

## 28. Flüsse in Netzen

---

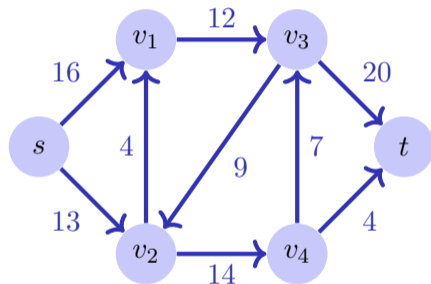
Flussnetzwerk, Maximaler Fluss, Schnitt, Restnetzwerk, Max-flow Min-cut Theorem, Ford-Fulkerson Methode, Edmonds-Karp Algorithmus, Maximales Bipartites Matching [Ottman/Widmayer, Kap. 9.7, 9.8.1], [Cormen et al, Kap. 26.1-26.3]

# Motivation

- Modelliere Fluss von Flüssigkeiten, Bauteile auf Fließbändern, Strom in elektrischen Netzwerken oder Information in Kommunikationsnetzwerken.
- Konnektivität von Kommunikationsnetzwerken, Bipartites Matching, Zirkulationen, Scheduling, Image Segmentation, Baseball Elimination...

# Flussnetzwerk

- **Flussnetzwerk**  $G = (V, E, c)$ : gerichteter Graph mit **Kapazitäten**
- Antiparallele Kanten verboten:  
 $(u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \notin E$ .
- Fehlen einer Kante  $(u, v)$  auch modelliert durch  $c(u, v) = 0$ .
- **Quelle**  $s$  und **Senke**  $t$ : spezielle Knoten. Jeder Knoten  $v$  liegt auf einem Pfad zwischen  $s$  und  $t$ :  $s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$



# Fluss

Ein **Fluss**  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt folgende Bedingungen:

- **Kapazitätsbeschränkung:**

Für alle  $u, v \in V$ :  $f(u, v) \leq c(u, v)$ .

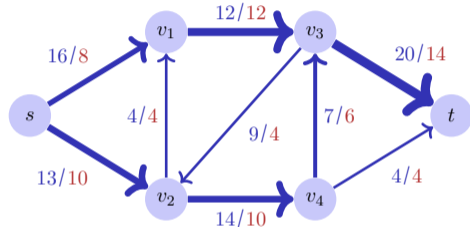
- **Schiefsymmetrie:**

Für alle  $u, v \in V$ :  $f(u, v) = -f(v, u)$ .

- **Flusserhaltung:**

Für alle  $u \in V \setminus \{s, t\}$ :

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = 0.$$



**Wert**  $w$  des Flusses:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v).$$

Hier  $|f| = 18$ .

# Wie gross kann ein Fluss sein?

Begrenzende Faktoren: Schnitte

- **$s$  von  $t$  trennender Schnitt:** Partitionierung von  $V$  in  $S$  und  $T$  mit  $s \in S$ ,  $t \in T$ .
- **Kapazität** eines Schnittes:  $c(S, T) = \sum_{v \in S, v' \in T} c(v, v')$
- **Minimaler Schnitt:** Schnitt mit minimaler Kapazität.
- **Fluss über Schnitt:**  $f(S, T) = \sum_{v \in S, v' \in T} f(v, v')$

# Implizites Summieren

Notation: Seien  $U, U' \subseteq V$

$$f(U, U') := \sum_{\substack{u \in U \\ u' \in U'}} f(u, u'), \quad f(u, U') := f(\{u\}, U')$$

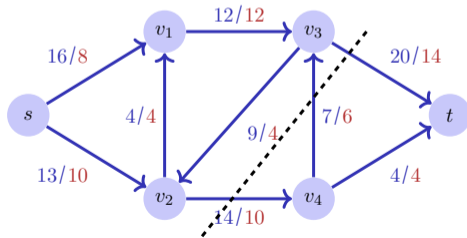
Somit

- $|f| = f(s, V)$
- $f(U, U) = 0$
- $f(U, U') = -f(U', U)$
- $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ , wenn  $X \cap Y = \emptyset$ .
- $f(R, V) = 0$  wenn  $R \cap \{s, t\} = \emptyset$ . [Flusserhaltung!]

# Wie gross kann ein Fluss sein?

Es gilt für jeden Fluss und jeden Schnitt, dass  $f(S, T) = |f|$ :

$$\begin{aligned} f(S, T) &= f(S, V) - \underbrace{f(S, S)}_0 = f(S, V) \\ &= f(s, V) + \underbrace{f(S - \{s\}, V)}_{\not\ni t, \not\ni s} = |f|. \end{aligned}$$

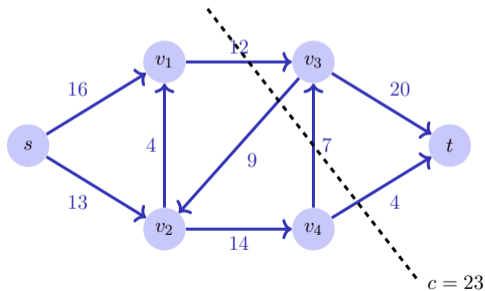


# Maximaler Fluss ?

Es gilt insbesondere für alle Schnitte  $(S, T)$  von  $V$ .

$$|f| \leq \sum_{v \in S, v' \in T} c(v, v') = c(S, T)$$

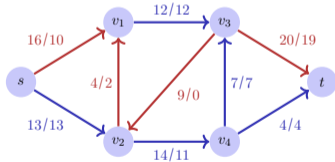
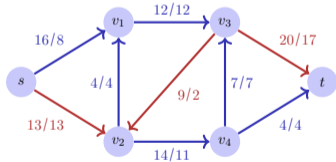
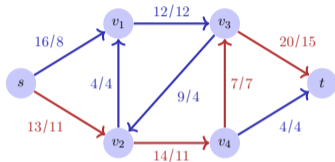
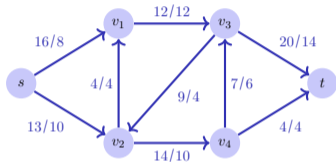
Werden sehen, dass Gleichheit gilt für  $\min_{S, T} c(S, T)$ .





# Maximaler Fluss ?

Naives Vorgehen:



Folgerung: Greedy Flusserhöhung löst das Problem nicht.

# Die Ford-Fulkerson Methode

- Starte mit  $f(u, v) = 0$  für alle  $u, v \in V$
- Bestimme Restnetzwerk\*  $G_f$  und Erweiterungspfad in  $G_f$
- Erhöhe Fluss über den Erweiterungspfad\*
- Wiederholung bis kein Erweiterungspfad mehr vorhanden.

$$G_f := (V, E_f, c_f)$$
$$c_f(u, v) := c(u, v) - f(u, v) \quad \forall u, v \in V$$
$$E_f := \{(u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0\}$$

\*Wird im Folgenden erklärt

# Flusserhöhung, negativ

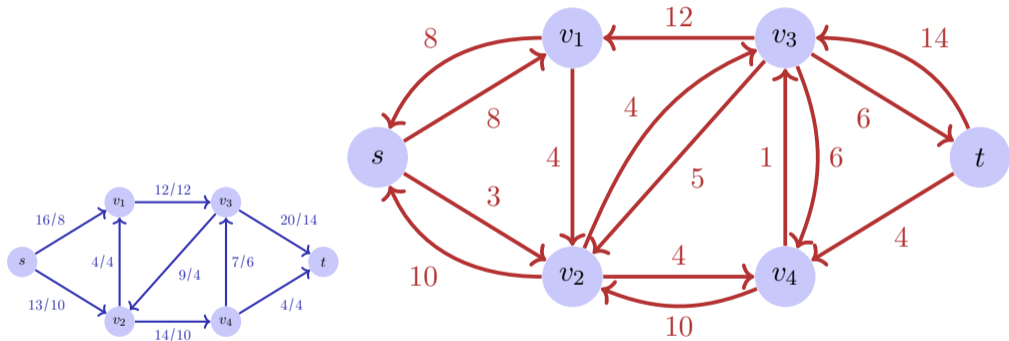
Sei ein Fluss  $f$  im Netzwerk gegeben.

Erkenntnis:

- Flusserhöhung in Richtung einer Kante möglich, wenn Fluss entlang der Kante erhöht werden kann, also wenn  $f(u, v) < c(u, v)$ .  
Restkapazität  $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v) > 0$ .
- Flusserhöhung **entgegen** der Kantenrichtung möglich, wenn Fluss entlang der Kante verringert werden kann, also wenn  $f(u, v) > 0$ .  
Restkapazität  $c_f(v, u) = f(u, v) > 0$ .

# Restnetzwerk

**Restnetzwerk**  $G_f$  gegeben durch alle Kanten mit Restkapazität:



Restnetzwerke haben dieselben Eigenschaften wie Flussnetzwerke, ausser dass antiparallele Kapazitäten-Kanten zugelassen sind.

# Beobachtung

## Theorem 33

Sei  $G = (V, E, c)$  ein Flussnetzwerk mit Quelle  $s$  und Senke  $t$  und  $f$  ein Fluss in  $G$ . Sei  $G_f$  das dazugehörige Restnetzwerk und sei  $f'$  ein Fluss in  $G_f$ . Dann definiert  $f \oplus f'$  mit

$$(f \oplus f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v)$$

einen Fluss in  $G$  mit Wert  $|f| + |f'|$ .

# Beweis

$f \oplus f'$  ist ein Fluss in  $G$ :

- Kapazitätsbeschränkung

$$(f \oplus f')(u, v) = f(u, v) + \underbrace{f'(u, v)}_{\leq c(u, v) - f(u, v)} \leq c(u, v)$$

- Schiefsymmetrie

$$(f \oplus f')(u, v) = -f(v, u) + -f'(v, u) = -(f \oplus f')(v, u)$$

- Flusserhaltung  $u \in V - \{s, t\}$ :

$$\sum_{v \in V} (f \oplus f')(u, v) = \sum_{v \in V} f(u, v) + \sum_{v \in V} f'(u, v) = 0$$

# Beweis

Wert von  $f \oplus f'$

$$\begin{aligned} |f \oplus f'| &= (f \oplus f')(s, V) \\ &= \sum_{u \in V} f(s, u) + f'(s, u) \\ &= f(s, V) + f'(s, V) \\ &= |f| + |f'| \end{aligned}$$



# Erweiterungspfade

**Erweiterungspfad**  $p$ : einfacher Pfad von  $s$  nach  $t$  im Restnetzwerk  $G_f$ .

**Restkapazität**  $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ Kante in } p\}$



# Fluss in $G_f$

## Theorem 34

Die Funktion  $f_p : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{wenn } (u, v) \text{ Kante in } p \\ -c_f(p) & \text{wenn } (v, u) \text{ Kante in } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein Fluss in  $G_f$  mit dem Wert  $|f_p| = c_f(p) > 0$ .

$f_p$  ist ein Fluss (leicht nachprüfbar). Es gibt genau einen Knoten  $u \in V$  mit  $(s, u) \in p$ . Somit  $|f_p| = \sum_{v \in V} f_p(s, v) = f_p(s, u) = c_f(p)$ .

# Folgerung

Strategie für den Algorithmus:

Mit einem Erweiterungspfad  $p$  in  $G_f$  definiert  $f \oplus f_p$  einen neuen Fluss mit Wert  $|f \oplus f_p| = |f| + |f_p| > |f|$ .

# Max-Flow Min-Cut Theorem

## *Theorem 35*

*Wenn  $f$  ein Fluss in einem Flussnetzwerk  $G = (V, E, c)$  mit Quelle  $s$  und Senke  $t$  ist, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- 1.  $f$  ist ein maximaler Fluss in  $G$*
- 2. Das Restnetzwerk  $G_f$  enthält keine Erweiterungspfade*
- 3. Es gilt  $|f| = c(S, T)$  für einen Schnitt  $(S, T)$  von  $G$ .*

# Beweis

- (3)  $\Rightarrow$  (1):

Es gilt  $|f| \leq c(S, T)$  für alle Schnitte  $S, T$ . Aus  $|f| = c(S, T)$  folgt also  $|f|$  maximal.

- (1)  $\Rightarrow$  (2):

$f$  maximaler Fluss in  $G$ . Annahme:  $G_f$  habe einen Erweiterungsfad. Dann gilt  $|f \oplus f_p| = |f| + |f_p| > |f|$ . Widerspruch.

## Beweis (2) $\Rightarrow$ (3)

Annahme:  $G_f$  habe keinen Erweiterungsfad

Definiere  $S = \{v \in V : \text{es existiert Pfad } s \rightsquigarrow v \text{ in } G_f\}$ .

$(S, T) := (S, V \setminus S)$  ist ein Schnitt:  $s \in S, t \in T$ .

Sei  $u \in S$  und  $v \in T$ . Dann  $c_f(u, v) = 0$ , also  $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v) = 0$ .

Somit  $f(u, v) = c(u, v)$ .

Somit

$$|f| = f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) = C(S, T).$$



# Algorithmus Ford-Fulkerson( $G, s, t$ )

**Input:** Flussnetzwerk  $G = (V, E, c)$

**Output:** Maximaler Fluss  $f$ .

**for**  $(u, v) \in E$  **do**

└  $f(u, v) \leftarrow 0$

**while** Existiert Pfad  $p : s \rightsquigarrow t$  im Restnetzwerk  $G_f$  **do**

└  $c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$

└ **foreach**  $(u, v) \in p$  **do**

└└  $f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(p)$

└└  $f(v, u) \leftarrow f(v, u) - c_f(p)$

# Praktische Anmerkung

In einer Implementation des Ford-Fulkerson Algorithmus werden die negativen Flusskanten normalerweise nicht gespeichert, da ihr Wert sich stets als der negierter Wert der Gegenkante ergibt.

$$f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(p)$$

$$f(v, u) \leftarrow f(v, u) - c_f(p)$$

wird dann zu

**if**  $(u, v) \in E$  **then**

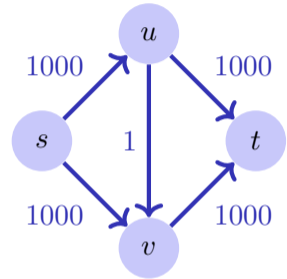
$$\quad | \quad f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(p)$$

**else**

$$\quad | \quad f(v, u) \leftarrow f(v, u) - c_f(p)$$

# Analyse

- Der Ford-Fulkerson Algorithmus muss für irrationale Kapazitäten nicht einmal terminieren! Für ganze oder rationale Zahlen terminiert der Algorithmus.
- Für ganzzahligen Fluss benötigt der Algorithmus maximal  $|f_{\max}|$  Durchläufe der While-Schleife (denn der Fluss erhöht sich mindestens um 1). Suche einzelner zunehmender Weg (z.B. Tiefensuche oder Breitensuche)  $\mathcal{O}(|E|)$ . Also  $\mathcal{O}(f_{\max}|E|)$ .



Bei schlecht gewählter Strategie benötigt der Algorithmus hier bis zu 2000 Iterationen.



# Edmonds-Karp Algorithmus

Wähle in der Ford-Fulkerson-Methode zum Finden eines Pfades in  $G_f$  jeweils einen Erweiterungspfad kürzester Länge (z.B. durch Breitensuche).

# Edmonds-Karp Algorithmus

## *Theorem 36*

*Wenn der Edmonds-Karp Algorithmus auf ein ganzzahliges Flussnetzwerk  $G = (V, E)$  mit Quelle  $s$  und Senke  $t$  angewendet wird, dann ist die Gesamtanzahl der durch den Algorithmus angewendete Flusserhöhungen in  $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$ .*

*$\Rightarrow$  Gesamte asymptotische Laufzeit:  $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$*

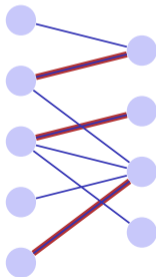
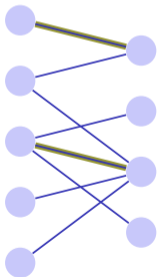
[Ohne Beweis]

# Anwendung: Maximales bipartites Matching

Gegeben: bipartiter ungerichteter Graph  $G = (V, E)$ .

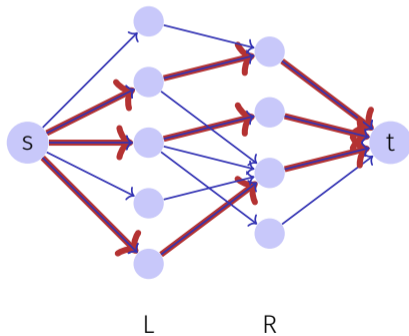
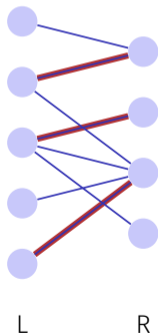
**Matching**  $M$ :  $M \subseteq E$  so dass  $|\{m \in M : v \in m\}| \leq 1$  für alle  $v \in V$ .

**Maximales Matching**  $M$ : Matching  $M$ , so dass  $|M| \geq |M'|$  für jedes Matching  $M'$ .



# Korrespondierendes Flussnetzwerk

Konstruiere zur einer Partition  $L, R$  eines bipartiten Graphen ein korrespondierendes Flussnetzwerk mit Quelle  $s$  und Senke  $t$ , mit gerichteten Kanten von  $s$  nach  $L$ , von  $L$  nach  $R$  und von  $R$  nach  $t$ . Jede Kante bekommt Kapazität 1.



# Ganzzahligkeitstheorem

## *Theorem 37*

*Wenn die Kapazitäten eines Flussnetzwerks nur ganzzahlige Werte annehmen, dann hat der durch Ford-Fulkerson erzeugte maximale Fluss die Eigenschaft, dass der Wert von  $f(u, v)$  für alle  $u, v \in V$  eine ganze Zahl ist.*

[ohne Beweis]

Folgerung: Ford Fulkerson erzeugt beim zum bipartiten Graph gehörenden Flussnetzwerk ein maximales Matching  $M = \{(u, v) : f(u, v) = 1\}$ .