26.8 A*-Algorithmus

Disclaimer

Diese Folien beinhalten die wichtigsten Formalien zum A*-Algorithmus und dessen Korrektheit. In der Vorlesung wird der Algorithmus motiviert und mit Beispielen unterlegt.

Eine sehr schöne Motivation des Algorithmus findet sich zum Beispiel hier:
`https://www.youtube.com/watch?v=bRvs8rOQU-Q`

A*-Algorithmus

Voraussetzungen

- Positiv gewichteter Graph $G = (V, E, c)$
- G endlich oder δ-Graph: $\exists\, \delta > 0 : c(e) \geq \delta$ für alle $e \in E$
- $s \in V$, $t \in V$
- Abstandsschätzung $\widehat{h}_t(v) \leq h_t(v) := \delta(v, t)\ \forall\ v \in V$.
- Gesucht: kürzester Pfad $p : s \rightsquigarrow t$

A*-Algorithmus($G, s, t, \hat{h}$)

Input: Positiv gewichteter Graph $G = (V, E, c)$, Startpunkt $s \in V$, Endpunkt $t \in V$, Schätzung $\widehat{h}(v) \leq \delta(v, t)$

Output: Existenz und Wert eines kürzesten Pfades von s nach t

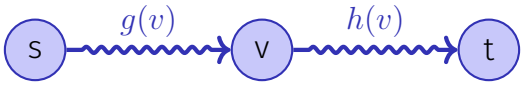
foreach $u \in V$ **do**
  $d[u] \leftarrow \infty$; $\widehat{f}[u] \leftarrow \infty$; $\pi[u] \leftarrow$ null

$d[s] \leftarrow 0$; $\widehat{f}[s] \leftarrow \widehat{h}(s)$; $R \leftarrow \{s\}$; $M \leftarrow \{\}$
while $R \neq \emptyset$ **do**
  $u \leftarrow \mathsf{ExtractMin}_{\widehat{f}}(R)$; $M \leftarrow M \cup \{u\}$
  if $u = t$ **then return** success
  foreach $v \in N^+(u)$ with $d[v] > d[u] + c(u, v)$ **do**
    $d[v] \leftarrow d[u] + c(u, v)$; $\widehat{f}[v] \leftarrow d[v] + \widehat{h}(v)$; $\pi[v] \leftarrow u$
    $R \leftarrow R \cup \{v\}$; $M \leftarrow M - \{v\}$
return failure

Notation

Sei $f(v)$ die Distanz eines kürzesten Weges von s nach t über v, also

$$f(v) := \underbrace{\delta(s,v)}_{g(v)} + \underbrace{\delta(v,t)}_{h(v)}$$



Sei p ein kürzester Weg von s nach t.
Dann gilt $f(s) = \delta(s,t)$ und $f(v) = f(s)$ für alle $v \in p$.
Sei $\widehat{g}(v) := d[v]$ die Schätzung von $g(v)$ in obigem Algorithms. Es gilt, dass $\hat{g}(v) \geq g(v)$.
$\widehat{h}(v)$ ist eine Schätzung von $h(v)$ mit $\widehat{h}(v) \leq h(v)$.

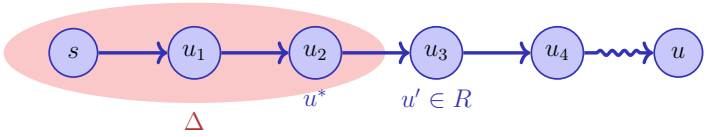
Warum der Algorithmus funktioniert

Lemma 26

Sei $u \in V$ und, zu einem Zeitpunkt des A-Algorithmus, $u \notin M$. Sei p ein kürzester Pfad von s nach u. Dann existiert ein $u' \in p$ mit $\widehat{g}(u') = g(u')$ und $u' \in R$.*

Das Lemma besagt, dass es immer einen Knoten in der offenen Menge R gibt, dessen wahre Entfernung von s schon berechnet wurde und der zum kürzesten Pfad gehört (sofern ein solcher existiert).

Illustration und Beweis



Beweis: Wenn $s \in R$, dann $\widehat{g}(s) = g(s) = 0$. Sei also $s \notin R$.

Sei $p = \langle s = u_0, u_1, \ldots, u_k = u \rangle$ und $\Delta = \{u_i \in p, u_i \in M, \widehat{g}(u_i) = g(u_i)\}$.

$\Delta \neq \emptyset$, denn $s \in \Delta$.

Sei $m = \max\{i : u_i \in \Delta\}$, $u^* = u_m$. Dann $u^* \neq u$, da $u \notin M$. Sei $u' = u_{m+1}$.

1. $\widehat{g}(u') \leq \widehat{g}(u^*) + c(u^*, u')$ (Konstruktion von $\hat{g}$)
2. $\widehat{g}(u^*) = g(u^*)$ (da $u^* \in \Delta$)
3. $g(u') = g(u^*) + c(u^*, u')$ (da p optimal)
4. $\hat{g}(u') \geq g(u')$ (Konstruktion von $\hat{g}$)

Also: $\widehat{g}(u') = g(u')$ und somit auch $u' \in R$. ■

Folgerung

Corollary 27

Wenn $\widehat{h}(u) \leq h(u)$ für alle $u \in V$ und A- Algorithmus hat noch nicht terminiert. Dann existiert für jeden kürzesten Pfad p von s nach t ein Knoten $u' \in p$ mit $\hat{f}(u') \leq \delta(s,t)$.*

Wenn es einen kürzesten Weg p von s nach t gibt, steht also stets ein Knoten in der offenen Menge bereit, der die Gesamtentfernung maximal unterschätzt und der auf dem kürzesten Weg liegt.

Beweis des Corollars

Beweis:
Nach Lemma $\exists u' \in p$ mit $\widehat{g}(u') = g(u')$.
Also:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(u') &= \widehat{g}(u') + \widehat{h}(u') \\ &= g(u') + \widehat{h}(u') \\ &\leq g(u') + h(u') = f(u')\end{aligned}$$

Da p optimal: $f(u') = \delta(s,t)$. ■

Zulässigkeit

Theorem 28

Unter obigen Voraussezungen (Seite 1498) ist der der A-Algorithmus zulässig: wenn es einen kürzesten Weg von s nach t gibt, so terminiert der A*-Algorithmus mit $\hat{g}(t) = \delta(s,t)$*

Beweis: Wenn der Algorithmus terminiert, dann terminiert er in t mit $f(t) = \widehat{g}(t) + 0 = g(t)$. Denn $\widehat{g}$ überschätzt g höchstens und nach obigem Korrolar findet der Algorithmus stets ein Element $v \in R$ mit $f(v) \leq \delta(s,t)$. Der Algorithmus terminiert in endlichen vielen Schritten. Für endliche Graphen ist die maximale Anzahl an Relaxierschritten beschränkt.[47] ■

[47] Für einen δ-Graphen ist die maximale Anzahl an Relaxierschritten bevor R nur noch Knoten mit $\hat{f}(s) > \delta(s,t)$ enthält, auch beschränkt. Das genaue Argument findet sich im Originalartikel Hart, P. E.; Nilsson, N. J.; Raphael, B. (1968). "A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths".

Erneutes Besuchen von Knoten

- Der A*-Algorithmus kann Knoten mehrfach aus der Menge R entnehmen und sie später wieder einfügen.
- Das kann zu suboptimalem Verhalten im Sinne der Laufzeit des Algorithmus führen.
- Wenn $\widehat{h}$ zusätzlich zur Zulässigkeit ($\widehat{h}(v) \leq h(v)$ für alle $v \in V$) auch noch monoton ist, d.h. wenn für alle $(u, u') \in E$:

$$\widehat{h}(u') \leq \widehat{h}(u) + c(u', u)$$

  dann ist der A* Algorithmus äquivalent zum Dijkstra-Algorithmus mit Kantengewichten $\tilde{c}(u, v) = c(u, v) + \widehat{h}(u) - \widehat{h}(v)$ und kein Knoten wird aus R entnommen und wieder eingefügt.
- Es ist allerdings nicht immer möglich, eine monotone Heuristik zu finden.