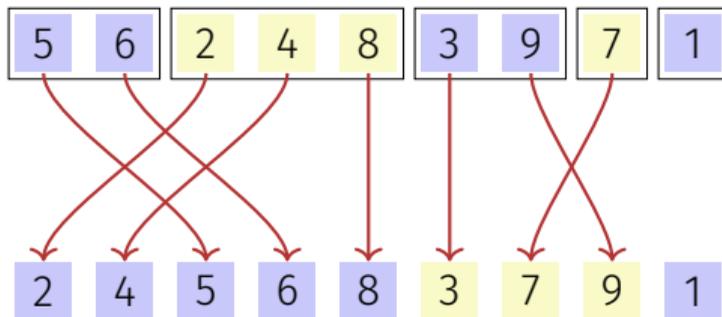
Natürliches 2-Wege Mergesort

5 6 2 4 8 3 9 7 1

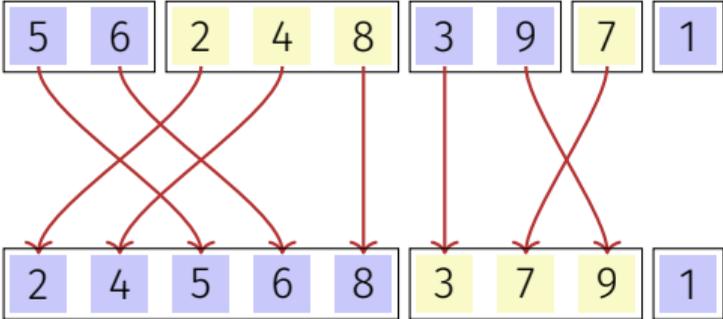
Natürliches 2-Wege Mergesort



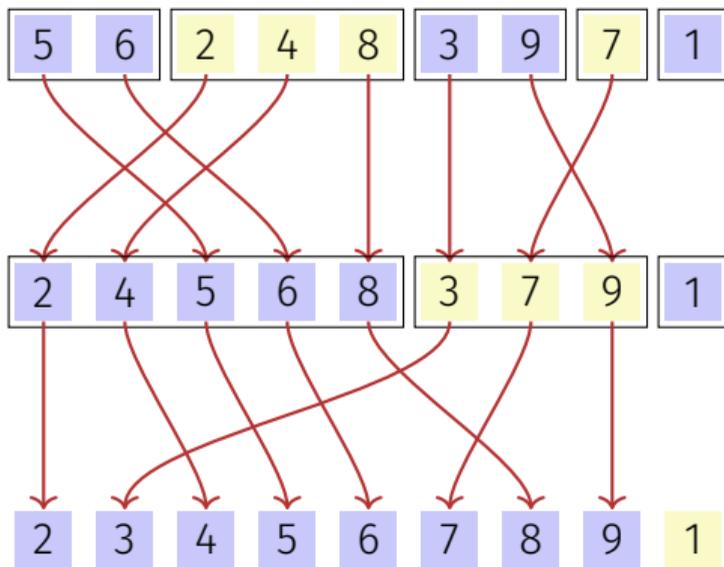
Natürliches 2-Wege Mergesort



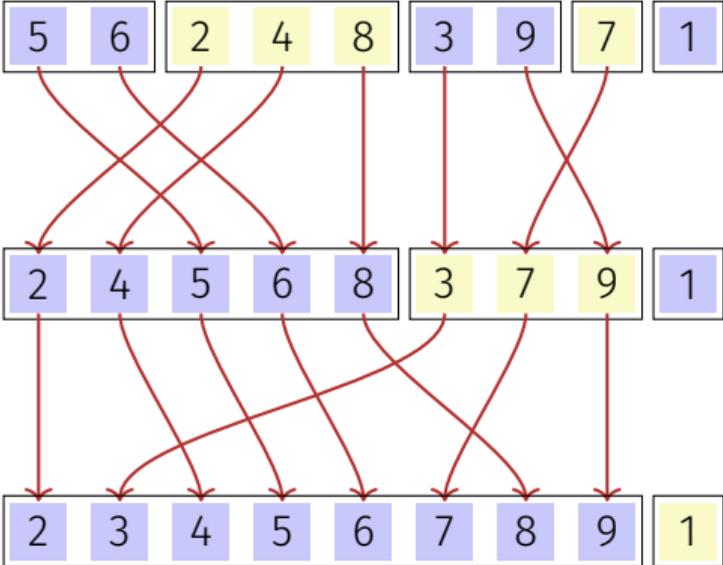
Natürliches 2-Wege Mergesort



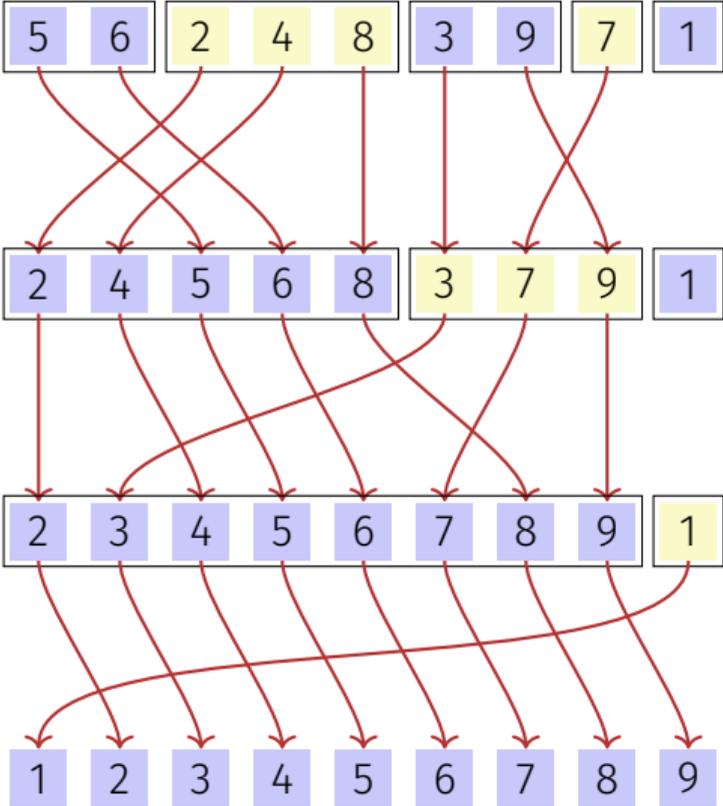
Natürliches 2-Wege Mergesort



Natürliches 2-Wege Mergesort



Natürliches 2-Wege Mergesort



Algorithmus NaturalMergesort(A)

Input: Array A der Länge $n > 0$

Output: Array A sortiert

repeat

$r \leftarrow 0$

while $r < n$ **do**

$l \leftarrow r + 1$

$m \leftarrow l$; **while** $m < n$ **and** $A[m + 1] \geq A[m]$ **do** $m \leftarrow m + 1$

if $m < n$ **then**

$r \leftarrow m + 1$; **while** $r < n$ **and** $A[r + 1] \geq A[r]$ **do** $r \leftarrow r + 1$

 Merge(A, l, m, r);

else

$r \leftarrow n$

until $l = 1$

Ist es auch im Mittel asymptotisch besser als StraightMergesort?

Ist es auch im Mittel asymptotisch besser als StraightMergesort?

⚠️ Nein. Unter Annahme der Gleichverteilung der paarweise unterschiedlichen Schlüssel haben wir im Mittel $n/2$ Stellen i mit $k_i > k_{i+1}$, also $n/2$ Runs und sparen uns lediglich einen Durchlauf, also n Vergleiche.

Natürliches Mergesort führt im schlechtesten und durchschnittlichen Fall $\Theta(n \log n)$ viele Vergleiche und Bewegungen aus.

8.2 Quicksort

[Ottman/Widmayer, Kap. 2.2, Cormen et al, Kap. 7]

Was ist der Nachteil von Mergesort?

Was ist der Nachteil von Mergesort?

Benötigt zusätzlich $\Theta(n)$ Speicherplatz für das Verschmelzen.

Quicksort

Was ist der Nachteil von Mergesort?

Benötigt zusätzlich $\Theta(n)$ Speicherplatz für das Verschmelzen.

Wie könnte man das Verschmelzen einsparen?

Quicksort

Was ist der Nachteil von Mergesort?

Benötigt zusätzlich $\Theta(n)$ Speicherplatz für das Verschmelzen.

Wie könnte man das Verschmelzen einsparen?

Sorge dafür, dass jedes Element im linken Teil kleiner ist als im rechten Teil.

Wie?

Quicksort

Was ist der Nachteil von Mergesort?

Benötigt zusätzlich $\Theta(n)$ Speicherplatz für das Verschmelzen.

Wie könnte man das Verschmelzen einsparen?

Sorge dafür, dass jedes Element im linken Teil kleiner ist als im rechten Teil.

Wie?

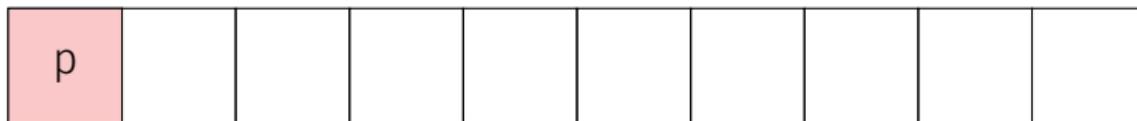
Pivotieren und Aufteilen!

Pivotieren



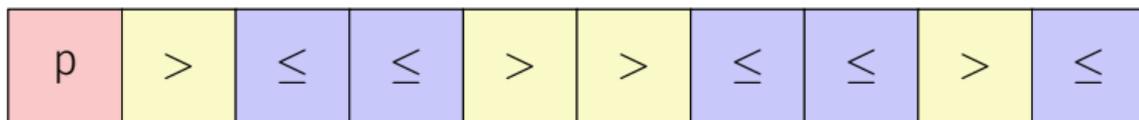
Pivotieren

1. Wähle ein (beliebiges) Element p als Pivotelement



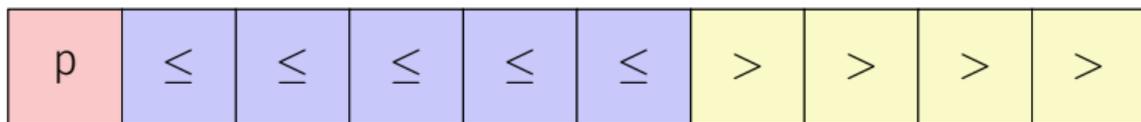
Pivotieren

1. Wähle ein (beliebiges) Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf: einen Teil L der Elemente mit $A[i] \leq p$ und einen Teil R der Elemente mit $A[i] > p$.



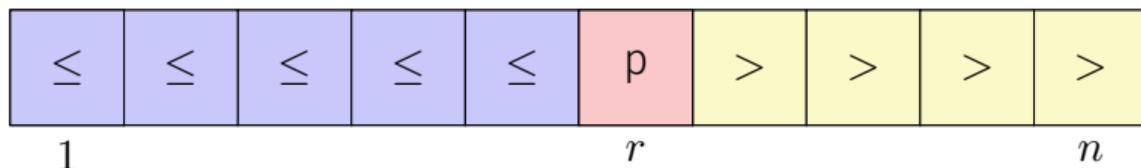
Pivotieren

1. Wähle ein (beliebiges) Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf: einen Teil L der Elemente mit $A[i] \leq p$ und einen Teil R der Elemente mit $A[i] > p$.
3. Quicksort: Rekursion auf Teilen L und R



Pivotieren

1. Wähle ein (beliebiges) Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf: einen Teil L der Elemente mit $A[i] \leq p$ und einen Teil R der Elemente mit $A[i] > p$.
3. Quicksort: Rekursion auf Teilen L und R



Algorithmus Partition(A, l, r, p)

Input: Array A , welches den Pivot p in $A[l, \dots, r]$ mindestens einmal enthält.

Output: Array A partitioniert in $A[l, \dots, r]$ um p . Rückgabe der Position von p .

while $l \leq r$ **do**

while $A[l] < p$ **do**

$l \leftarrow l + 1$

while $A[r] > p$ **do**

$r \leftarrow r - 1$

 swap($A[l], A[r]$)

if $A[l] = A[r]$ **then**

$l \leftarrow l + 1$

return $l-1$

Algorithmus Quicksort(A, l, r)

Input: Array A der Länge n . $1 \leq l \leq r \leq n$.

Output: Array A , sortiert in $A[l, \dots, r]$.

if $l < r$ **then**

 Wähle Pivot $p \in A[l, \dots, r]$

$k \leftarrow \text{Partition}(A, l, r, p)$

 Quicksort($A, l, k - 1$)

 Quicksort($A, k + 1, r$)

Quicksort (willkürlicher Pivot)

2 4 5 6 8 3 7 9 1

Quicksort (willkürlicher Pivot)

2 4 5 6 8 3 7 9 1



Quicksort (willkürlicher Pivot)

2 4 5 6 8 3 7 9 1

2 1 3 6 8 5 7 9 4

Quicksort (willkürlicher Pivot)

2 4 5 6 8 3 7 9 1

2 1 3 6 8 5 7 9 4

Quicksort (willkürlicher Pivot)

2 4 5 6 8 3 7 9 1

2 1 3 6 8 5 7 9 4

1 2 3 4 5 8 7 9 6

Quicksort (willkürlicher Pivot)

2 4 5 6 8 3 7 9 1

2 1 3 6 8 5 7 9 4

1 2 3 4 5 8 7 9 6

Quicksort (willkürlicher Pivot)

2 4 5 6 8 3 7 9 1

2 1 3 6 8 5 7 9 4

1 2 3 4 5 8 7 9 6

1 2 3 4 5 6 7 9 8

Quicksort (willkürlicher Pivot)

2 4 5 6 8 3 7 9 1

2 1 3 6 8 5 7 9 4

1 2 3 4 5 8 7 9 6

1 2 3 4 5 6 7 9 8

Quicksort (willkürlicher Pivot)

2 4 5 6 8 3 7 9 1

2 1 3 6 8 5 7 9 4

1 2 3 4 5 8 7 9 6

1 2 3 4 5 6 7 9 8

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Quicksort (willkürlicher Pivot)

2 4 5 6 8 3 7 9 1

2 1 3 6 8 5 7 9 4

1 2 3 4 5 8 7 9 6

1 2 3 4 5 6 7 9 8

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Analyse: Anzahl Vergleiche

Schlechtester Fall.

Analyse: Anzahl Vergleiche

Schlechtester Fall. Pivotelement = Minimum oder Maximum; Anzahl Vergleiche:

$$T(n) = T(n - 1) + c \cdot n, T(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(n) \in \Theta(n^2)$$

Analyse: Anzahl Vertauschungen

Resultat eines Aufrufes an Partition (Pivot 3):

2 1 3 6 8 5 7 9 4

⓪ Wie viele Vertauschungen haben hier maximal stattgefunden?

Analyse: Anzahl Vertauschungen

Resultat eines Aufrufes an Partition (Pivot 3):

2 1 3 6 8 5 7 9 4

- ❓ Wie viele Vertauschungen haben hier maximal stattgefunden?
- ❗ 2. Die maximale Anzahl an Vertauschungen ist gegeben durch die Anzahl Schlüssel im kleineren Bereich.

Analyse: Anzahl Vertauschungen

Gedankenspiel

Analyse: Anzahl Vertauschungen

Gedankenspiel

- Jeder Schlüssel aus dem kleineren Bereich zahlt bei einer Vertauschung eine Münze.

Analyse: Anzahl Vertauschungen

Gedankenspiel

- Jeder Schlüssel aus dem kleineren Bereich zahlt bei einer Vertauschung eine Münze.
- Wenn ein Schlüssel eine Münze gezahlt hat, ist der Bereich, in dem er sich befindet maximal halb so gross wie zuvor.

Analyse: Anzahl Vertauschungen

Gedankenspiel

- Jeder Schlüssel aus dem kleineren Bereich zahlt bei einer Vertauschung eine Münze.
- Wenn ein Schlüssel eine Münze gezahlt hat, ist der Bereich, in dem er sich befindet maximal halb so gross wie zuvor.
- Jeder Schlüssel muss also maximal $\log n$ Münzen zahlen. Es gibt aber nur n Schlüssel.

Analyse: Anzahl Vertauschungen

Gedankenspiel

- Jeder Schlüssel aus dem kleineren Bereich zahlt bei einer Vertauschung eine Münze.
- Wenn ein Schlüssel eine Münze gezahlt hat, ist der Bereich, in dem er sich befindet maximal halb so gross wie zuvor.
- Jeder Schlüssel muss also maximal $\log n$ Münzen zahlen. Es gibt aber nur n Schlüssel.

Folgerung: Es ergeben sich $\mathcal{O}(n \log n)$ viele Schlüsselvertauschungen im schlechtesten Fall!

Randomisiertes Quicksort

Quicksort wird trotz $\Theta(n^2)$ Laufzeit im schlechtesten Fall oft eingesetzt.
Grund: Quadratische Laufzeit unwahrscheinlich, sofern die Wahl des Pivots und die Vorsortierung nicht eine ungünstige Konstellation aufweisen.
Vermeidung: Zufälliges Ziehen eines Pivots. Mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus $[l, r]$.

Analyse (Randomisiertes Quicksort)

Erwartete Anzahl verglichener Schlüssel bei Eingabe der Länge n :

$$T(n) = (n - 1) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (T(k - 1) + T(n - k)), \quad T(0) = T(1) = 0$$

Behauptung $T(n) \leq 4n \log n$.

Beweis per Induktion:

Induktionsanfang: klar für $n = 0$ (mit $0 \log 0 := 0$) und für $n = 1$.

Hypothese: $T(n) \leq 4n \log n$ für ein n .

Induktionsschritt: $(n - 1 \rightarrow n)$

Analyse (Randomisiertes Quicksort)

$$\begin{aligned}T(n) &= n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T(k) \stackrel{H}{\leq} n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 4k \log k \\&= n - 1 + \sum_{k=1}^{n/2} 4k \underbrace{\log k}_{\leq \log n - 1} + \sum_{k=n/2+1}^{n-1} 4k \underbrace{\log k}_{\leq \log n} \\&\leq n - 1 + \frac{8}{n} \left((\log n - 1) \sum_{k=1}^{n/2} k + \log n \sum_{k=n/2+1}^{n-1} k \right) \\&= n - 1 + \frac{8}{n} \left((\log n) \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{4} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \right) \\&= 4n \log n - 4 \log n - 3 \leq 4n \log n\end{aligned}$$

Analyse (Randomisiertes Quicksort)

Theorem 13

Im Mittel benötigt randomisiertes Quicksort $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ Vergleiche.

Praktische Anmerkungen

Rekursionstiefe im schlechtesten Fall: $n - 1^{10}$. Dann auch Speicherplatzbedarf $\mathcal{O}(n)$.

Kann vermieden werden: Rekursion nur auf dem kleineren Teil. Dann garantiert $\mathcal{O}(\log n)$ Rekursionstiefe und Speicherplatzbedarf.

¹⁰Stack-Overflow möglich!

Quicksort mit logarithmischem Speicherplatz

Input: Array A der Länge n . $1 \leq l \leq r \leq n$.

Output: Array A , sortiert zwischen l und r .

while $l < r$ **do**

 Wähle Pivot $p \in A[l, \dots, r]$

$k \leftarrow \text{Partition}(A, l, r, p)$

if $k - l < r - k$ **then**

 Quicksort($A[l, \dots, k - 1]$)

$l \leftarrow k + 1$

else

 Quicksort($A[k + 1, \dots, r]$)

$r \leftarrow k - 1$

Der im ursprünglichen Algorithmus verbleibende Aufruf an Quicksort($A[l, \dots, r]$) geschieht iterativ (Tail Recursion ausgenutzt!): die If-Anweisung wurde zur While Anweisung.

Praktische Anmerkungen

- Für den Pivot wird in der Praxis oft der Median von drei Elementen genommen. Beispiel: $\text{Median3}(A[l], A[r], A[\lfloor l + r/2 \rfloor])$.
- Es existiert eine Variante von Quicksort mit konstanten Speicherplatzbedarf. Idee: Zwischenspeichern des alten Pivots am Ort des neuen Pivots.
- Komplizierte Divide-And-Conquer-Algorithmen verwenden oft als Basisfall einen trivialen ($\Theta(n^2)$) Algorithmus für kleine Problemgrößen.

8.3 Anhang

Herleitung einiger mathematischen Formeln

$$\log n! \in \Theta(n \log n)$$

$$\begin{aligned} \log n! &= \sum_{i=1}^n \log i \leq \sum_{i=1}^n \log n = n \log n \\ \sum_{i=1}^n \log i &= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \log i + \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \log i \\ &\geq \sum_{i=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} \log 2 + \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \log \frac{n}{2} \\ &= \underbrace{(\lfloor n/2 \rfloor - 2 + 1)}_{>n/2-1} + \underbrace{(n - \lfloor n/2 \rfloor)}_{\geq n/2} (\log n - 1) \\ &> \frac{n}{2} \log n - 2. \end{aligned}$$

$$[n! \in o(n^n)]$$

$$\begin{aligned}n \log n &\geq \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \log 2i + \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor+1}^n \log i \\&= \sum_{i=1}^n \log i + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log 2 \\&> \sum_{i=1}^n \log i + n/2 - 1 = \log n! + n/2 - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n^n &= 2^{n \log_2 n} \geq 2^{\log_2 n!} \cdot 2^{n/2} \cdot 2^{-1} = n! \cdot 2^{n/2-1} \\ \Rightarrow \frac{n!}{n^n} &\leq 2^{-n/2+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow n! \in o(n^n) = \mathcal{O}(n^n) \setminus \Omega(n^n)\end{aligned}$$

[Sogar $n! \in o((n/c)^n) \forall 0 < c < e$]

Konvergenz oder Divergenz von $f_n = \frac{n!}{(n/c)^n}$.

Quotientenkriterium

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{(n+1)!}{\left(\frac{n+1}{c}\right)^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{n}{c}\right)^n}{n!} = c \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow c \cdot \frac{1}{e} \leq 1 \text{ wenn } c \leq e$$

denn $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$. Sogar die Reihe $\sum_{i=1}^n f_n$ konvergiert / divergiert für $c \leq e$.

f_n divergiert für $c = e$, denn (Stirling): $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

[Quotientenkriterium]

Quotientenkriterium für eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Wenn $\frac{f_{n+1}}{f_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$, dann sind die Folge f_n und auch die Reihe $\sum_{i=1}^n f_i$

- konvergent, falls $\lambda < 1$ und
- divergent, falls $\lambda > 1$.

[Quotientenkriterium Herleitung]

Quotientenkriterium ergibt sich aus: Geometrische Reihe

$$S_n(r) := \sum_{i=0}^n r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

konvergiert für $n \rightarrow \infty$ genau dann wenn $-1 < r < 1$.

Sei nämlich $0 \leq \lambda < 1$:

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : f_{n+1}/f_n < \lambda + \varepsilon \forall n \geq n_0 \\ \Rightarrow & \exists \mu > 0, \exists n_0 : f_{n+1}/f_n \leq \mu < 1 \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

Somit

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n \leq f_{n_0} \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty} \mu^{n-n_0} \quad \text{konvergiert.}$$

(Analog für Divergenz)