22. Dynamic Programming III

FPTAS [Ottman/Widmayer, Kap. 7.2, 7.3, Cormen et al, Kap. 15,35.5], Optimale Suchbäume [Ottman/Widmayer, Kap. 5.7]

Approximation

Sei ein $\varepsilon \in (0, 1)$ gegeben. Sei I_{opt} eine bestmögliche Auswahl.
Suchen eine gültige Auswahl I mit

$$\sum_{i \in I} v_i \geq (1 - \varepsilon) \sum_{i \in I_{\text{opt}}} v_i.$$

Summe der Gewichte darf W natürlich in keinem Fall überschreiten.

Andere Formulierung des Algorithmus

Bisher: Gewichtsschranke $w \rightarrow$ maximaler Nutzen v
Umkehrung Nutzen $v \rightarrow$ minimales Gewicht w

$\Rightarrow$ **Alternative Tabelle:** $g[i, v]$ gibt das minimale Gewicht an, welches

- eine Auswahl der ersten i Gegenstände ($0 \leq i \leq n$) hat, die
- einen Nutzen von genau v aufweist ($0 \leq v \leq \sum_{i=1}^{n} v_i$).

Berechnung

Initial

- $g[0,0] \leftarrow 0$
- $g[0,v] \leftarrow \infty$ (Nutzen v kann mit 0 Gegenständen nie erreicht werden.).

Berechnung

$$g[i,v] \leftarrow \begin{cases} g[i-1,v] & \text{falls } v < v_i \\ \min\{g[i-1,v], g[i-1,v-v_i]+w_i\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

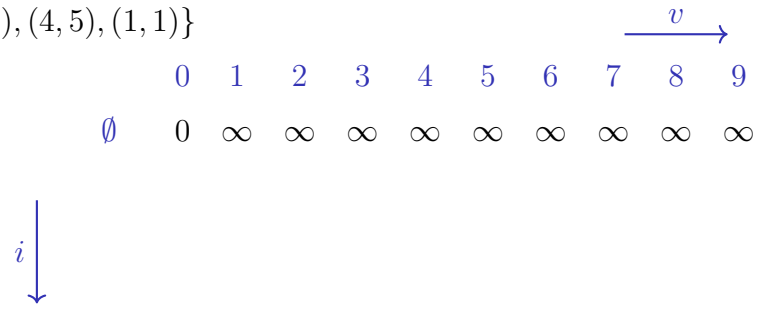
aufsteigend nach i und für festes i aufsteigend nach v.
Lösung ist der grösste Index v mit $g[n,v] \leq w$.

Beispiel

$E = \{(2,3),(4,5),(1,1)\}$

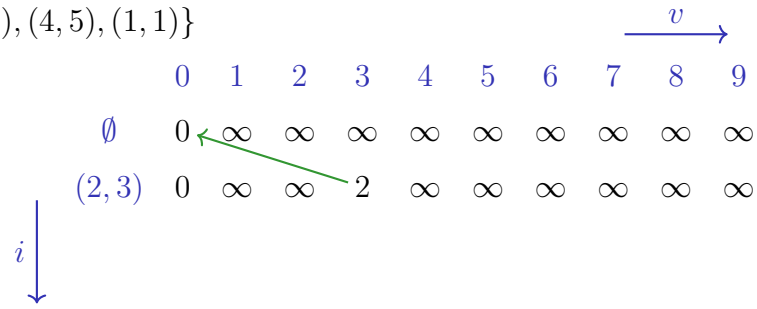
Beispiel

$E = \{(2,3),(4,5),(1,1)\}$



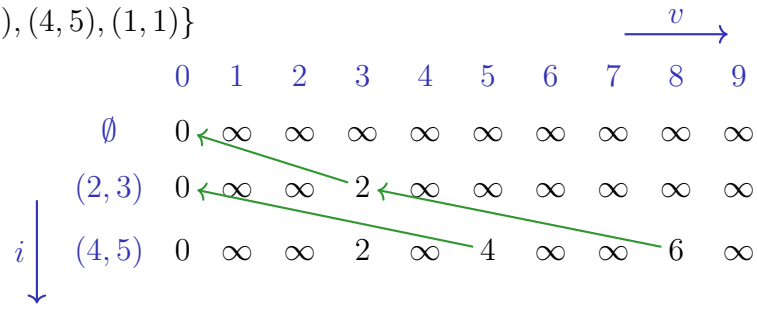
Beispiel

$E = \{(2,3), (4,5), (1,1)\}$



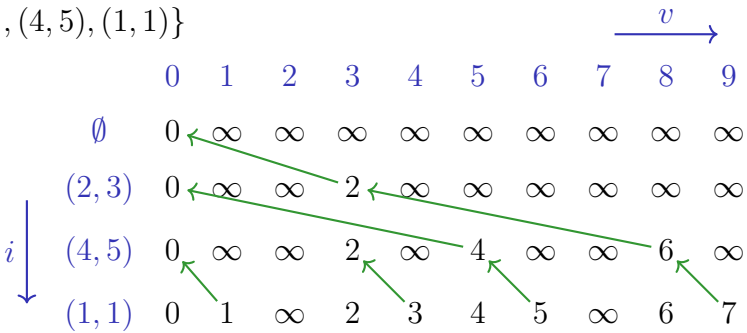
Beispiel

$E = \{(2,3),(4,5),(1,1)\}$



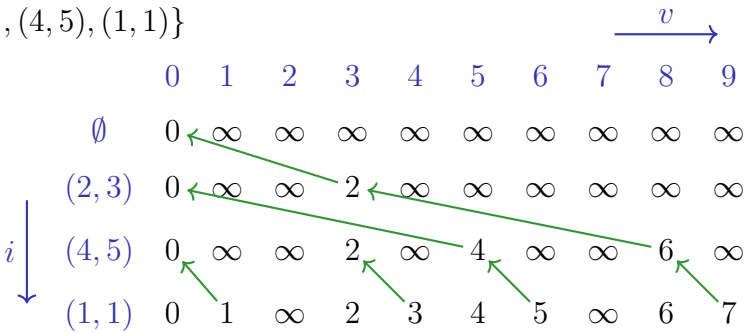
Beispiel

$E = \{(2,3),(4,5),(1,1)\}$



Beispiel

$E = \{(2,3),(4,5),(1,1)\}$



Auslesen der Lösung: wenn $g[i,v] = g[i-1,v]$ dann Gegenstand i nicht benutzt und bei $g[i-1,v]$ weiterfahren, andernfalls benutzt und bei $g[i-1,b-v_i]$ weiterfahren.

Der Approximationstrick

Pseudopolynomielle Laufzeit wird polynomiell, wenn vorkommenden Werte in Polynom der Eingabelänge beschränkt werden können.

Sei $K > 0$ *geeignet* gewählt. Ersetze die Nutzwerte v_i durch "gerundete Werte" $\tilde{v_i} = \lfloor v_i / K \rfloor$ und erhalte eine neue Eingabe $E' = (w_i, \tilde{v_i})_{i=1\ldots n}$.

Wenden nun den Algorithmus auf Eingabe E' mit derselben Gewichtsschranke W an.

Idee

Beispiel $K = 5$
Eingabe Nutzwerte

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots, 98, 99, 100$$
$$\rightarrow$$
$$0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, \ldots, 19, 19, 20$$

Offensichtlich weniger unterschiedliche Nutzwerte

Eigenschaften des neuen Algorithmus

- Auswahl von Gegenständen aus E' ist genauso gültig wie die aus E. Gewicht unverändert!
- Laufzeit des Algorithmus ist beschränkt durch $\mathcal{O}(n^2 \cdot v_{\max}/K)$ ($v_{\max} := \max\{v_i | 1 \leq i \leq n\}$)

Wie gut ist die Approximation?

Es gilt

$$v_i - K \leq K \cdot \left\lfloor \frac{v_i}{K} \right\rfloor = K \cdot \tilde{v}_i \leq v_i$$

Sei I'_{opt} eine optimale Lösung von E'. Damit

$$\left(\sum_{i \in I_{\text{opt}}} v_i \right) - n \cdot K \overset{|I_{\text{opt}}| \leq n}{\leq} \sum_{i \in I_{\text{opt}}} (v_i - K) \leq \sum_{i \in I_{\text{opt}}} (K \cdot \tilde{v}_i) = K \sum_{i \in I_{\text{opt}}} \tilde{v}_i$$

$$\underset{I'_{\text{opt}} \text{optimal}}{\leq} K \sum_{i \in I'_{\text{opt}}} \tilde{v}_i = \sum_{i \in I'_{\text{opt}}} K \cdot \tilde{v}_i \leq \sum_{i \in I'_{\text{opt}}} v_i.$$

Wahl von K

Forderung:

$$\sum_{i \in I'} v_i \geq (1 - \varepsilon) \sum_{i \in I_{\text{opt}}} v_i.$$

Ungleichung von oben:

$$\sum_{i \in I'_{\text{opt}}} v_i \geq \left(\sum_{i \in I_{\text{opt}}} v_i \right) - n \cdot K$$

Also: $K = \varepsilon \frac{\sum_{i \in I_{\text{opt}}} v_i}{n}$.

Wahl von K

Wähle $K = \varepsilon \frac{\sum_{i \in I_{\text{opt}}} v_i}{n}$. Die optimale Summe ist aber unbekannt, daher wählen wir $K' = \varepsilon \frac{v_{\max}}{n}$.[40]

Es gilt $v_{\max} \leq \sum_{i \in I_{\text{opt}}} v_i$ und somit $K' \leq K$ und die Approximation ist sogar etwas besser.

Die Laufzeit des Algorithmus ist beschränkt durch

$$\mathcal{O}(n^2 \cdot v_{\max}/K') = \mathcal{O}(n^2 \cdot v_{\max}/(\varepsilon \cdot v_{\max}/n)) = \mathcal{O}(n^3/\varepsilon).$$

[40] Wir können annehmen, dass vorgängig alle Gegenstände i mit $w_i > W$ entfernt wurden.

FPTAS

Solche Familie von Algorithmen nennt man **Approximationsschema**: die Wahl von ε steuert Laufzeit und Approximationsgüte.

Die Laufzeit $\mathcal{O}(n^3/\varepsilon)$ ist ein Polynom in n und in $\frac{1}{\varepsilon}$. Daher nennt man das Verfahren auch ein voll polynomielles Approximationsschema **FPTAS - Fully Polynomial Time Approximation Scheme**

22.2 Optimale Suchbäume

Optimale binäre Suchbäume

Gegeben: Suchwahrscheinlichkeiten p_i zu jedem Schlüssel k_i $(i = 1, \ldots, n)$ und q_i zu jedem Intervall d_i $(i = 0, \ldots, n)$ zwischen Suchschlüsseln eines binären Suchbaumes. $\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=0}^{n} q_i = 1$.

Optimale binäre Suchbäume

Gegeben: Suchwahrscheinlichkeiten p_i zu jedem Schlüssel k_i $(i = 1, \ldots, n)$ und q_i zu jedem Intervall d_i $(i = 0, \ldots, n)$ zwischen Suchschlüsseln eines binären Suchbaumes. $\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=0}^{n} q_i = 1$.

Gesucht: Optimaler Suchbaum T mit Schlüsseltiefen $\mathrm{depth}(\cdot)$, welcher die erwarteten Suchkosten

$$\begin{aligned} C(T) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (\mathrm{depth}(k_i) + 1) + \sum_{i=0}^{n} q_i \cdot (\mathrm{depth}(d_i) + 1) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \mathrm{depth}(k_i) + \sum_{i=0}^{n} q_i \cdot \mathrm{depth}(d_i) \end{aligned}$$

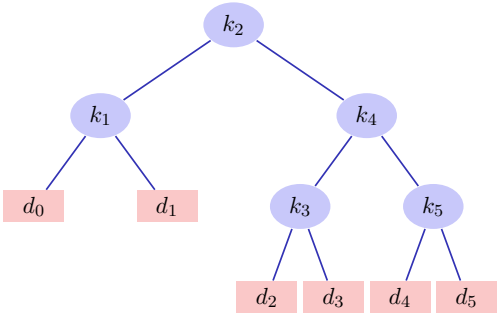
minimiert.

Beispiel

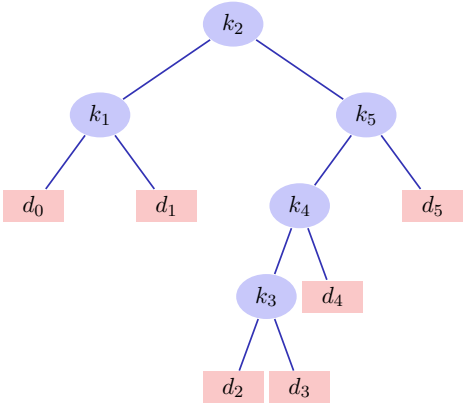
Erwartete Häufigkeiten

i	0	1	2	3	4	5
p_i		0.15	0.10	0.05	0.10	0.20
q_i	0.05	0.10	0.05	0.05	0.05	0.10

Beispiel



Suchbaum mit erwarteten Kosten 2.8



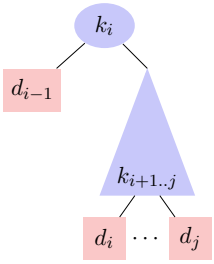
Suchbaum mit erwarteten Kosten 2.75

Struktur eines optimalen Suchbaumes

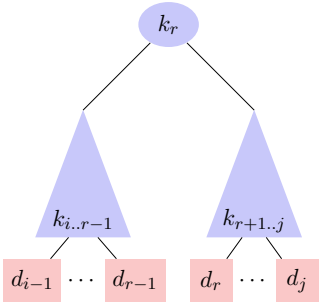
- Teilsuchbaum mit Schlüsseln $k_i, \ldots, k_j$ und Intervallschlüsseln $d_{i-1}, \ldots, d_j$ muss für das entsprechende Teilproblem optimal sein.[41]
- Betrachten aller Teilsuchbäume mit Wurzel k_r, $i \leq r \leq j$ und optimalen Teilbäumen $k_i, \ldots, k_{r-1}$ und $k_{r+1}, \ldots, k_j$

[41] Das übliche Argument: wäre er nicht optimal, könnte er durch eine bessere Lösung ersetzt werden, welche die Gesamtlösung verbessert.

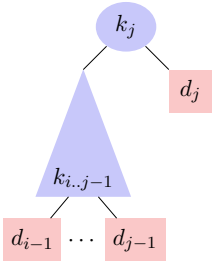
Teilsuchbäume



leerer linker Teilsuchbaum



Teilsuchbäume links und rechts nichtleer



leerer rechter Teilsuchbaum

Erwartete Suchkosten

Sei $\text{depth}_T(k)$ die Tiefe des Knotens im Teilbaum T. Sei k_r die Wurzel eines Teilbaumes T_r und T_{L_r} und T_{R_r} der linke und rechte Teilbaum von T_r. Dann

$$\text{depth}_T(k_i) = \text{depth}_{T_{L_r}}(k_i) + 1,\ (i < r)$$
$$\text{depth}_T(k_i) = \text{depth}_{T_{R_r}}(k_i) + 1,\ (i > r)$$

Erwartete Suchkosten

Seien $e[i, j]$ die Kosten eines optimalen Suchbaumes mit Knoten $k_i, \ldots, k_j$.
Basisfall: $e[i, i-1]$, erwartete Suchkosten d_{i-1}
Sei $w(i, j) = \sum_{l=i}^{j} p_l + \sum_{l=i-1}^{j} q_l$.
Wenn k_r die Wurzel eines optimalen Teilbaumes mit Schlüsseln $k_i, \ldots, k_j$, dann

$$e[i, j] = p_r + (e[i, r-1] + w(i, r-1)) + (e[r+1, j] + w(r+1, j))$$

mit $w(i, j) = w(i, r-1) + p_r + w(r+1, j)$:

$$e[i, j] = e[i, r-1] + e[r+1, j] + w(i, j).$$

Dynamic Programming

$$e[i,j] = \begin{cases} q_{i-1} & \text{falls } j = i-1, \\ \min_{i \le r \le j}\{e[i,r-1] + e[r+1,j] + w[i,j]\} & \text{falls } i \le j \end{cases}$$

Berechnung

Tabellen $e[1 \ldots n+1, 0 \ldots n], w[1 \ldots n+1, 0 \ldots m], r[1 \ldots n, 1 \ldots n]$ Initial

- $e[i, i-1] \leftarrow q_{i-1}$, $w[i, i-1] \leftarrow q_{i-1}$ für alle $1 \leq i \leq n+1$.

Berechnung

$$
\begin{aligned}
w[i,j] &= w[i,j-1] + p_j + q_j \\
e[i,j] &= \min_{i \leq r \leq j} \{e[i,r-1] + e[r+1,j] + w[i,j]\} \\
r[i,j] &= \arg\min_{i \leq r \leq j} \{e[i,r-1] + e[r+1,j] + w[i,j]\}
\end{aligned}
$$

für Intervalle $[i,j]$ mit ansteigenden Längen $l = 1, \ldots, n$, jeweils für $i = 1, \ldots, n-l+1$. Resultat steht in $e[1,n]$, Rekonstruktion via r. Laufzeit $\Theta(n^3)$.

Beispiel

i	0	1	2	3	4	5
p_i		0.15	0.10	0.05	0.10	0.20
q_i	0.05	0.10	0.05	0.05	0.05	0.10

w

j \ i	1	2	3	4	5	6
0	0.05					
1	0.30	0.10				
2	0.45	0.25	0.05			
3	0.55	0.35	0.15	0.05		
4	0.70	0.50	0.30	0.20	0.05	
5	1.00	0.80	0.60	0.50	0.35	0.10

e

j \ i	1	2	3	4	5	6
0	0.05					
1	0.45	0.10				
2	0.90	0.40	0.05			
3	1.25	0.70	0.25	0.05		
4	1.75	1.20	0.60	0.30	0.05	
5	2.75	2.00	1.30	0.90	0.50	0.10

r

j \ i	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	2			
3	2	2	3		
4	2	2	4	4	
5	2	4	5	5	5