

# Datenstrukturen und Algorithmen

## Übung 7

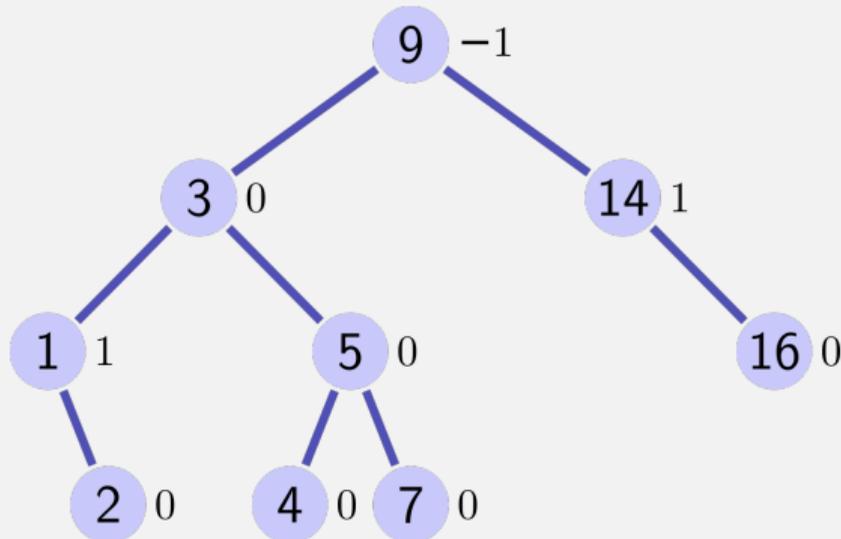
FS 2020

# Programm von heute

- 1 Feedback letzte Übung(en)
- 2 Wiederholung Theorie

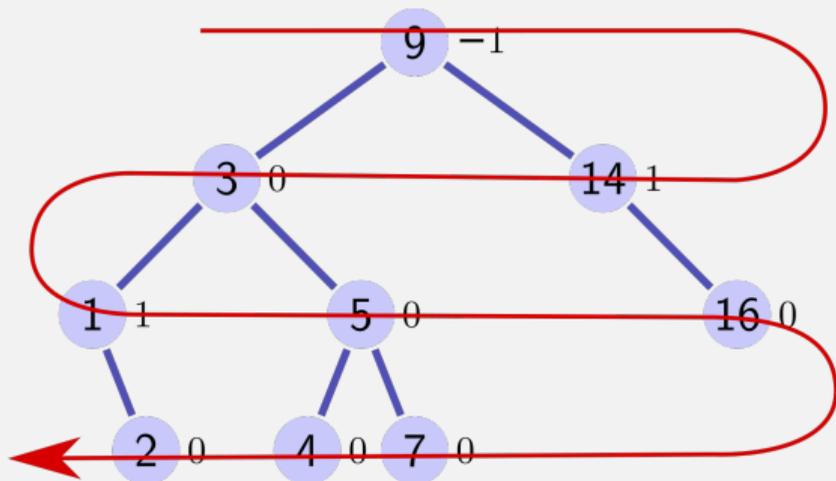
# AVL Einfügesequenz

- Gegeben ein AVL Baum: Gibt es eine Einfügesequenz die den selben Baum erstellt und keine Rotation benötigt?



# AVL Einfügesequenz

- Gegeben ein AVL Baum: Gibt es eine Einfügesequenz die den selben Baum erstellt und keine Rotation benötigt?



# AVL Einfügesequenz - Beweisskizze

- Alle Sequenzen die die Höhenreihenfolge nicht ändern sind i.O.
- Beweis?
- Induktion über Baumhöhe

# AVL Einfügesequenz - Beweisskizze

- Alle Sequenzen die die Höhenreihenfolge nicht ändern sind i.O.
- Beweis?
- Induktion über Baumhöhe
- Hypothese: Schlüssel an Höhe  $h$  und tiefer sind korrekt platziert und ihre Einfügeoperation verursacht keine Rotation.

# AVL Einfügesequenz - Beweisskizze

- Alle Sequenzen die die Höhenreihenfolge nicht ändern sind i.O.
- Beweis?
- Induktion über Baumhöhe
- Hypothese: Schlüssel an Höhe  $h$  und tiefer sind korrekt platziert und ihre Einfügeoperation verursacht keine Rotation.
- Schritt: Zeige dass Traversierung gleich ist wie im Originalbaum, ergibt gleiche Positionierung. Dann, benutze AVL Eigenschaft um zu zeigen dass nie einen Höhenunterschied grösser als 1 eintreten kann und deshalb keine Rotationen nötig sind.

## **2. Wiederholung Theorie**

# Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

# Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle:**

# Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle:** Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?

# Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle:** Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags:**

# Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle:** Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags:** Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?

# Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle:** Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags:** Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
- **Berechnungsreihenfolge:**

# Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle:** Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags:** Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
- **Berechnungsreihenfolge:** In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?

# Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle:** Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags:** Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
- **Berechnungsreihenfolge:** In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?
- **Auslesen der Lösung:**

# Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle:** Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags:** Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
- **Berechnungsreihenfolge:** In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?
- **Auslesen der Lösung:** Wie lässt sich die Lösung am Ende aus der Tabelle auslesen?

# Dynamische Programmierung

Eine vollständige Beschreibung eines dynamischen Programms behandelt **immer** die folgenden Aspekte :

- **Definition der DP-Tabelle:** Welche Dimensionen hat die Tabelle? Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
- **Berechnung eines Eintrags:** Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
- **Berechnungsreihenfolge:** In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?
- **Auslesen der Lösung:** Wie lässt sich die Lösung am Ende aus der Tabelle auslesen?

# Längste aufsteigende Sequenz in Matrix

Gegeben  $n \times m$  Matrix  $A$ :

9	27	42	41	48
35	39	8	3	5
12	49	2	38	4
15	47	29	28	6
19	1	25	33	10

# Längste aufsteigende Sequenz in Matrix

Gegeben  $n \times m$  Matrix  $A$ :

9	27	42	41	48
35	39	8	3	5
12	49	2	38	4
15	47	29	28	6
19	1	25	33	10

Gesucht längste aufsteigende Sequenz:

4, 6, 28, 29, 47, 49

# Definition der DP-Tabelle

- Welche Dimensionen hat die Tabelle?

# Definition der DP-Tabelle

- Welche Dimensionen hat die Tabelle?
  - $n \times m$

# Definition der DP-Tabelle

- Welche Dimensionen hat die Tabelle?
  - $n \times m(\times 2)$

# Definition der DP-Tabelle

- Welche Dimensionen hat die Tabelle?
  - $n \times m(\times 2)$
- Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?

# Definition der DP-Tabelle

- Welche Dimensionen hat die Tabelle?
  - $n \times m(\times 2)$
- Was ist die Bedeutung jedes Eintrags?
  - In  $T[x][y]$  steht Länge der längsten aufsteigenden Sequenz, die im Feld  $A[x][y]$  endet
  - In  $S[x][y]$  steht Koordinaten des Vorgängers von  $(x, y)$  in aufsteigender Sequenz (falls existiert)

# Berechnung eines Eintrags

- Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?

# Berechnung eines Eintrags

- Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
  - Betrachte Nachbarn mit kleineren Eintrag in  $A$ .

# Berechnung eines Eintrags

- Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
  - Betrachte Nachbarn mit kleineren Eintrag in  $A$ .
  - Wähle von den kleineren Einträgen den mit dem grössten Eintrag in  $T$

# Berechnung eines Eintrags

- Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
  - Betrachte Nachbarn mit kleineren Eintrag in  $A$ .
  - Wähle von den kleineren Einträgen den mit dem grössten Eintrag in  $T$
  - Aktualisiere  $T$  und  $S$ . ( $S$  erhält Koordinaten vom ausgewählten Nachbar,  $T$  erhält Wert um eins erhöht vom ausgewählten Nachbar.)

# Berechnung eines Eintrags

- Wie berechnet sich ein Eintrag aus den Werten von anderen Einträgen? Welche Einträge hängen nicht von anderen Einträgen ab?
  - Betrachte Nachbarn mit kleineren Eintrag in  $A$ .
  - Wähle von den kleineren Einträgen den mit dem grössten Eintrag in  $T$
  - Aktualisiere  $T$  und  $S$ . ( $S$  erhält Koordinaten vom ausgewählten Nachbar,  $T$  erhält Wert um eins erhöht vom ausgewählten Nachbar.)

# Berechnungsreihenfolge

- In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?

# Berechnungsreihenfolge

- In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?
- Beginne mit kleinstem Element in  $A$  und so weiter.  
(Bedeutet dass man  $A$  sortieren muss.)

# Berechnungsreihenfolge

- In welcher Reihenfolge kann man die Einträge berechnen, so dass die jeweils benötigten anderen Einträge bereits vorher berechnet wurden?
- Beginne mit kleinstem Element in  $A$  und so weiter. (Bedeutet dass man  $A$  sortieren muss.)
- Beliebige Reihenfolge, falls Eintrag schon berechnet überspringen sonst rekursiv von kleinern Nachbarn berechnen.

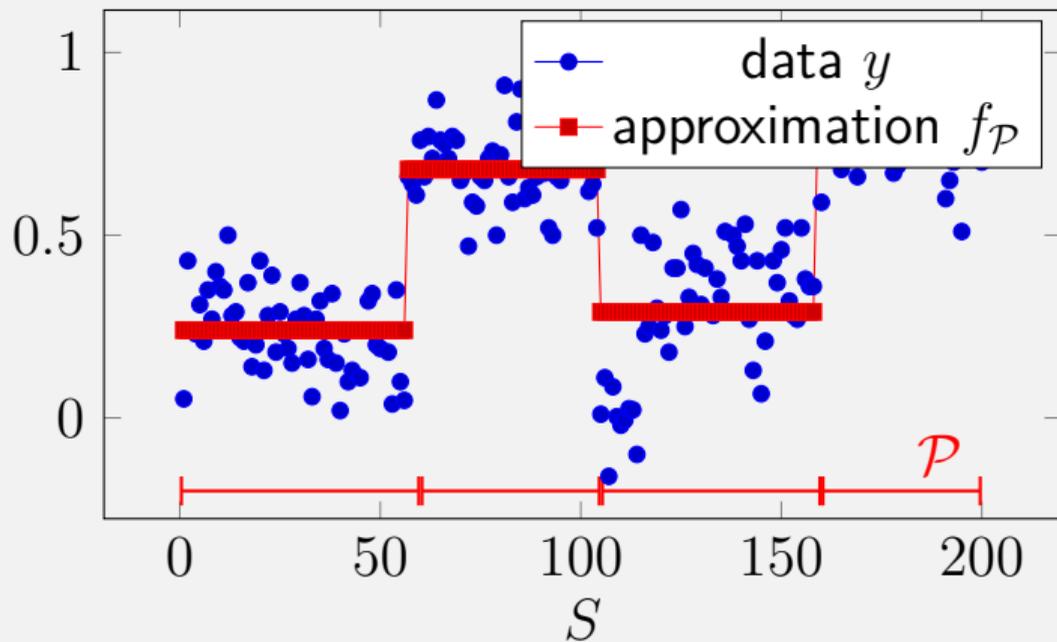
# Auslesen der Lösung

- Wie lässt sich die Lösung am Ende aus der Tabelle auslesen?

# Auslesen der Lösung

- Wie lässt sich die Lösung am Ende aus der Tabelle auslesen?
  - Betrachte alle Einträge um den Eintrag zu finden, in dem eine längste Sequenz endet. Von dort aus können wir die Lösung rekonstruieren, indem wir dem entsprechenden Vorgänger folgen.

# Stückweise konstante Approximation



# Stückweise konstante Approximation

$$H_{\gamma,y} : \mathcal{P} \mapsto \gamma|\mathcal{P}| + \sum_{I \in \mathcal{P}} \sum_{i \in I} (y_i - \mu_I)^2$$

# Stückweise konstante Approximation

$$H_{\gamma,y} : \mathcal{P} \mapsto \gamma|\mathcal{P}| + \sum_{I \in \mathcal{P}} \sum_{i \in I} (y_i - \mu_I)^2$$

- $\mathcal{P}$ : Partition von  $S$  (Menge von Intervallen  $I_i$ , so dass  $\cup_i I_i = S$ ).
- **Ziel:** Finde die Partition  $\hat{\mathcal{P}}$ , so dass  $H_{\gamma,y}(\hat{\mathcal{P}})$  minimal
- Nutze aus: effizientes Berechnen von Durchschnitten mit Präfixsummen (Übung 1):  $\mu_I = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} y_i$

# Stückweise konstante Approximation

$$H_{\gamma,y} : \mathcal{P} \mapsto \gamma|\mathcal{P}| + \sum_{I \in \mathcal{P}} \sum_{i \in I} (y_i - \mu_I)^2$$

- $\mathcal{P}$ : Partition von  $S$  (Menge von Intervallen  $I_i$ , so dass  $\cup_i I_i = S$ ).
- **Ziel:** Finde die Partition  $\hat{\mathcal{P}}$ , so dass  $H_{\gamma,y}(\hat{\mathcal{P}})$  minimal
- Nutze aus: effizientes Berechnen von Durchschnitten mit Präfixsummen (Übung 1):  $\mu_I = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} y_i$
- Nutze aus: effizientes Berechnen von  $e_{[l,r]} = \sum_{i=l}^{r-1} (y_i - \mu_{[l,r]})^2$

# Stückweise konstante Approximation

$$H_{\gamma,y} : \mathcal{P} \mapsto \gamma|\mathcal{P}| + \sum_{I \in \mathcal{P}} \sum_{i \in I} (y_i - \mu_I)^2$$

- $\mathcal{P}$ : Partition von  $S$  (Menge von Intervallen  $I_i$ , so dass  $\cup_i I_i = S$ ).
- **Ziel:** Finde die Partition  $\hat{\mathcal{P}}$ , so dass  $H_{\gamma,y}(\hat{\mathcal{P}})$  minimal
- Nutze aus: effizientes Berechnen von Durchschnitten mit Präfixsummen (Übung 1):  $\mu_I = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} y_i$
- Nutze aus: effizientes Berechnen von  $e_{[l,r]} = \sum_{i=l}^{r-1} (y_i - \mu_{[l,r]})^2$

# Stückweise konstante Approximation

$$H_{\gamma,y} : \mathcal{P} \mapsto \gamma|\mathcal{P}| + \sum_{I \in \mathcal{P}} \sum_{i \in I} (y_i - \mu_I)^2$$

- **Ziel:** Finde die Partition  $\hat{\mathcal{P}}$ , so dass  $H_{\gamma,y}(\hat{\mathcal{P}})$  minimal
- **Dynamische Programmierung:** Definition der Tabelle, Berechnung eines Eintrags, Berechnungsreihenfolge, Auslesen der Lösung
- Nutze aus\*:  $H_{\gamma,y}(\mathcal{P} \cup \{[l,r]\}) = H_{\gamma,y}(\mathcal{P}) + \gamma + e_{[l,r]}$

---

\*Voraussetzung:  $\mathcal{P} \cup \{[l,r]\}$  ist eine Partition

Fragen?