

20. Dynamische Programmierung I

Memoisieren, Optimale Substruktur, Überlappende Teilprobleme, Abhängigkeiten, Allgemeines Vorgehen. Beispiele: Fibonacci, Schneiden von Eisenstangen, Längste aufsteigende Teilfolge, längste gemeinsame Teilfolge, Editierdistanz, Matrixkettenmultiplikation, Matrixmultiplikation nach Strassen

[Ottman/Widmayer, Kap. 1.2.3, 7.1, 7.4, Cormen et al, Kap. 15]

Fibonacci Zahlen



(schon wieder)

$$F_n := \begin{cases} n & \text{wenn } n < 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{wenn } n \geq 2. \end{cases}$$

Analyse: warum ist der rekursive Algorithmus so langsam.

Algorithmus FibonacciRecursive(n)

Input: $n \geq 0$

Output: n -te Fibonacci Zahl

if $n < 2$ **then**

 | $f \leftarrow n$

else

 | $f \leftarrow \text{FibonacciRecursive}(n - 1) + \text{FibonacciRecursive}(n - 2)$

return f

Analyse

$T(n)$: Anzahl der ausgeführten Operationen.

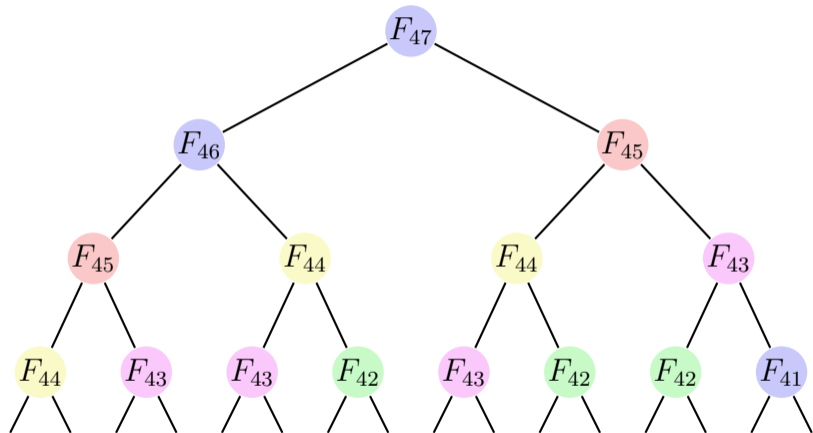
■ $n = 0, 1: T(n) = \Theta(1)$

■ $n \geq 2: T(n) = T(n - 2) + T(n - 1) + c.$

$$T(n) = T(n - 2) + T(n - 1) + c \geq 2T(n - 2) + c \geq 2^{n/2}c' = (\sqrt{2})^n c'$$

Algorithmus ist **exponentiell (!)** in n .

Grund, visualisiert



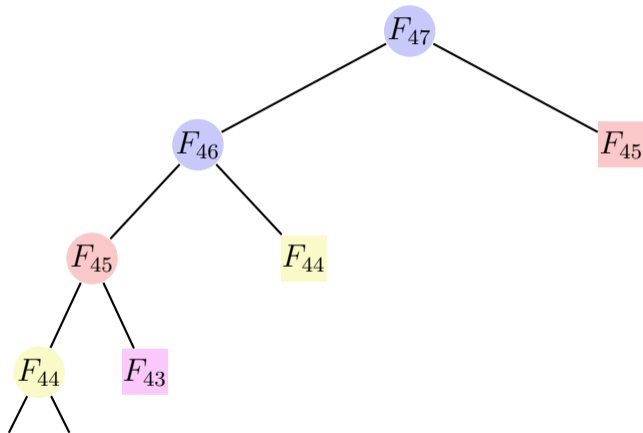
Knoten mit denselben Werten werden (zu) oft ausgewertet.

Memoization

Memoization (sic) Abspeichern von Zwischenergebnissen.

- Bevor ein Teilproblem gelöst wird, wird Existenz eines entsprechenden Zwischenergebnis geprüft.
- Existiert ein gespeichertes Zwischenergebnis bereits, so wird dieses verwendet.
- Andernfalls wird der Algorithmus ausgeführt und das Ergebnis wird entsprechend gespeichert.

Memoization bei Fibonacci



Rechteckige Knoten wurden bereits ausgewertet.

Algorithmus FibonacciMemoization(n)

Input: $n \geq 0$

Output: n -te Fibonacci Zahl

if $n \leq 2$ **then**

| $f \leftarrow 1$

else if $\exists \text{memo}[n]$ **then**

| $f \leftarrow \text{memo}[n]$

else

| $f \leftarrow \text{FibonacciMemoization}(n - 1) + \text{FibonacciMemoization}(n - 2)$

| $\text{memo}[n] \leftarrow f$

return f

Analyse

Berechnungsaufwand:

$$T(n) = T(n - 1) + c = \dots = \mathcal{O}(n).$$

denn nach dem Aufruf von $f(n - 1)$ wurde $f(n - 2)$ bereits berechnet. Das lässt sich auch so sehen: Für jedes n wird $f(n)$ maximal einmal rekursiv berechnet. Laufzeitkosten: n Aufrufe mal $\Theta(1)$ Kosten pro Aufruf $n \cdot c \in \Theta(n)$. Die Rekursion verschwindet aus der Berechnung der Laufzeit. Algorithmus benötigt $\Theta(n)$ Speicher.³⁵

³⁵Allerdings benötigt der naive Algorithmus auch $\Theta(n)$ Speicher für die Rekursionsverwaltung.

Genauer hingesehen ...

... berechnet der Algorithmus der Reihe nach die Werte F_1, F_2, F_3, \dots
verkleidet im **Top-Down** Ansatz der Rekursion.

Man kann den Algorithmus auch gleich **Bottom-Up** hinschreiben. Das ist
charakteristisch für die **dynamische Programmierung**.

Algorithmus FibonacciBottomUp(n)

Input: $n \geq 0$

Output: n -te Fibonacci Zahl

$F[1] \leftarrow 1$

$F[2] \leftarrow 1$

for $i \leftarrow 3, \dots, n$ **do**

$F[i] \leftarrow F[i - 1] + F[i - 2]$

return $F[n]$

Dynamische Programmierung: Idee

- Aufteilen eines komplexen Problems in eine vernünftige Anzahl kleinerer Teilprobleme
- Die Lösung der Teilprobleme wird zur Lösung des komplexeren Problems verwendet
- Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

Dynamische Programmierung: Konsequenz

Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet
⇒ Resultate werden zwischengespeichert

Arbeitsspeicher



192.-

HyperX Fury (2x, 8GB,
DDR4-2400, DIMM 288)

★★★★★ 16

Wir tauschen Laufzeit
gegen Speicherplatz

Dynamic Programming: Beschreibung

1. Verwalte **DP-Tabelle** mit Information zu den Teilproblemen.
Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?
2. Berechnung der **Randfälle**.
Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?
3. **Berechnungsreihenfolge** bestimmen.
In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?
4. Auslesen der **Lösung**.
Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

Laufzeit (typisch) = Anzahl Einträge der Tabelle mal Aufwand pro Eintrag.

Dynamic Programming: Beschreibung am Beispiel

1. Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?
Tabelle der Grösse $n \times 1$. n -ter Eintrag enthält n -te Fibonacci Zahl.
2. Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?
Werte F_1 und F_2 sind unabhängig einfach "berechenbar".
3. Berechnungsreihenfolge?
 F_i mit aufsteigenden i .
4. Rekonstruktion einer Lösung?
 F_n ist die n -te Fibonacci-Zahl.

Dynamic Programming = Divide-And-Conquer ?

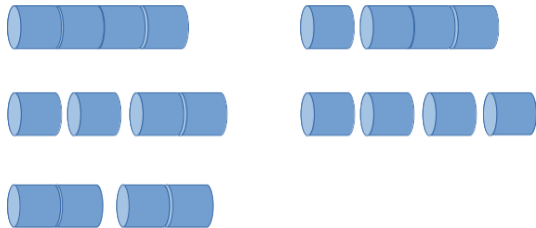
- In beiden Fällen ist das Ursprungsproblem (einfacher) lösbar, indem Lösungen von Teilproblemen herangezogen werden können. Das Problem hat **optimale Substruktur**.
- Bei Divide-And-Conquer Algorithmen (z.B. Mergesort) sind Teilprobleme unabhängig; deren Lösungen werden im Algorithmus nur einmal benötigt.
- Beim DP sind Teilprobleme nicht unabhängig. Das Problem hat **überlappende Teilprobleme**, welche im Algorithmus mehrfach gebraucht werden.
- Damit sie nur einmal gerechnet werden müssen, werden Resultate tabelliert. Dafür darf es **zwischen Teilproblemen keine zirkulären Abhängigkeiten** geben.

Schneiden von Eisenstäben

- Metallstäbe werden zerschnitten und verkauft.
- Metallstäbe der Länge $n \in \mathbb{N}$ verfügbar. Zerschneiden kostet nichts.
- Für jede Länge $l \in \mathbb{N}$, $l \leq n$ bekannt: Wert $v_l \in \mathbb{R}^+$
- Ziel: Zerschneide die Stange so (in $k \in \mathbb{N}$ Stücke), dass

$$\sum_{i=1}^k v_{l_i} \text{ maximal unter } \sum_{i=1}^k l_i = n.$$

Schneiden von Eisenstäben: Beispiel



Arten, einen Stab der Länge 4 zu zerschneiden (ohne Permutationen)

Länge	0	1	2	3	4
Preis	0	2	3	8	9

⇒ Bester Schnitt: 3 + 1 mit Wert 10.

Wie findet man den DP Algorithmus

0. Genaue Formulierung der gesuchten Lösung
1. Definiere Teilprobleme (und bestimme deren Anzahl)
2. Raten / Aufzählen (und bestimme die Laufzeit für das Raten)
3. Rekursion: verbinde die Teilprobleme
4. Memoisieren / Tabellieren. Bestimme die Abhängigkeiten der Teilprobleme
5. Lösung des Problems
Laufzeit = #Teilprobleme \times Zeit/Teilproblem

Struktur des Problems

0. **Gesucht:** r_n = maximal erreichbarer Wert von (ganzem oder geschnittenem) Stab mit Länge n .
1. **Teilprobleme:** maximal erreichbarer Wert r_k für alle $0 \leq k < n$
2. **Rate** Länge des ersten Stückes
3. **Rekursion**

$$r_k = \max\{v_i + r_{k-i} : 0 < i \leq k\}, \quad k > 0$$
$$r_0 = 0$$

4. **Abhängigkeit:** r_k hängt (nur) ab von den Werten $v_i, l \leq i \leq k$ und den optimalen Schnitten $r_i, i < k$
5. **Lösung** in r_n

Algorithmus RodCut(v, n)

Input: $n \geq 0$, Preise v

Output: bester Wert

$q \leftarrow 0$

if $n > 0$ **then**

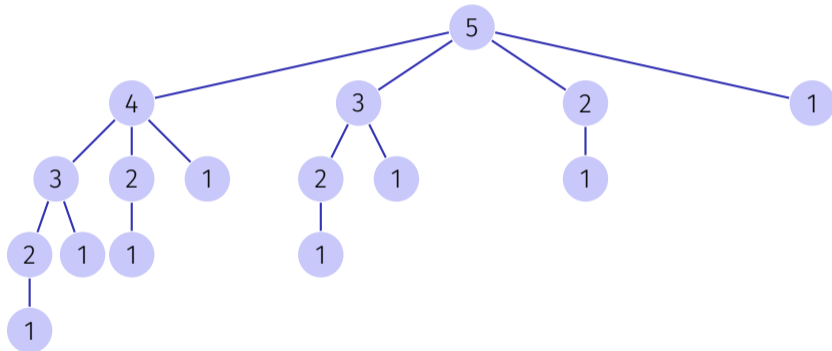
for $i \leftarrow 1, \dots, n$ **do**
 $q \leftarrow \max\{q, v_i + \text{RodCut}(v, n - i)\};$

return q

Laufzeit $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + c \Rightarrow^{36} T(n) \in \Theta(2^n)$

³⁶ $T(n) = T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + c = T(n-1) + (T(n-1) - c) + c = 2T(n-1) \quad (n > 0)$

Rekursionsbaum



Algorithmus RodCutMemoized(m, v, n)

Input: $n \geq 0$, Preise v , Memoization Tabelle m

Output: bester Wert

$q \leftarrow 0$

if $n > 0$ **then**

if $\exists m[n]$ **then**

$q \leftarrow m[n]$

else

for $i \leftarrow 1, \dots, n$ **do**

$q \leftarrow \max\{q, v_i + \text{RodCutMemoized}(m, v, n - i)\};$

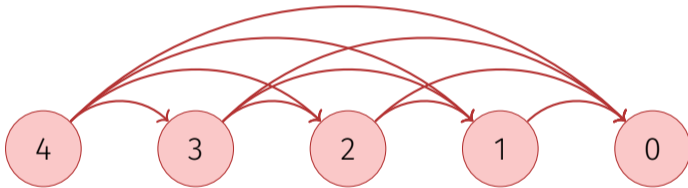
$m[n] \leftarrow q$

return q

Laufzeit $\sum_{i=1}^n i = \Theta(n^2)$

Teilproblem-Graph

beschreibt die Abhängigkeiten der Teilprobleme untereinander



und darf keine Zyklen enthalten

Konstruktion des optimalen Schnittes

- Während der (rekursiven) Berechnung der optimalen Lösung für jedes $k \leq n$ bestimmt der rekursive Algorithmus die optimale Länge des ersten Stabes
- Speichere die Länge des ersten Stabes für jedes $k \leq n$ in einer Tabelle mit n Einträgen.

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Tabelle der Grösse $n \times 1$. n -ter Eintrag enthält besten Wert eines Stabes der Länge n .

Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?

2. Wert r_0 ist 0.

Berechnungsreihenfolge?

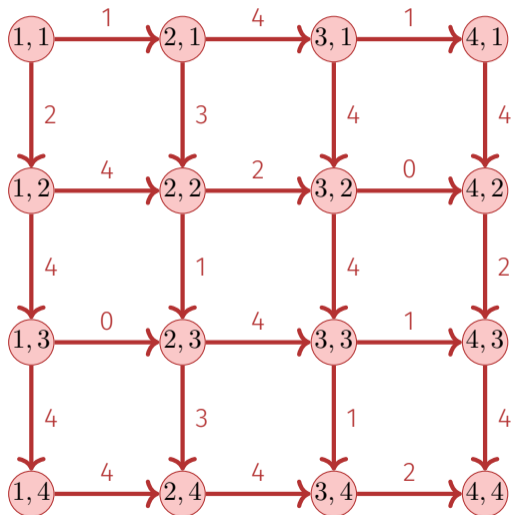
3. $r_i, i = 1, \dots, n$.

Rekonstruktion einer Lösung?

4. r_n ist der beste Wert für eine Stange der Länge n

Kaninchen!

Ein Kaninchen sitzt auf Platz $(1, 1)$ eines $n \times n$ Gitters. Es kann nur nach Osten oder nach Süden gehen. Auf jedem Wegstück liegt eine Anzahl Rüben. Wie viele Rüben sammelt das Kaninchen maximal ein?



Kaninchen!

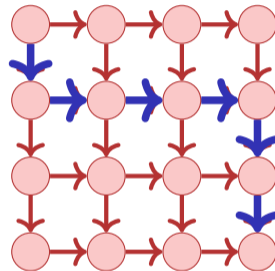
Anzahl mögliche Pfade?

- Auswahl von $n - 1$ Wegen nach Süden aus $2n - 2$ Wegen insgesamt.



$$\binom{2n - 2}{n - 1} \in \Omega(2^n)$$

⇒ Naiver Algorithmus hat keine Chance



Der Weg 100011
(1:nach Süden, 0:nach Osten)

Rekursion

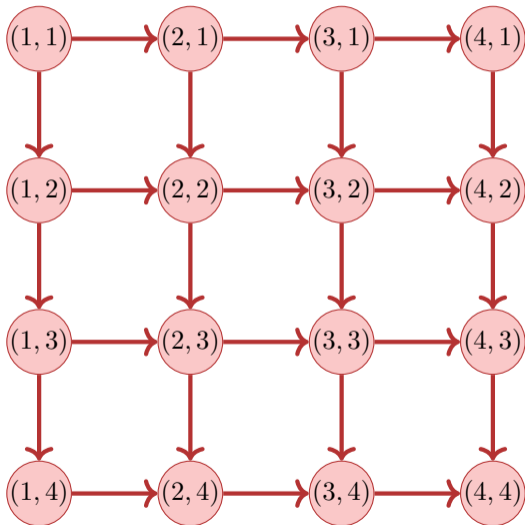
Gesucht: $T_{0,0}$ = **Maximale Anzahl Rüben von** $(0, 0)$ **nach** (n, n) .

Sei $w_{(i,j)-(i',j')}$ Anzahl Rüben auf Kante von (i, j) nach (i', j') .

Rekursion (maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n))

$$T_{ij} = \begin{cases} \max\{w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}\}, & i < n, j < n \\ w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, & i = n, j < n \\ w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}, & i < n, j = n \\ 0 & i = j = n \end{cases}$$

Teilproblemabhängigkeitsgraph



Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Tabelle T der Grösse $n \times n$. Eintrag bei i, j enthält die maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n) .

Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?

2. Wert $T_{n,n}$ ist 0.

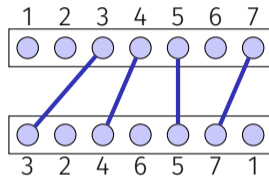
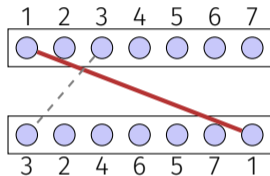
Berechnungsreihenfolge?

3. $T_{i,j}$ mit $i = n \searrow 1$ und für jedes $i: j = n \searrow 1$, (oder umgekehrt: $j = n \searrow 1$ und für jedes $j: i = n \searrow 1$).

Rekonstruktion einer Lösung?

4. $T_{1,1}$ enthält die maximale Anzahl Rüben

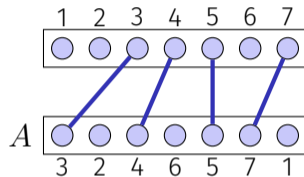
Längste aufsteigende Teilfolge (LAT)



Verbinde so viele passende Anschlüsse wie möglich, ohne dass sich die Anschlüsse kreuzen.

Formalisieren

- Betrachte Folge $A_n = (a_1, \dots, a_n)$.
- Suche eine längste aufsteigende Teilfolge von A_n .
- Beispiele aufsteigender Teilfolgen: $(3, 4, 5)$, $(2, 4, 5, 7)$, $(3, 4, 5, 7)$, $(3, 7)$.



Verallgemeinerung: Lasse Zahlen ausserhalb von $1, \dots, n$ zu, auch mit Mehrfacheinträgen. (Weitehrhin aber nur strikt aufsteigende Teilfolgen)
Beispiel: $(2,3,3,3,5,1)$ mit aufsteigender Teilfolge $(2,3,5)$.

Erster Entwurf

Sei $L_i =$ **längste Teilfolge von A_i , ($1 \leq i \leq n$)**.

Annahme: LAT L_k von A_k für bekannt. Wollen nun LAT L_{k+1} für A_{k+1} berechnen.

Wenn a_{k+1} zu L_k passt, dann $L_{k+1} = L_k \oplus a_{k+1}$?

Gegenbeispiel: $A_5 = (1, 2, 5, 3, 4)$. Sei $A_3 = (1, 2, 5)$ mit $L_3 = A_3$ und $L_4 = A_3$.
Bestimme L_5 aus L_4 ?

So kommen wir nicht weiter: können nicht von L_k auf L_{k+1} schliessen.

Zweiter Entwurf

Sei $L_i =$ **längste Teilfolge von** A_i , ($1 \leq i \leq n$).

Annahme: eine LAT L_j für alle $j \leq k$ bekannt. Wollen nun LAT L_{k+1} für $k + 1$ berechnen.

Betrachte alle passenden $L_{k+1} = L_j \oplus a_{k+1}$ ($j \leq k$) und wähle eine längste solche Folge.

Gegenbeispiel: $A_5 = (1, 2, 5, 3, 4)$. Sei $A_4 = (1, 2, 5, 3)$ mit $L_1 = (1)$, $L_2 = (1, 2)$, $L_3 = (1, 2, 5)$, $L_4 = (1, 2, 5)$. Bestimme L_5 aus L_1, \dots, L_4 ?

So kommen wir nicht weiter: können nicht von **jeweils nur einer beliebigen Lösung** L_j auf L_{k+1} schliessen. Wir müssten alle möglichen LAT betrachten. Zu viel!

Dritter Entwurf

Sei $M_{n,i}$ = **längste Teilfolge von A_n der Länge i** ($1 \leq i \leq n$)

Annahme: die LAT $M_{k,j}$ für A_k , **welche mit kleinstem Element enden** seien für alle Längen $1 \leq j \leq k$ bekannt.

Betrachte nun alle passenden $M_{k,j} \oplus a_{k+1}$ ($j \leq k$) und aktualisiere die Tabelle der längsten aufsteigenden Folgen, welche mit kleinstem Element enden.

Dritter Entwurf Beispiel

Beispiel: $A = (1, 1000, 1001, 4, 5, 2, 6, 7)$

A	LAT $M_{k,\cdot}$
1	(1)
+ 1000	(1), (1, 1000)
+ 1001	(1), (1, 1000), (1, 1000, 1001)
+ 4	(1), (1, 4), (1, 1000, 1001)
+ 5	(1), (1, 4), (1, 4, 5)
+ 2	(1), (1, 2), (1, 4, 5)
+ 6	(1), (1, 2), (1, 4, 5), (1, 4, 5, 6)
+ 7	(1), (1, 2), (1, 4, 5), (1, 4, 5, 6), (1, 4, 5, 6, 7)

DP Table

- Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge $M_{k,j}$ am Slot j .
- Beispielfolge: 3 2 5 1 6 4
- Problem: **Tabelle** enthält zum Schluss nicht die Folge, nur den letzten Wert.
- Lösung: **Zweite Tabelle** mit den Vorgängern.

Index	1	2	3	4	5	6
Wert	3	2	5	1	6	4
Vorgänger	$-\infty$	$-\infty$	2	$-\infty$	5	1

Index	0	1	2	3	4	...
$(L_j)_j$	$-\infty$	1	4	6	∞	

Dynamic Programming Algorithmus LAT

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Zwei Tabellen $T[0, \dots, n]$ und $V[1, \dots, n]$.
 $T[j]$: letztes Element der aufsteigenden Folge $M_{n,j}$
 $V[j]$: Wert des Vorgängers von a_j .
Zu Beginn $T[0] \leftarrow -\infty, T[i] \leftarrow \infty \forall i > 1$

Berechnung eines Eintrags

2. Einträge in T aufsteigend sortiert. Für jeden Neueintrag a_k binäre Suche nach l , so dass $T[l] < a_k < T[l + 1]$. Setze $T[l + 1] \leftarrow a_k$. Setze $V[k] = T[l]$.

Dynamic Programming Algorithmus LAT

Berechnungsreihenfolge

3. Beim Traversieren der Liste werden die Einträge $T[k]$ und $V[k]$ mit aufsteigendem k berechnet.

Rekonstruktion einer Lösung?

4. Suche das grösste l mit $T[l] < \infty$. l ist der letzte Index der LAT. Suche von l ausgehend den Index $i < l$, so dass $V[l] = a_i$, i ist der Vorgänger von l . Repetiere mit $l \leftarrow i$ bis $T[l] = -\infty$

Analyse

■ Berechnung Tabelle:

- Initialisierung: $\Theta(n)$ Operationen
- Berechnung k -ter Eintrag: Binäre Suche auf Positionen $\{1, \dots, k\}$ plus konstante Anzahl Zuweisungen.

$$\sum_{k=1}^n (\log k + \mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(n) + \sum_{k=1}^n \log(k) = \Theta(n \log n).$$

- **Rekonstruktion:** Traversiere A von rechts nach links: $\mathcal{O}(n)$.

Somit Gesamtlaufzeit

$$\Theta(n \log n).$$

Minimale Editierdistanz

Editierdistanz von zwei Zeichenketten $A_n = (a_1, \dots, a_n)$, $B_m = (b_1, \dots, b_m)$.

Editieroperationen:

- Einfügen eines Zeichens
- Löschen eines Zeichens
- Änderung eines Zeichens

Frage: Wie viele Editieroperationen sind mindestens nötig, um eine gegebene Zeichenkette A in eine Zeichenkette B zu überführen.

TIGER ZIGER ZIEGER ZIEGE

Minimale Editierdistanz

Gesucht: Günstigste zeichenweise Transformation $A_n \rightarrow B_m$ mit Kosten

Operation	Levenshtein	LGT ³⁷	allgemein
c einfügen	1	1	ins(c)
c löschen	1	1	del(c)
Ersetzen $c \rightarrow c'$	$\mathbb{1}(c \neq c')$	$\infty \cdot \mathbb{1}(c \neq c')$	repl(c, c')

Beispiel

T	I	G	E	R	T	I	_	G	E	R	T \rightarrow Z	+E	-R
Z	I	E	G	E	Z	I	E	G	E	_	Z \rightarrow T	-E	+R

³⁷Längste gemeinsame Teilfolge – Spezialfall des Editierproblems

DP

0. $E(n, m)$ = minimale Anzahl Editieroperationen (ED Kosten) für
 $a_{1..n} \rightarrow b_{1..m}$

1. Teilprobleme $E(i, j)$ = ED von $a_{1..i}$ $b_{1..j}$.

#TP = $n \cdot m$

2. Raten/Probieren

Kosten $\Theta(1)$

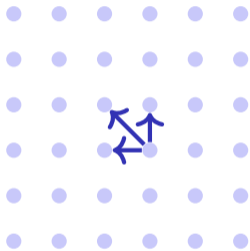
- $a_{1..i} \rightarrow a_{1..i-1}$ (löschen)
- $a_{1..i} \rightarrow a_{1..i}b_j$ (einfügen)
- $a_{1..i} \rightarrow a_{1..i-1}b_j$ (ersetzen)

3. Rekursion

$$E(i, j) = \min \begin{cases} \text{del}(a_i) + E(i - 1, j), \\ \text{ins}(b_j) + E(i, j - 1), \\ \text{repl}(a_i, b_j) + E(i - 1, j - 1) \end{cases}$$

DP

4. Abhängigkeiten



⇒ Berechnung von links oben nach rechts unten. Zeilen- oder Spaltenweise.

5. Lösung steht in $E(n, m)$

Beispiel (Levenshteinabstand)

$$E[i, j] \leftarrow \min \{ E[i-1, j] + 1, E[i, j-1] + 1, E[i-1, j-1] + \mathbb{1}(a_i \neq b_j) \}$$

	\emptyset	Z	I	E	G	E
\emptyset	0	1	2	3	4	5
T	1	1	2	3	4	5
I	2	2	1	2	3	4
G	3	3	2	2	1	2
E	4	4	3	2	2	1
R	5	5	4	3	3	3

Editierschritte: von rechts unten nach links oben, der Rekursion folgend.
Bottom-Up Beschreibung des Algorithmus: Übung

Bottom-Up DP Algorithmus ED

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Tabelle $E[0, \dots, m][0, \dots, n]$. $E[i, j]$: Minimaler Editierabstand der Zeichenketten (a_1, \dots, a_i) und (b_1, \dots, b_j)

Berechnung eines Eintrags

2. $E[0, i] \leftarrow i \forall 0 \leq i \leq m$, $E[j, 0] \leftarrow j \forall 0 \leq j \leq n$. Berechnung von $E[i, j]$ sonst mit $E[i, j] = \min\{\text{del}(a_i) + E(i-1, j), \text{ins}(b_j) + E(i, j-1), \text{repl}(a_i, b_j) + E(i-1, j-1)\}$

Bottom-Up DP Algorithmus ED

Berechnungsreihenfolge

3. Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.

Rekonstruktion einer Lösung?

4. Beginne bei $j = m, i = n$. Falls $E[i, j] = \text{repl}(a_i, b_j) + E(i - 1, j - 1)$ gilt, gib $a_i \rightarrow b_j$ aus und fahre fort mit $(j, i) \leftarrow (j - 1, i - 1)$; sonst, falls $E[i, j] = \text{del}(a_i) + E(i - 1, j)$ gib $\text{del}(a_i)$ aus fahre fort mit $j \leftarrow j - 1$; sonst, falls $E[i, j] = \text{ins}(b_j) + E(i, j - 1)$, gib $\text{ins}(b_j)$ aus und fahre fort mit $i \leftarrow i - 1$. Terminiere für $i = 0$ und $j = 0$.

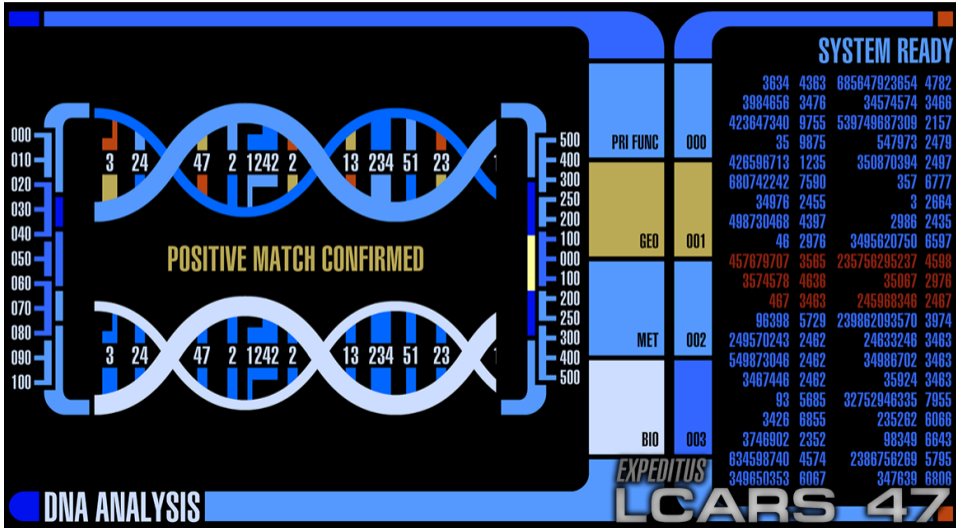
Analyse ED

- Anzahl Tabelleneinträge: $(m + 1) \cdot (n + 1)$.
- Berechnung jeweils mit konstanter Anzahl Zuweisungen und Vergleichen. Anzahl Schritte $\mathcal{O}(mn)$
- Bestimmen der Lösung: jeweils Verringerung von i oder j . Maximal $\mathcal{O}(n + m)$ Schritte.

Laufzeit insgesamt:

$$\mathcal{O}(mn).$$

DNA - Vergleich (Star Trek)



DNA - Vergleich

- DNA besteht aus Sequenzen von vier verschiedenen Nukleotiden **A**denin **G**uanin **T**hymine **C**ytosin
- DNA-Sequenzen (Gene) werden mit Zeichenketten aus A, G, T und C beschrieben.
- Ein möglicher Vergleich zweier Gene: Bestimme **Längste gemeinsame Teilfolge**

Das Problem, die längste gemeinsame Teilfolge zu finden ist ein Spezialfall der minimalen Editierdistanz.

Längste Gemeinsame Teilfolge

Teilfolgen einer Zeichenkette:

Teilfolgen(*KUH*): (), (*K*), (*U*), (*H*), (*KU*), (*KH*), (*UH*), (*KUH*)

Problem:

- **Eingabe:** Zwei Zeichenketten $A = (a_1, \dots, a_m)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ der Längen $m > 0$ und $n > 0$.
- **Gesucht:** Eine längste gemeinsame Teilfolge (LGT) von A und B .

Längste Gemeinsame Teilfolge

Beispiele:

$LGT(IGEL, KATZE) = E$, $LGT(TIGER, ZIEGE) = IGE$

Ideen zur Lösung?

T	I		G	E	R
Z	I	E	G	E	

Rekursives Vorgehen

Annahme: Lösungen $L(i, j)$ bekannt für $A[1, \dots, i]$ und $B[1, \dots, j]$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$, jedoch nicht für $i = m$ und $j = n$.

T I E G E R
Z I E G E

Betrachten Zeichen a_m, b_n . Drei Möglichkeiten:

1. A wird um ein Leerzeichen erweitert. $L(m, n) = L(m, n - 1)$
2. B wird um ein Leerzeichen erweitert. $L(m, n) = L(m - 1, n)$
3. $L(m, n) = L(m - 1, n - 1) + \delta_{mn}$ mit $\delta_{mn} = 1$ wenn $a_m = b_n$ und $\delta_{mn} = 0$ sonst

Rekursion

$$L(m, n) \leftarrow \max\{L(m-1, n-1) + \delta_{mn}, L(m, n-1), L(m-1, n)\}$$

für $m, n > 0$ und Randfälle $L(\cdot, 0) = 0, L(0, \cdot) = 0$.

	\emptyset	Z	I	E	G	E
\emptyset	0	0	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0
I	0	0	1	1	1	1
G	0	0	1	1	2	2
E	0	0	1	2	2	3
R	0	0	1	2	2	3

Dynamic Programming Algorithmus LGT

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Tabelle $L[0, \dots, m][0, \dots, n]$. $L[i, j]$: Länge einer LGT der Zeichenketten (a_1, \dots, a_i) und (b_1, \dots, b_j)

Berechnung eines Eintrags

2. $L[0, i] \leftarrow 0 \forall 0 \leq i \leq m$, $L[j, 0] \leftarrow 0 \forall 0 \leq j \leq n$. Berechnung von $L[i, j]$ sonst mit $L[i, j] = \max(L[i-1, j-1] + \delta_{ij}, L[i, j-1], L[i-1, j])$.

Dynamic Programming Algorithmus LGT

Berechnungsreihenfolge

3. Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.

Rekonstruktion einer Lösung?

4. Beginne bei $j = m, i = n$. Falls $a_i = b_j$ gilt, gib a_i aus und fahre fort mit $(j, i) \leftarrow (j - 1, i - 1)$; sonst, falls $L[i, j] = L[i, j - 1]$ fahre fort mit $j \leftarrow j - 1$; sonst, falls $L[i, j] = L[i - 1, j]$ fahre fort mit $i \leftarrow i - 1$. Terminiere für $i = 0$ oder $j = 0$.

Analyse LGT

- Anzahl Tabelleneinträge: $(m + 1) \cdot (n + 1)$.
- Berechnung jeweils mit konstanter Anzahl Zuweisungen und Vergleichen. Anzahl Schritte $\mathcal{O}(mn)$
- Bestimmen der Lösung: jeweils Verringerung von i oder j . Maximal $\mathcal{O}(n + m)$ Schritte.

Laufzeit insgesamt:

$$\mathcal{O}(mn).$$

Matrix-Kettenmultiplikation

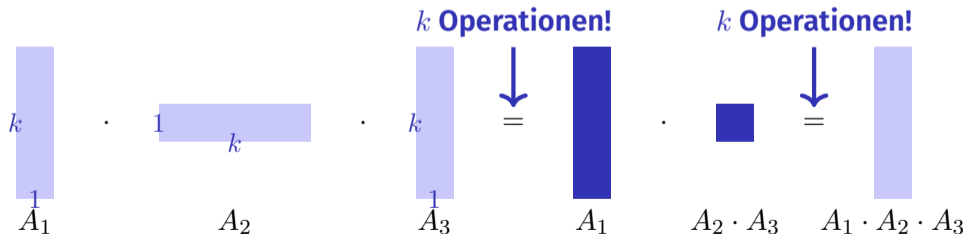
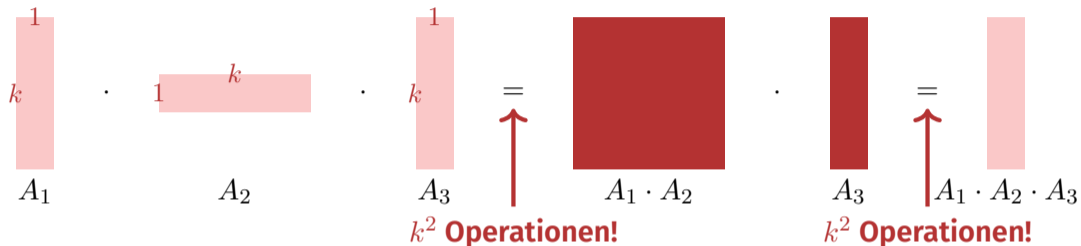
Aufgabe: Berechnung des Produktes $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ von Matrizen A_1, \dots, A_n .

Matrizenmultiplikation ist assoziativ, d.h. Klammerung kann beliebig gewählt werden.

Ziel: möglichst effiziente Berechnung des Produktes.

Annahme: Multiplikation einer $(r \times s)$ -Matrix mit einer $(s \times u)$ -Matrix hat Kosten $r \cdot s \cdot u$.

Macht das einen Unterschied?



Rekursion

- Annahme, dass die bestmögliche Berechnung von $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_i)$ und $(A_{i+1} \cdot A_{i+2} \cdots A_n)$ für jedes i bereits bekannt ist.
- Bestimme bestes i , fertig.

$n \times n$ -Tabelle M . Eintrag $M[p, q]$ enthält Kosten der besten Klammerung von $(A_p \cdot A_{p+1} \cdots A_q)$.

$$M[p, q] \leftarrow \min_{p \leq i < q} (M[p, i] + M[i + 1, q] + \text{Kosten letzte Multiplikation})$$

Berechnung der DP-Tabelle

- Randfälle: $M[p, p] \leftarrow 0$ für alle $1 \leq p \leq n$.
- Berechnung von $M[p, q]$ hängt ab von $M[i, j]$ mit $p \leq i \leq j \leq q$, $(i, j) \neq (p, q)$.
Insbesondere hängt $M[p, q]$ höchstens ab von Einträgen $M[i, j]$ mit $i - j < q - p$.
Folgerung: Fülle die Tabelle von der Diagonale ausgehend.

Analyse

DP-Tabelle hat n^2 Einträge. Berechnung eines Eintrages bedingt Betrachten von bis zu $n - 1$ anderen Einträgen.

Gesamtlaufzeit $\mathcal{O}(n^3)$.

Auslesen der Reihenfolge aus M : Übung!

Exkurs: Matrixmultiplikation

Betrachten Multiplikation zweier $n \times n$ -Matrizen.

Seien

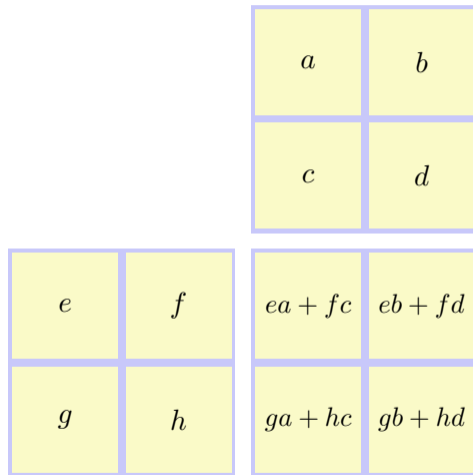
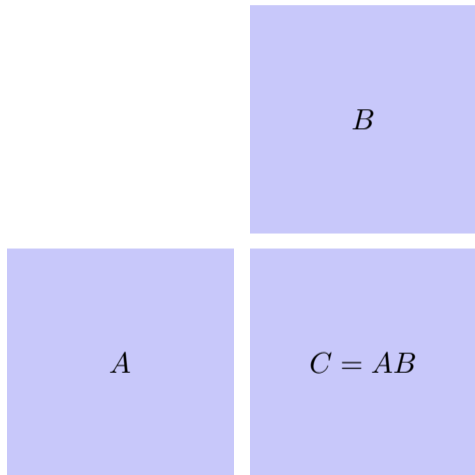
$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \\ C = A \cdot B$$

dann

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Naiver Algorithmus benötigt $\Theta(n^3)$ elementare Multiplikationen.

Divide and Conquer



Divide and Conquer

- Annahme $n = 2^k$.
- Anzahl elementare Multiplikationen:
 $M(n) = 8M(n/2), M(1) = 1$.
- Ergibt $M(n) = 8^{\log_2 n} = n^{\log_2 8} = n^3$. Kein Gewinn 😞

		a	b
		c	d
e	f	$ea + fc$	$eb + fd$
g	h	$ga + hc$	$gb + hd$

Strassens Matrixmultiplikation

■ Nichttriviale Beobachtung von Strassen (1969):

Es genügt die Berechnung der sieben Produkte

$$A = (e + h) \cdot (a + d), B = (g + h) \cdot a, C = e \cdot (b - d),$$

$$D = h \cdot (c - a), E = (e + f) \cdot d, F = (g - e) \cdot (a + b),$$

$$G = (f - h) \cdot (c + d). \text{ Denn:}$$

$$ea + fc = A + D - E + G, eb + fd = C + E,$$

$$ga + hc = B + D, gb + hd = A - B + C + F.$$

■ Damit ergibt sich $M'(n) = 7M(n/2)$, $M'(1) = 1$.

$$\text{Also } M'(n) = 7^{\log_2 n} = n^{\log_2 7} \approx n^{2.807}.$$

■ Schnellster bekannter Algorithmus: $\mathcal{O}(n^{2.37})$

