Datenstrukturen und Algorithmen

Übung 5

FS 2020

Programm von heute

1. Feedback letzte Übung
2. Wiederholung Theorie
3. Programmieraufgabe

Amortisierte Analyse: push_back

Strategie: verdoppeln wenn Array voll ist.

Amortisierte Analyse: push_back

Strategie: verdoppeln wenn Array voll ist.

Sei $i \in \mathbb{N}$ die Anzahl eingefügter Elemente und $n_i \in \mathbb{N}$ die Arraygrösse nachdem i eingefügt wurde.

Es gilt

$$n_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1 \text{ [Start]} \\ 2 \cdot n_{i-1} & \text{falls } i - 1 \in \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \text{ [Array voll]} \\ n_{i-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$n_i = 2^{\lceil \log_2 i \rceil}$$

i	n_i
1	1
2	2
3	4
4	4
5	8
6	8
..	..

Amortisierte Analyse: push_back

Strategie: verdoppeln wenn Array voll ist.

[1] Nach Aufgabenstellung: 2n Initialisierungen + n Kopien + neues Element

Amortisierte Analyse: push_back

Strategie: verdoppeln wenn Array voll ist.

Reale Kosten

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1 \text{ [Start]} \\ 3n_{i-1} + 1 & \text{falls } i - 1 \in \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \text{ [Array voll]}^1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

[1] Nach Aufgabenstellung: 2n Initialisierungen + n Kopien + neues Element

Amortisierte Analyse: push_back

Strategie: verdoppeln wenn Array voll ist.

Reale Kosten

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1 \text{ [Start]} \\ 3n_{i-1} + 1 & \text{falls } i - 1 \in \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \text{ [Array voll]}^1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

[1] Nach Aufgabenstellung: 2n Initialisierungen + n Kopien + neues Element

Amortisierte Analyse: push_back

Strategie: verdoppeln wenn Array voll ist.

Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

Amortisierte Analyse: push_back

Strategie: verdoppeln wenn Array voll ist.

Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

$$\begin{aligned}\Phi_i &= 6 \cdot \text{Anzahl Elemente in der oberen Hälfte des Arrays} \\ &= 6 \cdot (i - \frac{n_i}{2}) = 6i - 3n_i\end{aligned}$$

Amortisierte Analyse: push_back

Strategie: verdoppeln wenn Array voll ist.

Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

$$\begin{aligned}\Phi_i &= 6 \cdot \text{Anzahl Elemente in der oberen Hälfte des Arrays} \\ &= 6 \cdot (i - \frac{n_i}{2}) = 6i - 3n_i\end{aligned}$$

$$\Phi_i - \Phi_{i-1} = \begin{cases} 6 + 3n_{i-1} - 3\overbrace{n_i}^{2 \cdot n_{i-1}} & \text{falls } i-1 \in \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \text{ [Array voll]} \\ 6 & \text{sonst} \end{cases}$$

Amortisierte Analyse: push_back

Strategie: verdoppeln wenn Array voll ist.

Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$
\begin{aligned}
a_i &= t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} \\
&= \begin{cases} 3n_{i-1} + 1 + 6 - 3n_{i-1} & \text{falls } i-1 \in \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \text{ [Array voll]} \\ 1 + 6 & \text{sonst} \end{cases} \\
&\leq 7 \quad \text{für alle } i
\end{aligned}
$$

Amortisierte Analyse: pop_back

Strategie: halbieren wenn Array viertel leer ist.

Amortisierte Analyse: pop_back

Strategie: halbieren wenn Array viertel leer ist.

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn Array mehr als viertel voll ist} \\ \frac{n_{i-1}}{2} + \frac{n_{i-1}}{4} = \frac{3}{4} n_{i-1} & \text{sonst, danach } n_i = \frac{n_{i-1}}{2} \end{cases}$$

Amortisierte Analyse: pop_back

Strategie: halbieren wenn Array viertel leer ist.

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn Array mehr als viertel voll ist} \\ \frac{n_{i-1}}{2} + \frac{n_{i-1}}{4} = \frac{3}{4} n_{i-1} & \text{sonst, danach } n_i = \frac{n_{i-1}}{2} \end{cases}$$

Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

Amortisierte Analyse: pop_back

Strategie: halbieren wenn Array viertel leer ist.

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn Array mehr als viertel voll ist} \\ \frac{n_{i-1}}{2} + \frac{n_{i-1}}{4} = \frac{3}{4} n_{i-1} & \text{sonst, danach } n_i = \frac{n_{i-1}}{2} \end{cases}$$

Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

Sei k_i die Anzahl Elemente im Array im Schritt i

$\Phi_i = 3 \cdot$ Anzahl leerer Elemente in der unteren Hälfte des Arrays $(1, \ldots, \frac{n}{2}$

$= 3 \cdot (\frac{n_i}{2} - k_i)$

Amortisierte Analyse: pop_back

Strategie: halbieren wenn Array viertel leer ist.

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn Array mehr als viertel voll ist} \\ \frac{n_{i-1}}{2} + \frac{n_{i-1}}{4} = \frac{3}{4} n_{i-1} & \text{sonst, danach } n_i = \frac{n_{i-1}}{2} \end{cases}$$

Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

Sei k_i die Anzahl Elemente im Array im Schritt i

$\Phi_i = 3 \cdot$ Anzahl leerer Elemente in der unteren Hälfte des Arrays $(1, \ldots, \frac{n}{2}$

$= 3 \cdot (\frac{n_i}{2} - k_i)$

Amortisierte Analyse: pop_back

Strategie: halbieren wenn Array viertel leer ist. Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

$$\Phi_i = 3 \cdot (\frac{n_i}{2} - k_i)$$

$$\Phi_i - \Phi_{i-1} = \begin{cases} 3 & \text{wenn Array mehr als viertel voll ist} \\ 3 \cdot \left(1 + \frac{n_{i-1}}{4} - \frac{n_{i-1}}{2}\right)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Amortisierte Analyse: pop_back

Strategie: halbieren wenn Array viertel leer ist. Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

$$\Phi_i = 3 \cdot (\frac{n_i}{2} - k_i)$$

$$\Phi_i - \Phi_{i-1} = \begin{cases} 3 & \text{wenn Array mehr als viertel voll ist} \\ 3 \cdot \left(1 + \frac{n_{i-1}}{4} - \frac{n_{i-1}}{2}\right)) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4 \geq a_i \text{ (in beiden Fällen)}$$

Amortisierte Analyse: pop und push

$$\Phi_i = 6 \cdot \text{Anzahl Elemente obere Hälfte} + 3 \cdot \text{Anzahl leere Elemente untere Hälfte}$$

2. Wiederholung Theorie

Gutes Hashing

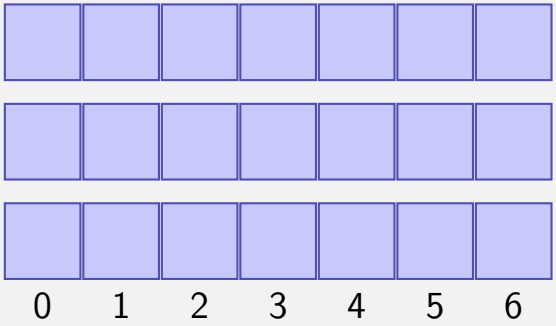
Gutes Hashing...

- verteilt die Menge der Schlüssel möglichst gleichmässig auf die Positionen der Hashtabelle.
- vermeidet beim Sondieren möglichst ein Ablaufen langer belegter Bereiche (siehe primäre Häufung).
- vermeidet, Schlüssel mit gleichem Hashwert auch noch gleich zu sondieren (siehe sekundäre Häufung).

Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

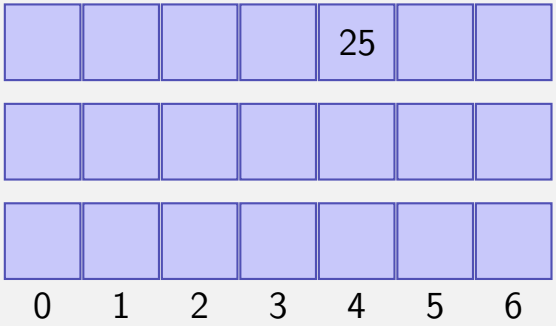
- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren, $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

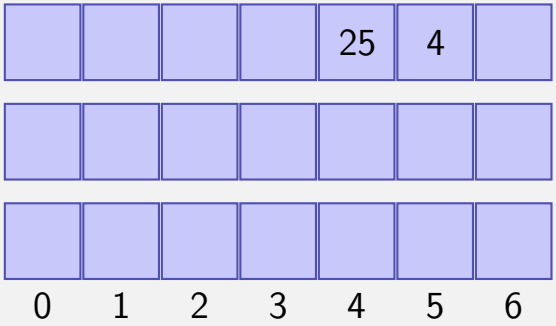
- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren, $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

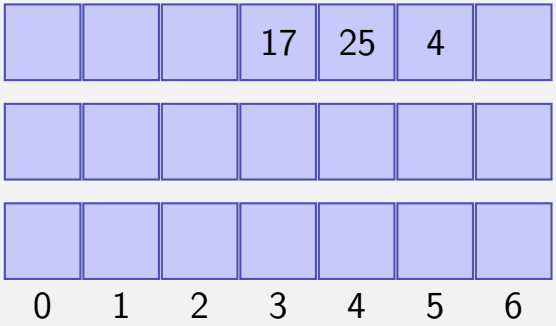
- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren, $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

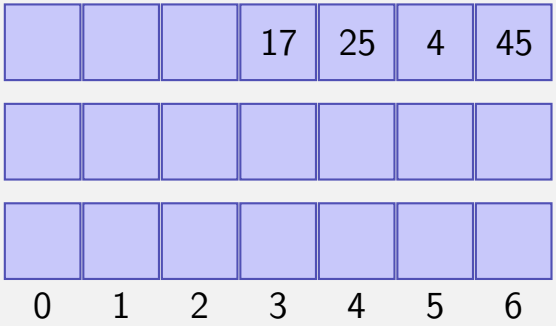
- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren, $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

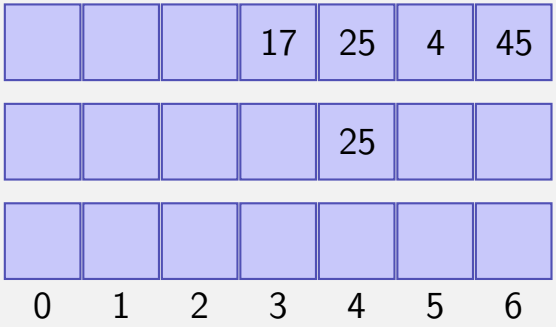
- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren, $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

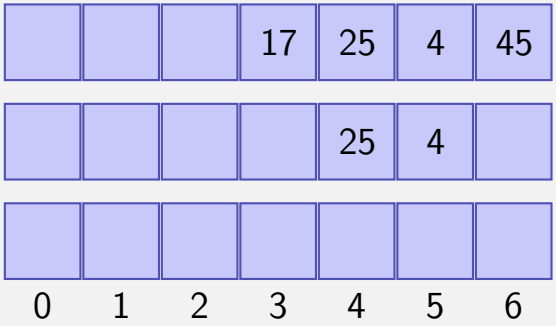
- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren, $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

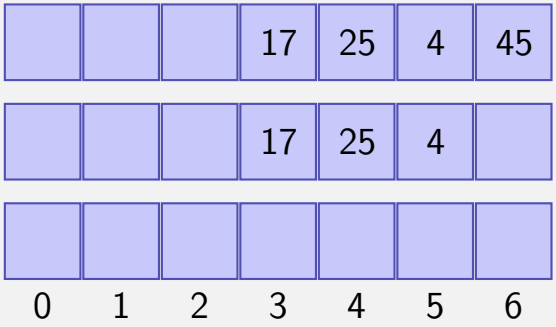
- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren, $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

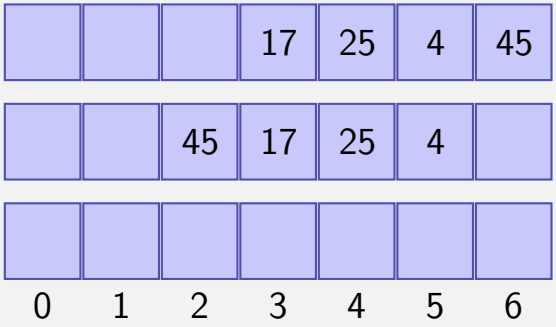
- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren, $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

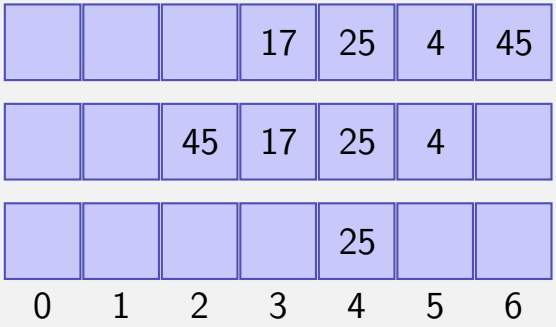
- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren, $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

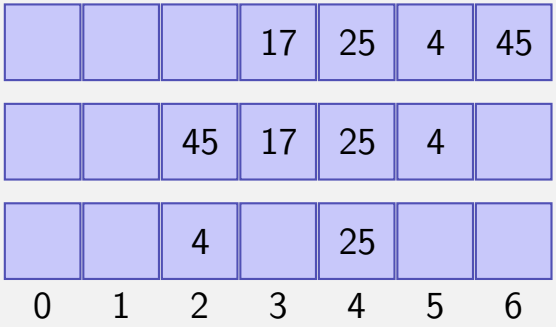
- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren, $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

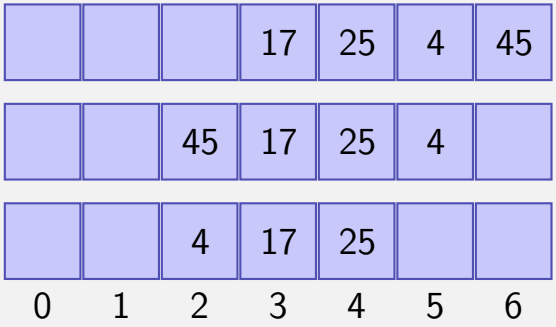
- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren, $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

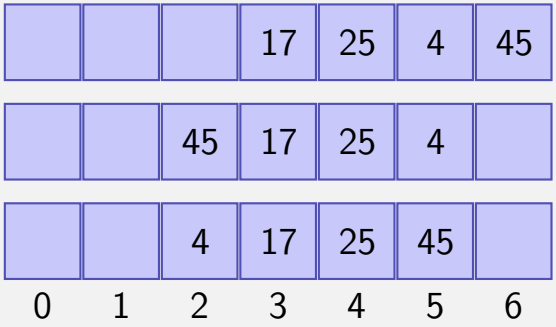
- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren, $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Quadratisches Sondieren, $s(j, k) = (-1)^{j+1} \lceil j/2 \rceil^2$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Simple Uniform Hashing

Aussage über Gleichverteilung und Unabhängigkeit der *Schlüssel*.

Eigenschaft von geschlosser Addressierung: einfaches gleichmässiges Hashing $\Rightarrow$ Erwartete Länge der Ketten so gut wie nur möglich: $\leq \alpha = \frac{n}{m}$

Uniform Hashing

Aussage über die Gleichverteilung und Unabhängigkeit der *Sondierungssequenzen der Schlüssel*.

Eigenschaft der offenen Addressierung: Gleichmässiges Hashing $\Rightarrow$ Erwartete Laufzeitkosten $\leq \frac{1}{1-\alpha}$.

Universal Hashing

Aussage über die verfügbaren, zufällig gewählten *Hash-Funktionen*.

$$|\{h \in \mathcal{H} \text{ mit } h(k_1) = h(k_2)\}| \leq \frac{|\mathcal{H}|}{m}$$

Eigenschaft unabhängig von der gewählten Sequenz der Schlüssel:
beim Hashing mit Verketten erwartete Kettenlänge $\leq \alpha = \frac{n}{m}$

Vorbedingung für das perfekte Hashing

3. Programmieraufgabe

Finden eines Sub-Arrays

- Gegeben: Zwei Felder $A = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ and $B = (b_0, \ldots, b_{k-1})$ mit natürlichen Zahlen
- Aufgabe: Finde Position von B in A.

Finden eines Sub-Arrays

- Gegeben: Zwei Felder $A = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ and $B = (b_0, \ldots, b_{k-1})$ mit natürlichen Zahlen
- Aufgabe: Finde Position von B in A.
- Naiv: Gehe durch A, vergleiche die k folgenden Einträge mit B

Finden eines Sub-Arrays

- Gegeben: Zwei Felder $A = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ and $B = (b_0, \ldots, b_{k-1})$ mit natürlichen Zahlen
- Aufgabe: Finde Position von B in A.
- Naiv: Gehe durch A, vergleiche die k folgenden Einträge mit B
  - $O(nk)$ Vergleiche

Finden eines Sub-Arrays

- Gegeben: Zwei Felder $A = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ and $B = (b_0, \ldots, b_{k-1})$ mit natürlichen Zahlen
- Aufgabe: Finde Position von B in A.
- Naiv: Gehe durch A, vergleiche die k folgenden Einträge mit B
  - $O(nk)$ Vergleiche
- Lösung mit Hashing: Berechne Hash $h(B)$ und vergleiche mit $h((a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1}))$.
- Vermeide die Neuberechnung von $h((a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1}))$ für jedes $i \implies O(n)$ erwartet

Sliding Window Hash

- Mögliche Hash-Funktion: Summe aller Elemente:
  - Kann einfach aktualisiert werden: a_i abziehen und a_{i+k} hinzufügen.
  - Aber: schlechte Hash-Funktion

Sliding Window Hash

- Mögliche Hash-Funktion: Summe aller Elemente:
  - Kann einfach aktualisiert werden: a_i abziehen und a_{i+k} hinzufügen.
  - Aber: schlechte Hash-Funktion
- Besser:

$$H_{c,m}((a_i, \cdots, a_{i+k-1})) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{i+j} \cdot c^{k-j-1} \right) \bmod m$$

  - $c = 1021$ Primzahl
  - $m = 2^{15}$ `int`, keine Überläufe bei Berechnungen

Rechenregeln Modulo

$$(a + b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$$
$$(a - b) \bmod m = ((a \bmod m) - (b \bmod m) + m) \bmod m$$
$$(a \cdot b) \bmod m = ((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)) \bmod m$$

Aufgabe: Berechnen Sie

$$12746357 \bmod 11$$

Rechenregeln Modulo

Aufgabe: Berechnen Sie

$$12746357 \bmod 11$$

Rechenregeln Modulo

Aufgabe: Berechnen Sie

$$
\begin{aligned}
&12746357 \bmod 11 \\
&= (7 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^7) \bmod 11
\end{aligned}
$$

Rechenregeln Modulo

Aufgabe: Berechnen Sie

$$
\begin{aligned}
&12746357 \bmod 11 \\
&= (7 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^7) \bmod 11 \\
&= (7 + 50 + 3 + 60 + 4 + 70 + 2 + 10) \bmod 11
\end{aligned}
$$

Für die zweite Gleichheit haben wir verwendet, dass $10^2 \bmod 11 = 1$.

Rechenregeln Modulo

Aufgabe: Berechnen Sie

$$
\begin{aligned}
&12746357 \bmod 11 \\
&= (7 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^7) \bmod 11 \\
&= (7 + 50 + 3 + 60 + 4 + 70 + 2 + 10) \bmod 11 \\
&= (7 + 6 + 3 + 5 + 4 + 4 + 2 + 10) \bmod 11
\end{aligned}
$$

Für die zweite Gleichheit haben wir verwendet, dass $10^2 \bmod 11 = 1$.

Rechenregeln Modulo

Aufgabe: Berechnen Sie

$$
\begin{aligned}
&12746357 \bmod 11 \\
&= (7 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^7) \bmod 11 \\
&= (7 + 50 + 3 + 60 + 4 + 70 + 2 + 10) \bmod 11 \\
&= (7 + 6 + 3 + 5 + 4 + 4 + 2 + 10) \bmod 11 \\
&= 8 \bmod 11.
\end{aligned}
$$

Für die zweite Gleichheit haben wir verwendet, dass $10^2 \bmod 11 = 1$.

Sliding Window Hash

```
template<typename It1, typename It2>
It1 findOccurrence(const It1 from, const It1 to,
                   const It2 begin, const It2 end)
{
  const unsigned k = end - begin;
  const unsigned M = 32768;
  const unsigned C = 1021;

  // your code here
  // ...
```

Sliding Window Hash

```
  // elements can be compared using std::equal:
  if(std::equal(window_left, window_right, begin, end))
        return current;

  // if no occurrence is found return end of array
  return to;
}
```

Sliding Window Hash

Gehen Sie sicher, dass

- der Algorithmus c^k nur einmal berechnet,
- alle Werte modulo m berechnet werden, um Überläufe zu vermeiden (verwenden Sie die Rechenregeln für Kongruenzen), und
- alle Werte positiv sind (z.B. durch Addition von Vielfachen von m).

Fragen?