4. Suchen

Lineare Suche, Binäre Suche, (Interpolationssuche,) Untere Schranken
[Ottman/Widmayer, Kap. 3.2, Cormen et al, Kap. 2: Problems 2.1-3,2.2-3,2.3-5]

Das Suchproblem

Gegeben

- Menge von Datensätzen.

  Telefonverzeichnis, Wörterbuch, Symboltabelle

- Jeder Datensatz hat einen Schlüssel k.
- Schlüssel sind vergleichbar: eindeutige Antwort auf Frage $k_1 \leq k_2$ für Schlüssel k_1, k_2.

Aufgabe: finde Datensatz nach Schlüssel k.

Suche in Array

Gegeben

- Array A mit n Elementen $(A[1], \ldots, A[n])$.
- Schlüssel b

Gesucht: Index k, $1 \leq k \leq n$ mit $A[k] = b$ oder "nicht gefunden".

22	20	32	10	35	24	42	38	28	41
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

- **Bestenfalls** 1 Vergleich.

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

- **Bestenfalls** 1 Vergleich.
- **Schlimmstenfalls** n Vergleiche.

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

- **Bestenfalls** 1 Vergleich.
- **Schlimmstenfalls** n Vergleiche.
- Annahme: Jede Anordnung der n Schlüssel ist gleichwahrscheinlich.
  Erwartete Anzahl Vergleiche für die erfolgreiche Suche:

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

- **Bestenfalls** 1 Vergleich.
- **Schlimmstenfalls** n Vergleiche.
- Annahme: Jede Anordnung der n Schlüssel ist gleichwahrscheinlich.
  Erwartete Anzahl Vergleiche für die erfolgreiche Suche:

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

- **Bestenfalls** 1 Vergleich.
- **Schlimmstenfalls** n Vergleiche.
- Annahme: Jede Anordnung der n Schlüssel ist gleichwahrscheinlich. **Erwartete** Anzahl Vergleiche für die erfolgreiche Suche:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}.$$

Suche im sortierten Array

Gegeben

- Sortiertes Array A mit n Elementen $(A[1], \dots, A[n])$ mit $A[1] \le A[2] \le \cdots \le A[n]$.
- Schlüssel b

Gesucht: Index k, $1 \le k \le n$ mit $A[k] = b$ oder "nicht gefunden".

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b < 28$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b < 28$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b > 20$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b < 28$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b > 20$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b > 22$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b < 28$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b > 20$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b > 22$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b < 24$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b < 28$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b > 20$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b > 22$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b < 24$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	erfolglos
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Binärer Suchalgorithmus BSearch(A, l, r, b)

Input: Sortiertes Array A von n Schlüsseln. Schlüssel b. Bereichsgrenzen $1 \leq l, r \leq n$ mit $l \leq r$ oder $l = r + 1$.

Output: Index $m \in [l, \ldots, r+1]$, so dass $A[i] \leq b$ für alle $l \leq i < m$ und $A[i] \geq b$ für alle $m < i \leq r$.

$m \leftarrow \lfloor (l+r)/2 \rfloor$
if $l > r$ **then** // erfolglose Suche
  return l
else if $b = A[m]$ **then**// gefunden
  return m
else if $b < A[m]$ **then**// Element liegt links
  return BSearch$(A, l, m-1, b)$
else // $b > A[m]$: Element liegt rechts
  return BSearch$(A, m+1, r, b)$

Analyse (schlechtester Fall)

Rekurrenz ($n = 2^k$)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Teleskopieren:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + c$$

Analyse (schlechtester Fall)

Rekurrenz ($n = 2^k$)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Teleskopieren:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + c = T\left(\frac{n}{4}\right) + 2c$$

Analyse (schlechtester Fall)

Rekurrenz ($n = 2^k$)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Teleskopieren:

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + c = T\left(\frac{n}{4}\right) + 2c = \ldots \\ &= T\left(\frac{n}{2^i}\right) + i \cdot c \end{aligned}$$

Analyse (schlechtester Fall)

Rekurrenz ($n = 2^k$)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Teleskopieren:

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + c = T\left(\frac{n}{4}\right) + 2c = \ldots \\ &= T\left(\frac{n}{2^i}\right) + i \cdot c \\ &= T\left(\frac{n}{n}\right) + \log_2 n \cdot c = d + c \cdot \log_2 n \in \Theta(\log n) \end{aligned}$$

Analyse (schlechtester Fall)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Vermutung : $T(n) = d + c \cdot \log_2 n$

Beweis durch Induktion:

Analyse (schlechtester Fall)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Vermutung : $T(n) = d + c \cdot \log_2 n$

Beweis durch Induktion:

- Induktionsanfang: $T(1) = d$.

Analyse (schlechtester Fall)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Vermutung : $T(n) = d + c \cdot \log_2 n$

Beweis durch Induktion:

- Induktionsanfang: $T(1) = d$.
- Hypothese: $T(n/2) = d + c \cdot \log_2 n/2$

Analyse (schlechtester Fall)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Vermutung : $T(n) = d + c \cdot \log_2 n$

Beweis durch Induktion:

- Induktionsanfang: $T(1) = d$.
- Hypothese: $T(n/2) = d + c \cdot \log_2 n/2$
- Schritt $(n/2 \to n)$

$$T(n) = T(n/2) + c = d + c \cdot (\log_2 n - 1) + c = d + c \log_2 n.$$

Resultat

Theorem 8

Der Algorithmus zur binären sortierten Suche benötigt $\Theta(\log n)$ Elementarschritte.

Iterativer binärer Suchalgorithmus

Input: Sortiertes Array A von n Schlüsseln. Schlüssel b.
Output: Index des gefundenen Elements. 0, wenn erfolglos.

```
l ← 1; r ← n
while l ≤ r do
    m ← ⌊(l + r)/2⌋
    if A[m] = b then
        return m
    else if A[m] < b then
        l ← m + 1
    else
        r ← m − 1
return NotFound;
```

Korrektheit

Algorithmus bricht nur ab, falls $A[l..r]$ leer oder b gefunden.

Invariante: Falls b in A, dann im Bereich $A[l..r]$

Beweis durch Induktion

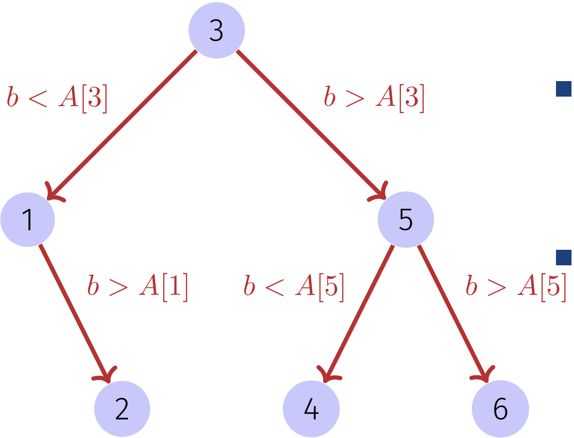
- Induktionsanfang: $b \in A[1..n]$ (oder nicht)
- Hypothese: Invariante gilt nach i Schritten
- Schritt:
  $b < A[m] \Rightarrow b \in A[l..m-1]$
  $b > A[m] \Rightarrow b \in A[m+1..r]$

Untere Schranke

Binäre Suche (im schlechtesten Fall): $\Theta(\log n)$ viele Vergleiche.

Gilt für *jeden* Suchalgorithms in sortiertem Array (im schlechtesten Fall):
Anzahl Vergleiche = $\Omega(\log n)$?

Entscheidungsbaum



- Für jede Eingabe $b = A[i]$ muss Algorithmus erfolgreich sein $\Rightarrow$ Baum enthält mindestens n Knoten.
- Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall = Höhe des Baumes = maximale Anzahl Knoten von Wurzel zu Blatt.

Entscheidungsbaum

Binärer Baum der Höhe h hat höchstens $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{h-1} = 2^h - 1 < 2^h$ Knoten.

Entscheidungsbaum

Binärer Baum der Höhe h hat höchstens $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{h-1} = 2^h - 1 < 2^h$ Knoten.

$$2^h > n \Rightarrow h > \log_2 n$$

Entscheidungsbaum mit n Knoten hat mindestens Höhe $\log_2 n$.

Entscheidungsbaum

Binärer Baum der Höhe h hat höchstens $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{h-1} = 2^h - 1 < 2^h$ Knoten.

$$2^h > n \Rightarrow h > \log_2 n$$

Entscheidungsbaum mit n Knoten hat mindestens Höhe $\log_2 n$.
Anzahl Entscheidungen = $\Omega(\log n)$.

Theorem 9

Jeder Algorithmus zur vergleichsbasierten Suche in sortierten Daten der Länge n benötigt im schlechtesten Fall $\Omega(\log n)$ Vergleichsschritte.

Untere Schranke für Suchen in unsortiertem Array

Theorem 10

Jeder vergleichsbasierte Algorithmus zur Suche in unsortierten Daten der Länge n benötigt im schlechtesten Fall $\Omega(n)$ Vergleichsschritte.

Versuch

Korrekt?

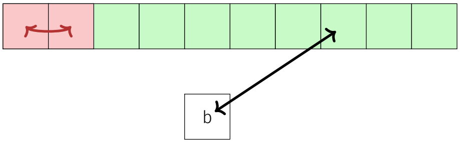
"Beweis": Um b in A zu finden, muss b mit jedem Element $A[i]$ $(1 \leq i \leq n)$ verglichen werden.

Versuch

Korrekt?

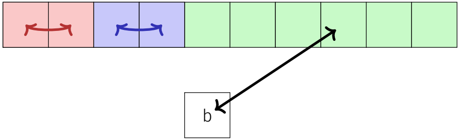
"Beweis": Um b in A zu finden, muss b mit jedem Element $A[i]$ $(1 \leq i \leq n)$ verglichen werden.
Falsch! Vergleiche zwischen Elementen von A möglich!

Besseres Argument



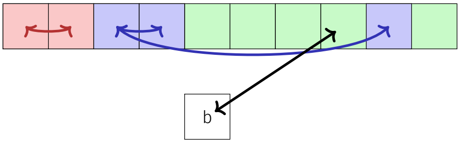
- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit b : e Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.

Besseres Argument



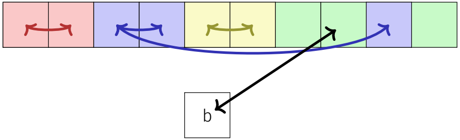
- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit $b : e$ Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.
- Vereinigen zweier Gruppen benötigt mindestens einen (internen Vergleich: $n - g \leq i$.

Besseres Argument



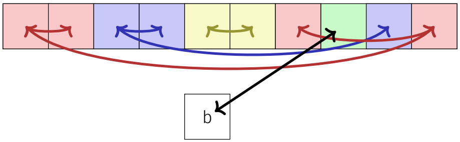
- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit b : e Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.
- Vereinigen zweier Gruppen benötigt mindestens einen (internen Vergleich: $n - g \leq i$.

Besseres Argument



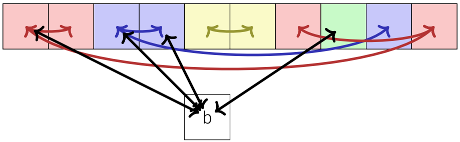
- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit $b : e$ Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.
- Vereinigen zweier Gruppen benötigt mindestens einen (internen Vergleich: $n - g \leq i$.

Besseres Argument



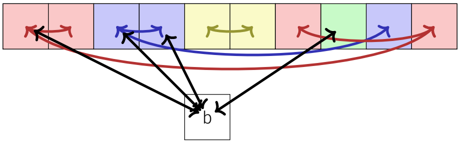
- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit b : e Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.
- Vereinigen zweier Gruppen benötigt mindestens einen (internen Vergleich: $n - g \leq i$.

Besseres Argument



- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit b : e Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.
- Vereinigen zweier Gruppen benötigt mindestens einen (internen Vergleich: $n - g \leq i$.
- Mindestens ein Element pro Gruppe muss mit b verglichen werden: $e \geq g$.

Besseres Argument



- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit b : e Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.
- Vereinigen zweier Gruppen benötigt mindestens einen (internen Vergleich: $n - g \leq i$.
- Mindestens ein Element pro Gruppe muss mit b verglichen werden: $e \geq g$.
- Anzahl Vergleiche $i + e \geq n - g + g = n$. ■

5. Auswählen

Das Auswahlproblem, Randomisierte Berechnung des Medians, Lineare Worst-Case Auswahl [Ottman/Widmayer, Kap. 3.1, Cormen et al, Kap. 9]

Das Auswahlproblem

Eingabe

- Unsortiertes Array $A = (A_1, \dots, A_n)$ paarweise verschiedener Werte
- Zahl $1 \leq k \leq n$.

Ausgabe: $A[i]$ mit $|\{j : A[j] < A[i]\}| = k - 1$

Spezialfälle

$k = 1$: Minimum: Algorithmus mit n Vergleichsoperationen trivial.
$k = n$: Maximum: Algorithmus mit n Vergleichsoperationen trivial.
$k = \lfloor n/2 \rfloor$: Median.

Naiver Algorithmus

Naiver Algorithmus

Wiederholt das Minimum entfernen / auslesen: $\Theta(k \cdot n)$.
$\rightarrow$ Median in $\Theta(n^2)$

Bessere Ansätze

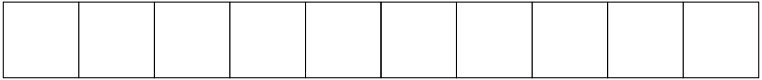
Bessere Ansätze

- Sortieren (kommt bald): $\Theta(n \log n)$

Bessere Ansätze

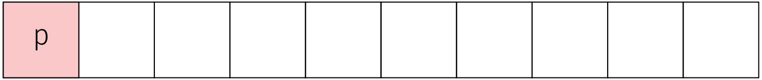
- Sortieren (kommt bald): $\Theta(n \log n)$
- Pivotieren: $\Theta(n)$!

Pivotieren



Pivotieren

1. Wähle ein (beliebiges) Element p als Pivotelement



Pivotieren

1. Wähle ein (beliebiges) Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf, bestimme dabei den Rang von p, indem die Anzahl der Indizes i mit $A[i] \leq p$ gezählt werden.

p	$>$	$\leq$	$\leq$	$>$	$>$	$\leq$	$\leq$	$>$	$\leq$

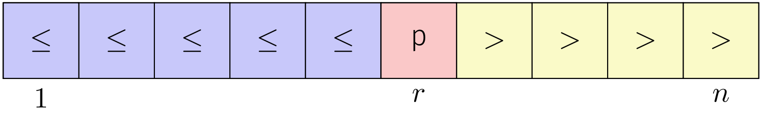
Pivotieren

1. Wähle ein (beliebiges) Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf, bestimme dabei den Rang von p, indem die Anzahl der Indizes i mit $A[i] \leq p$ gezählt werden.

p	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$>$	$>$	$>$	$>$

Pivotieren

1. Wähle ein (beliebiges) Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf, bestimme dabei den Rang von p, indem die Anzahl der Indizes i mit $A[i] \leq p$ gezählt werden.



Pivotieren

1. Wähle ein (beliebiges) Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf, bestimme dabei den Rang von p, indem die Anzahl der Indizes i mit $A[i] \leq p$ gezählt werden.
3. Rekursion auf dem relevanten Teil. Falls $k = r$, dann gefunden.

$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	p	$>$	$>$	$>$	$>$
1					r				n

Algorithmus `Partition`(A, l, r, p)

Input: Array A, welches den Pivot p in $A[l, \dots, r]$ mindestens einmal enthält.
Output: Array A partitioniert in $A[l, \dots, r]$ um p. Rückgabe der Position von p.

while $l \leq r$ **do**
    while $A[l] < p$ **do**
        $l \leftarrow l + 1$
    while $A[r] > p$ **do**
        $r \leftarrow r - 1$
    swap($A[l]$, $A[r]$)
    if $A[l] = A[r]$ **then**
        $l \leftarrow l + 1$

return l-1

Korrektheit: Invariante

Invariante I: $A_i \leq p \; \forall i \in [0, l)$, $A_i \geq p \; \forall i \in (r, n]$, $\exists k \in [l, r] : A_k = p$.

while $l \leq r$ **do**

I

  while $A[l] < p$ **do**

    $l \leftarrow l + 1$

I und $A[l] \geq p$

  while $A[r] > p$ **do**

    $r \leftarrow r - 1$

I und $A[r] \leq p$

  swap($A[l]$, $A[r]$)

I und $A[l] \leq p \leq A[r]$

  if $A[l] = A[r]$ **then**

    $l \leftarrow l + 1$

I

return l-1

Korrektheit: Fortschritt

while $l \leq r$ **do**
- **while** $A[l] < p$ **do** — Fortschritt wenn $A[l] < p$
  - $l \leftarrow l + 1$
- **while** $A[r] > p$ **do** — Fortschritt wenn $A[r] > p$
  - $r \leftarrow r - 1$
- swap($A[l]$, $A[r]$) — Fortschritt wenn $A[l] > p$ oder $A[r] < p$
- **if** $A[l] = A[r]$ **then** — Fortschritt wenn $A[l] = A[r] = p$
  - $l \leftarrow l + 1$

return l-1

Wahl des Pivots

Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(?)$

p_1									

Wahl des Pivots

Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(?)$

p_1	p_2								

Wahl des Pivots

Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(?)$

p_1	p_2	p_3							

Wahl des Pivots

Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(?)$

p_1	p_2	p_3	p_4						

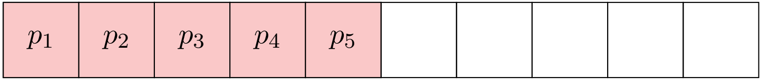
Wahl des Pivots

Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(n^2)$

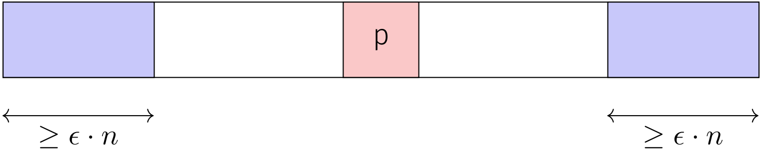
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5					

Wahl des Pivots

Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(n^2)$



Ein guter Pivot hat linear viele Elemente auf beiden Seiten.



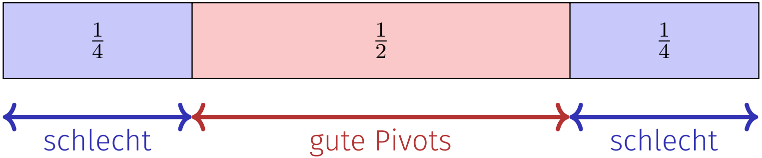
Analyse

Unterteilung mit Faktor q $(0 < q < 1)$: zwei Gruppen mit $q \cdot n$ und $(1 - q) \cdot n$ Elementen (ohne Einschränkung $q \geq 1 - q$).

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq T(q \cdot n) + c \cdot n \\
&\leq c \cdot n + q \cdot c \cdot n + T(q^2 \cdot n) \leq \ldots = c \cdot n \sum_{i=0}^{\log_q(n)-1} q^i + T(1) \\
&\leq c \cdot n \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} q^i}_{\text{geom. Reihe}} + d = c \cdot n \cdot \frac{1}{1-q} + d = \mathcal{O}(n)
\end{aligned}
$$

Wie bekommen wir das hin?

Der Zufall hilft uns (Tony Hoare, 1961). Wähle in jedem Schritt einen zufälligen Pivot.



Wahrscheinlichkeit für guten Pivot nach einem Versuch: $\frac{1}{2} =: \rho$.
Wahrscheinlichkeit für guten Pivot nach k Versuchen: $(1-\rho)^{k-1} \cdot \rho$.
Erwartete Anzahl Versuche: $1/\rho = 2$ (Erwartungswert der geometrischen Verteilung:)

Algorithmus `Quickselect` (A, l, r, k)

Input: Array A der Länge n. Indizes $1 \leq l \leq k \leq r \leq n$, so dass für alle $x \in A[l..r] : |\{j|A[j] \leq x\}| \geq l$ und $|\{j|A[j] \leq x\}| \leq r$.
Output: Wert $x \in A[l..r]$ mit $|\{j|A[j] \leq x\}| \geq k$ und $|\{j|x \leq A[j]\}| \geq n - k + 1$

if l=r **then**
  return $A[l]$;

$x \leftarrow$ **`RandomPivot`**(A, l, r)
$m \leftarrow$ **`Partition`**(A, l, r, x)
if $k < m$ **then**
  return **`QuickSelect`**$(A, l, m - 1, k)$
else if $k > m$ **then**
  return **`QuickSelect`**$(A, m + 1, r, k)$
else
  return $A[k]$

Algorithmus RandomPivot (A, l, r)

Input: Array A der Länge n. Indizes $1 \leq l \leq r \leq n$
Output: Zufälliger "guter" Pivot $x \in A[l, \ldots, r]$

repeat
    wähle zufälligen Pivot $x \in A[l..r]$
    $p \leftarrow l$
    for $j = l$ **to** r **do**
        if $A[j] \leq x$ **then** $p \leftarrow p + 1$
until $\left\lfloor \frac{3l+r}{4} \right\rfloor \leq p \leq \left\lceil \frac{l+3r}{4} \right\rceil$
return x

Dieser Algorithmus ist nur von theoretischem Interesse und liefert im Erwartungswert nach 2 Durchläufen einen guten Pivot. Praktisch kann man im Algorithmus Quickselect direkt einen zufälligen Pivot uniformverteilt ziehen oder einen deterministischen Pivot wählen, z.B. den Median von drei Elementen.

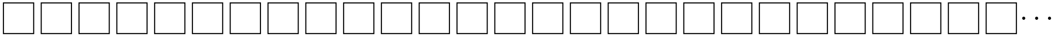
Median der Mediane

Ziel: Finde einen Algorithmus, welcher im schlechtesten Fall nur linear viele Schritte benötigt.

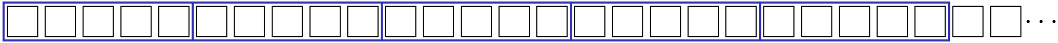
Algorithmus Select (k-smallest)

- Fünfergruppen bilden.
- Median jeder Gruppe bilden (naiv).
- Select rekursiv auf den Gruppenmedianen.
- Partitioniere das Array um den gefundenen Median der Mediane. Resultat: i
- Wenn $i = k$, Resultat. Sonst: Select rekursiv auf der richtigen Seite.

Median der Mediane

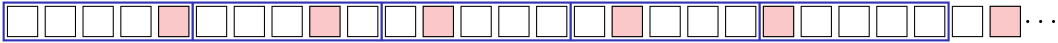


Median der Mediane



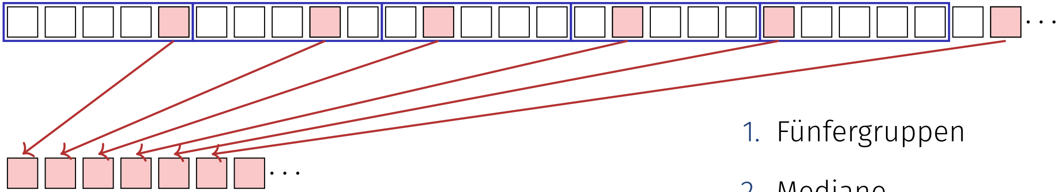
1. Fünfergruppen

Median der Mediane



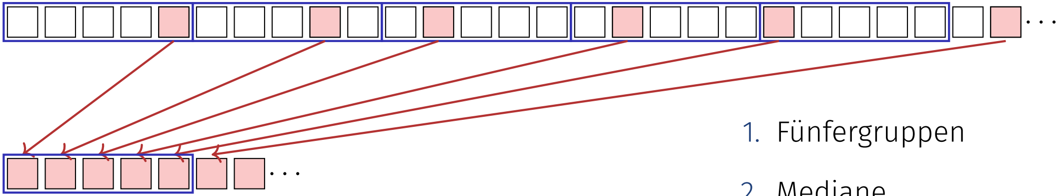
1. Fünfergruppen
2. Mediane

Median der Mediane



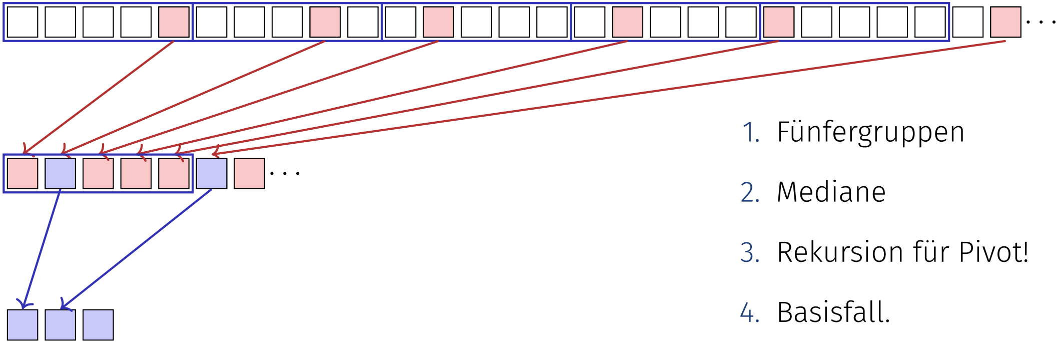
1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!

Median der Mediane



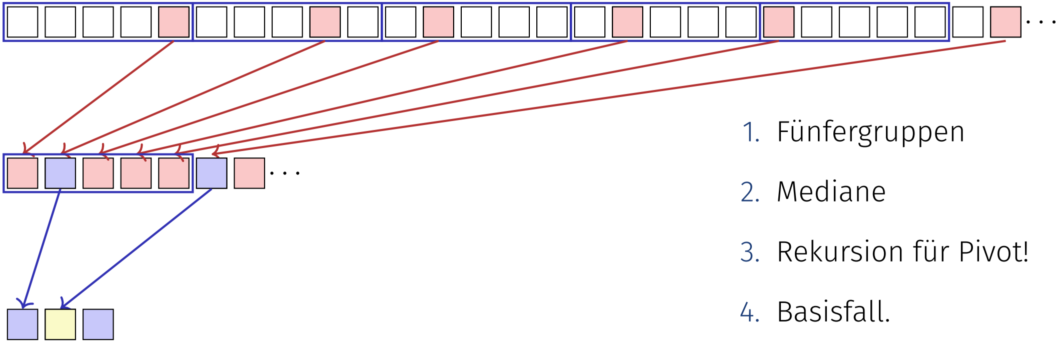
1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!

Median der Mediane



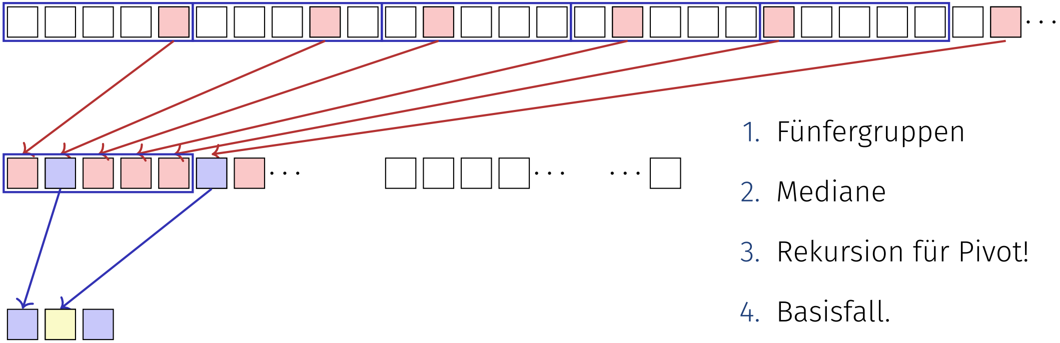
1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!
4. Basisfall.

Median der Mediane



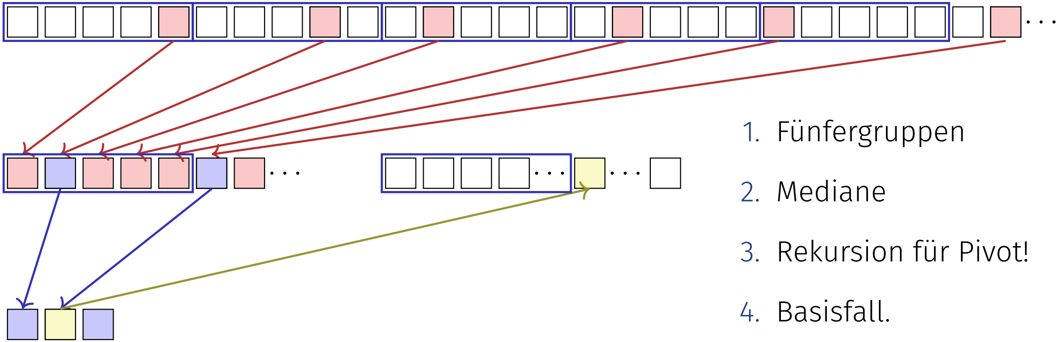
1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!
4. Basisfall.
5. Pivot (Level 1)

Median der Mediane



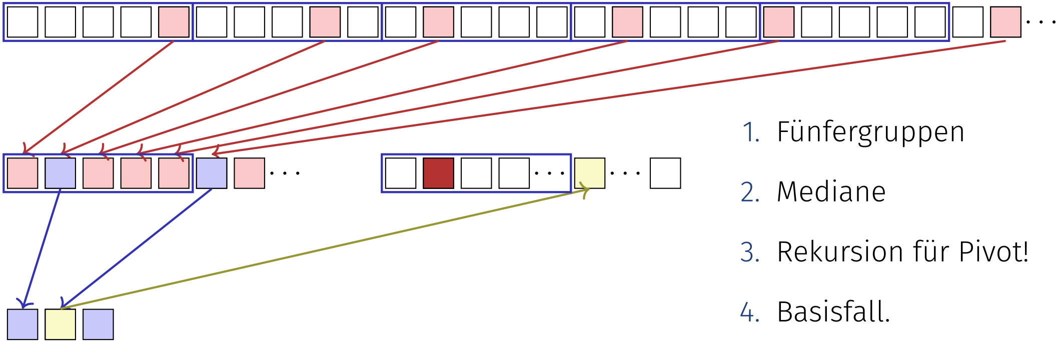
1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!
4. Basisfall.
5. Pivot (Level 1)

Median der Mediane



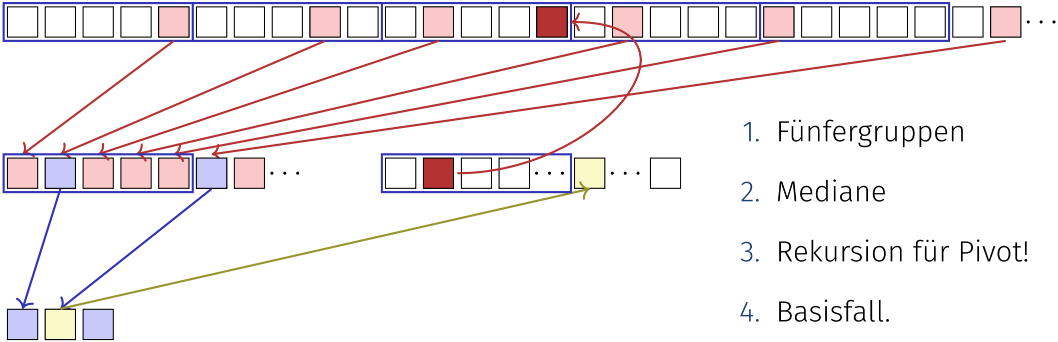
1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!
4. Basisfall.
5. Pivot (Level 1)
6. Partition (Level 1)

Median der Mediane



1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!
4. Basisfall.
5. Pivot (Level 1)
6. Partition (Level 1)
7. Median = Pivot Level 0

Median der Mediane



1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!
4. Basisfall.
5. Pivot (Level 1)
6. Partition (Level 1)
7. Median = Pivot Level 0
8. 2. Rekursion startet

Algorithmus $\texttt{MMSelect}(A, l, r, k)$

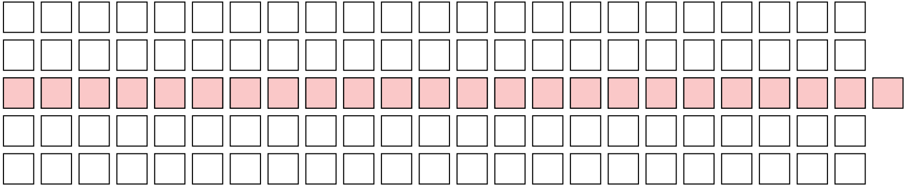
Input: Array A der Länge n mit paarweise verschiedenen Einträgen.
$1 \leq l \leq k \leq r \leq n$, $A[i] < A[k] \; \forall \; 1 \leq i < l$, $A[i] > A[k] \; \forall \; r < i \leq n$
Output: Wert $x \in A$ mit $|\{j | A[j] \leq x\}| = k$

$m \leftarrow \texttt{MMChoose}(A, l, r)$
$i \leftarrow \texttt{Partition}(A, l, r, m)$
if $k < i$ **then**
  return $\texttt{MMSelect}(A, l, i-1, k)$
else if $k > i$ **then**
  return $\texttt{MMSelect}(A, i+1, r, k)$
else
  return $A[i]$

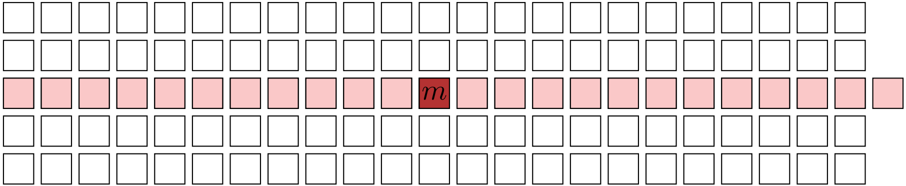
Algorithmus $\texttt{MMChoose}(A, l, r)$

Input: Array A der Länge n mit paarweise verschiedenen Einträgen.
$1 \leq l \leq r \leq n$.
Output: Median m der Mediane
if $r - l \leq 5$ **then**
  return MedianOf5($A[l, \ldots, r]$)
else
  $A' \leftarrow$ MedianOf5Array($A[l, \ldots, r]$)
  return $\texttt{MMSelect}(A', 1, |A'|, \left\lfloor \frac{|A'|}{2} \right\rfloor)$

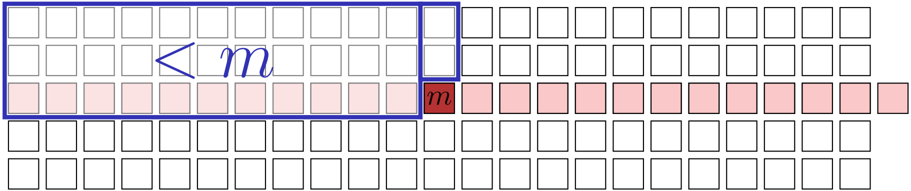
Was bringt das?



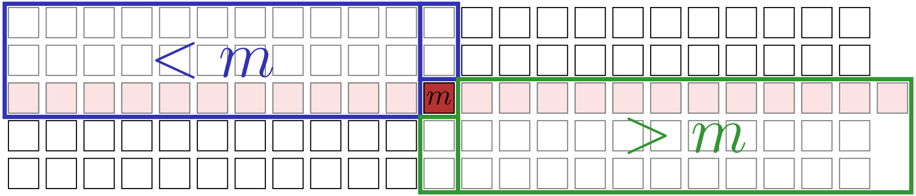
Was bringt das?



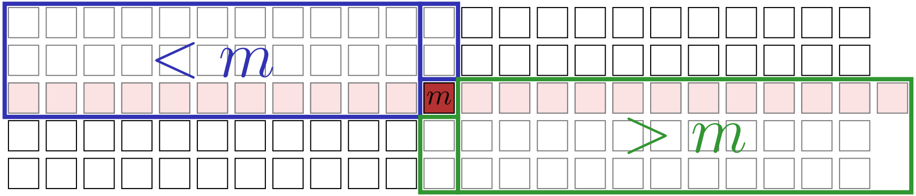
Was bringt das?



Was bringt das?



Was bringt das?

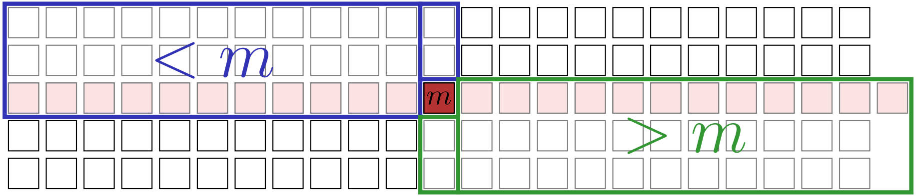


- Anzahl Fünfergruppen: $\lceil \frac{n}{5} \rceil$, ohne Mediangruppe: $\lceil \frac{n}{5} \rceil - 1$
- Minimale Anzahl Gruppen links / rechts von Mediangruppe $\left\lfloor \frac{1}{2}\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - 1\right) \right\rfloor$
- Minimale Anzahl Punkte kleiner / grösser als m

$$3\left\lfloor \frac{1}{2}\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - 1\right) \right\rfloor \geq 3\left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{n}{5} - 1\right) \right\rfloor \geq 3\left(\frac{n}{10} - \frac{1}{2} - 1\right) > \frac{3n}{10} - 6$$

(Fülle Restgruppe konzeptuell mit Punkten aus Mediangruppe auf)

Was bringt das?



- Anzahl Fünfergruppen: $\lceil \frac{n}{5} \rceil$, ohne Mediangruppe: $\lceil \frac{n}{5} \rceil - 1$
- Minimale Anzahl Gruppen links / rechts von Mediangruppe $\left\lfloor \frac{1}{2}\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - 1\right)\right\rfloor$
- Minimale Anzahl Punkte kleiner / grösser als m

$$3\left\lfloor \frac{1}{2}\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - 1\right)\right\rfloor \geq 3\left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{n}{5} - 1\right)\right\rfloor \geq 3\left(\frac{n}{10} - \frac{1}{2} - 1\right) > \frac{3n}{10} - 6$$

(Fülle Restgruppe konzeptuell mit Punkten aus Mediangruppe auf)

$\Rightarrow$ Rekursiver Aufruf mit maximal $\lceil \frac{7n}{10} + 6 \rceil$ Elementen.

Analyse

Rekursionsungleichung:

$$T(n) \leq T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lceil \frac{7n}{10} + 6 \right\rceil\right) + d \cdot n.$$

mit einer Konstanten d.

Behauptung:

$$T(n) = \mathcal{O}(n).$$

Beweis

Induktionsanfang:[7] Wähle c so gross, dass

$$T(n) \leq c \cdot n \text{ für alle } n \leq n_0.$$

Induktionsannahme : $H(n)$

$$T(i) \leq c \cdot i \text{ für alle } i < n.$$

Induktionsschritt: $H(k)_{k<n} \to H(n)$

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lceil \frac{7n}{10} + 6 \right\rceil\right) + d \cdot n \\ &\leq c \cdot \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + c \cdot \left\lceil \frac{7n}{10} + 6 \right\rceil + d \cdot n \qquad (\text{für } n > 20). \end{aligned}$$

[7] Es wird sich im Induktionsschritt herausstellen, dass der Basisfall für alle $n \leq n_0$ und ein bestimmtes (aber festes) $n_0 > 0$ betrachtet werden muss. Da c beliebig gross gewählt werden darf und eine beschränkte Anzahl von Termen eingeht, ist das eine einfache Erweiterung des Basisfalles $n = 1$

Beweis

Induktionsschritt:

$$T(n) \overset{n>20}{\leq} c \cdot \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + c \cdot \left\lceil \frac{7n}{10} + 6 \right\rceil + d \cdot n$$
$$\leq c \cdot \frac{n}{5} + c + c \cdot \frac{7n}{10} + 6c + c + d \cdot n = \frac{9}{10} \cdot c \cdot n + 8c + d \cdot n.$$

Zu zeigen

$$\exists n_0, \exists c \quad | \quad \frac{9}{10} \cdot c \cdot n + 8c + d \cdot n \leq cn \quad \forall n \geq n_0$$

Also

$$8c + d \cdot n \leq \frac{1}{10} cn \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{80c}{c - 10d}$$

Setze z.B. $c = 90d, n_0 = 91 \qquad \Rightarrow T(n) \leq cn \; \forall \; n \geq n_0$ ■

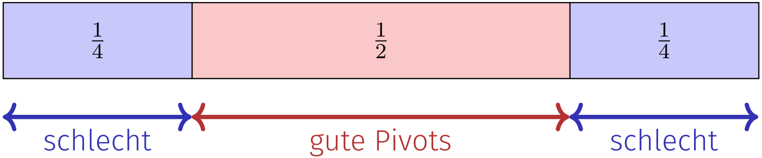
Resultat

Theorem 11

Das i-te Element einer Folge von n Elementen kann im schlechtesten Fall in $\Theta(n)$ Schritten gefunden werden.

Überblick

1.	Wiederholt Minimum finden	$\mathcal{O}(n^2)$
2.	Sortieren und $A[i]$ ausgeben	$\mathcal{O}(n \log n)$
3.	Quickselect mit zufälligem Pivot	$\mathcal{O}(n)$ im Mittel
4.	Median of Medians (Blum)	$\mathcal{O}(n)$ im schlimmsten Fall



5.1 Anhang

Herleitung einiger mathematischen Formeln

[Erwartungswert der geometrischen Verteilung]

Zufallsvariable $X \in \mathbb{N}^+$ mit $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$.

Erwartungswert

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot (1-q) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} - k \cdot q^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot q^k - k \cdot q^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.
\end{aligned}
$$