Datenstrukturen und Algorithmen

Übung 4

FS 2020

Programm von heute

1. Feedback letzte Übung
2. Wiederholung Theorie
   - Amortisierte Analyse
   - Skiplisten
3. Programmieraufgabe

Sortieren

Bubblesort	min	max
Vergleiche	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$
Sequenz	egal	egal
Vertauschungen	0	$\mathcal{O}(n^2)$
Sequenz	$1, 2, \ldots, n$	$n, n-1, \ldots, 1$

Sortieren

InsertionSort	min	max
Vergleiche	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$
Sequenz	$1, 2, \ldots, n$	$n, n-1, \ldots, 1$
Vertauschungen	0	$\mathcal{O}(n^2)$
Sequenz	$1, 2, \ldots, n$	$n, n-1, \ldots, 1$

SelectionSort	min	max
Vergleiche	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$
Sequenz	egal	egal
Vertauschungen	0	$\mathcal{O}(n)$
Sequenz	$1, 2, \ldots, n$	$n, n-1, \ldots, 1$

Sortieren

QuickSort	min	max
Vergleiche	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(n^2)$
Sequenz	kompliziert	$1, 2, \ldots, n$
Vertauschungen	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$
Sequenz	$1, 2, \ldots, n$	kompliziert

kompliziert: Folge muss so gestaltet sein, dass der Pivot die Daten in jedem Schritt in zwei etwa gleich grosse Teile aufteilt. Zum Beispiel ($n = 7$): $4, 5, 7, 6, 2, 1, 3$

2. Wiederholung Theorie

Amortisierte Laufzeitanalyse

Drei Methoden

- Aggregierte Analyse.
- Kontomethode
- Potentialmethode

Beispiel: einfaches Wörterbuch

Unterstützt Operationen Insert und Find. Idee:

- Familie von Arrays A_i mit Grösse 2^i
- Jedes Array ist entweder ganz leer oder ganz voll und speichert seine Elemente in sortierter Reihenfolge
- Zwischen den Arrays besteht keine weitere Beziehung

Daten $\{1, 8, 10, 18, 20, 24, 36, 48, 50, 75, 99\}$, $n = 11$

$$\begin{aligned} A_0&: \quad [50] \\ A_1&: \quad [8, 99] \\ A_2&: \quad \emptyset \\ A_3&: \quad [1, 10, 18, 20, 24, 36, 48, 75] \end{aligned}$$

Beispiel: einfaches Wörterbuch

Daten $\{1, 8, 10, 18, 20, 24, 36, 48, 50, 75, 99\}$, $n = 11$

$$\begin{array}{ll} A_0: & [50] \\ A_1: & [8, 99] \\ A_2: & \emptyset \\ A_3: & [1, 10, 18, 20, 24, 36, 48, 75] \end{array}$$

Algorithmus **`Find`**:

Beispiel: einfaches Wörterbuch

Daten $\{1, 8, 10, 18, 20, 24, 36, 48, 50, 75, 99\}$, $n = 11$

$$\begin{aligned} A_0&: \quad [50] \\ A_1&: \quad [8, 99] \\ A_2&: \quad \emptyset \\ A_3&: \quad [1, 10, 18, 20, 24, 36, 48, 75] \end{aligned}$$

Algorithmus `Find`: Durchlaufen aller Arrays, jeweils binäre Suche
Worst-case Laufzeit :

Beispiel: einfaches Wörterbuch

Daten $\{1, 8, 10, 18, 20, 24, 36, 48, 50, 75, 99\}$, $n = 11$

$$\begin{array}{ll} A_0\colon & [50] \\ A_1\colon & [8, 99] \\ A_2\colon & \emptyset \\ A_3\colon & [1, 10, 18, 20, 24, 36, 48, 75] \end{array}$$

Algorithmus **`Find`**: Durchlaufen aller Arrays, jeweils binäre Suche
Worst-case Laufzeit : $\Theta(\log^2 n)$,

$$\log 1 + \log 2 + \log 4 + \cdots + \log 2^k = \sum_{i=0}^{k} \log_2 2^i = \frac{k \cdot (k+1)}{2} \in \Theta(\log^2 n).$$

$(k = \lfloor \log_2 n \rfloor)$

Beispiel: einfaches Wörterbuch

Algorithmus `Insert(x)`:

Beispiel: einfaches Wörterbuch

Algorithmus `Insert(x)`:

- Neues Array $A'_0 \leftarrow [x]$, $i \leftarrow 0$
- Solange $A_i \neq \emptyset$, setze A'_{i+1} =Merge(A_i, A'_i), $A_i \leftarrow \emptyset$, $i \leftarrow i+1$
- Setze $A_i \leftarrow A'_i$

Insert(11)

$$
\begin{array}{ll}
A_0\colon & [50] \\
A_1\colon & [8,99] \\
A_2\colon & \emptyset \\
A_3\colon & [1,10,18,\ldots,75]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
A'_0\colon & [11] \\
A'_1\colon & [11,50] \\
A'_2\colon & [8,11,50,99] \\
 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ll}
A_0\colon & \emptyset \\
A_1\colon & \emptyset \\
A_2\colon & [8,11,50,99] \\
A_3\colon & [1,10,18,\ldots,75]
\end{array}
$$

Kosten Insert

Notation im Folgenden: $n = 2^k$, $k = \log_2 n$

Annahme: Erzeugen neues Array A'_i der Länge 2^i (und, für $i > 0$ anschliessendes Zusammenführen von A'_{i-1} und A_{i-1}) hat Kosten $\Theta(2^i)$

Im schlechtesten Fall erzeugt das Einfügen eines Elements $\log_2 n$ solche Operationen. $\Rightarrow$ Worst-case Kosten Insert:

$$\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1 \in \Theta(n).$$

Aggregatanalyse

Level	Kosten	Beispiel Array
0	1	$[*]$
1	2	$[*, *]$
2	4	$[*, *, *, *]$
3	8	$\emptyset$
4	16	$[*, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *]$

Beobachtung: startet man mit einem leeren Container, so gelangt die Einfügesequenz jedes Mal auf Level 0, jedes zweite Mal auf Level 1 (mit Kosten 2), jedes vierte Mal das Level 2 (mit Kosten 4), jedes achte Mal das Level 3 (mit Kosten 8) etc.

Aggregatanalyse

Level	Kosten	Beispiel Array
0	1	$[*]$
1	2	$[*, *]$
2	4	$[*, *, *, *]$
3	8	$\emptyset$
4	16	$[*, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *]$

Beobachtung: startet man mit einem leeren Container, so gelangt die Einfügesequenz jedes Mal auf Level 0, jedes zweite Mal auf Level 1 (mit Kosten 2), jedes vierte Mal das Level 2 (mit Kosten 4), jedes achte Mal das Level 3 (mit Kosten 8) etc.

Gesamtkosten:
$1 \cdot \frac{n}{1} + 2 \cdot \frac{n}{2} + 4 \cdot \frac{n}{4} + \cdots + 2^k \cdot \frac{n}{2^k} = (k+1)n \in \Theta(n \log n)$.
Amortisierte Kosten pro Operation: $\Theta((n \log n)/n) = \Theta(\log n)$.

Kontomethode

Jedes Element i $(1 \leq i \leq n)$ zahlt $a_i = \log_2 n$ Münzen, wenn es in die Datenstruktur eingefügt wird. Damit bezahlt das Element das Anlegen des ersten Arrays und jeden weiteren Merge-Schritt, welcher auftreten kann, bis das Element im Array A_k angekommen ist. Das Konto weist damit immer genügend Kredit auf, um alle Merge-Operationen zu bezahlen.

$\Rightarrow$ Amortisierte Kosten für das Einfügen $\mathcal{O}(\log n)$

Potentialmethode

Wir wissen von der Kontomethode, dass jedes Element auf dem Weg nach oben $\log n$ Münzen benötigt, d.h. dass ein Element auf dem Level i noch $k - i$ Münzen haben sollte. Wir verwenden das Potential

$$\Phi_i = \sum_{0 \le i \le k : A_i \neq \emptyset} (k - i) \cdot 2^i$$

Potentialmethode

Für die Änderung des Potentials $\Phi_i - \Phi_{i-1}$ müssen wir nur die unteren l Levels betrachten, welche zum Zeitpunkt $i-1$ belegt sind (Analogie zum binären Zähler). Sei also l der kleinste Index, so dass A_l leer ist. Nach dem Zusamenführen der Arrays $A_0 \ldots A_{l-1}$ sind Arrays $A_i, 0 \leq i < l$ leer und das Level A_l ist nun belegt. Also:

$$\Phi_i - \Phi_{i-1} = (k-l) \cdot 2^l - \sum_{i=0}^{l-1} (k-i) \cdot 2^i$$

Reale Kosten:

$$t_i = \sum_{i=0}^{l} 2^i = 2^{l+1} - 1$$

Potentialmethode

$$\begin{aligned}
\Phi_i - \Phi_{i-1} &= (k-l) \cdot 2^l - \sum_{i=0}^{l-1} (k-i) \cdot 2^i \\
&= (k-l) \cdot 2^l - k \cdot (2^l - 1) + \sum_{i=0}^{l-1} i \cdot 2^i \\
&= (k-l) \cdot 2^l - k \cdot (2^l - 1) + l \cdot 2^l - 2^{l+1} + 2 \\
&= k - 2^{l+1} + 2 \\
\Phi_i - \Phi_{i-1} + t_i &= k - 2^{l+1} + 2 + 2^{l+1} - 1 = k + 1 \in \Theta(\log n)
\end{aligned}$$

$\sum i \cdot \lambda^i$

Immer der gleiche Trick:

$$\lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} i \cdot \lambda^i - \sum_{i=0}^{n} i \cdot \lambda^i = \sum_{i=0}^{n} i \cdot \lambda^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} i \cdot \lambda^i = \sum_{i=1}^{n+1} (i-1) \cdot \lambda^i - \sum_{i=0}^{n} i \cdot \lambda^i$$

$$= n \cdot \lambda^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (i-1) \cdot \lambda^i - i \cdot \lambda = n \cdot \lambda^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda^i$$

$$= n \cdot \lambda^{n+1} - \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1} + 1$$

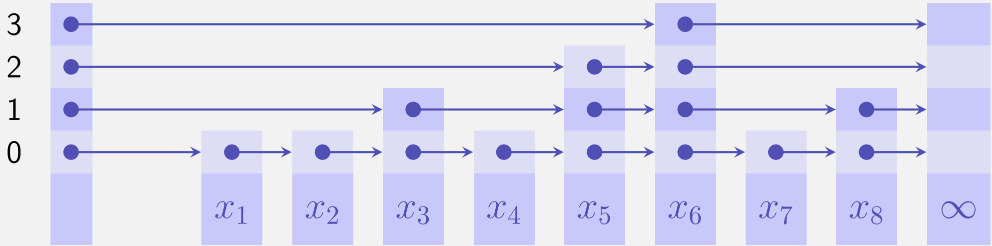
$$(\lambda - 1) \cdot \sum_{i=0}^{n} i \cdot \lambda^i = n \cdot \lambda^{n+1} - \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1} + 1$$

Für $\lambda = 2$:

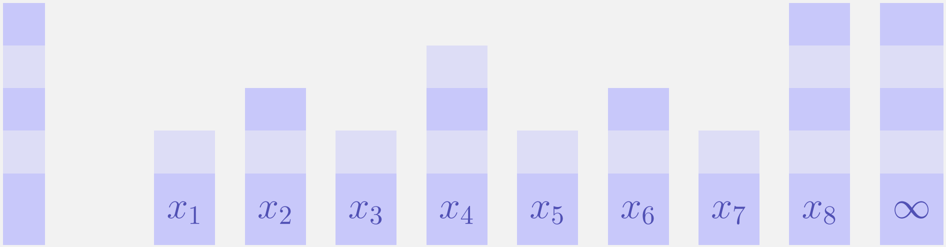
$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot 2^i = n \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 + 1 = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Randomisierte Skipliste

Idee: Füge jeweils einen Knoten mit zufälliger Höhe H ein, wobei $\mathbb{P}(H = i) = \frac{1}{2^{i+1}}$.

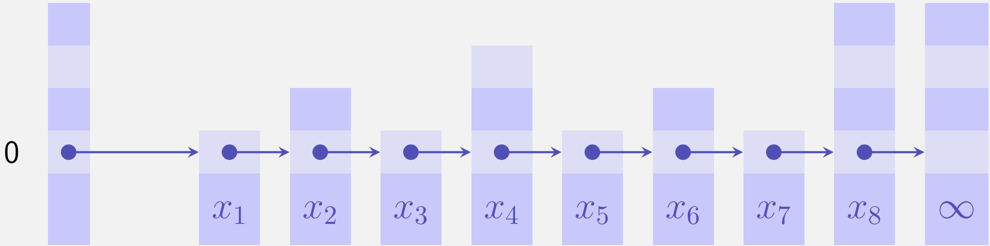


Randomisierte Skipliste: Element finden



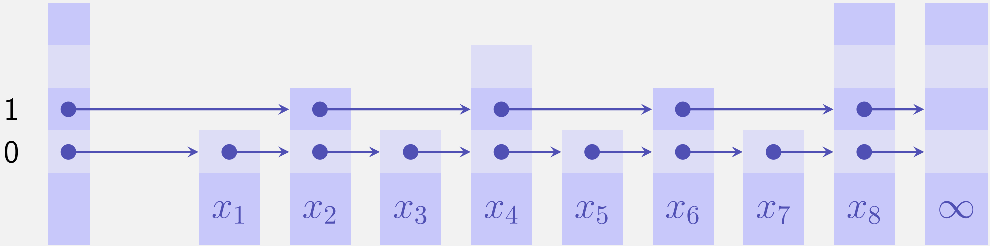
$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9.$$

Randomisierte Skipliste: Element finden



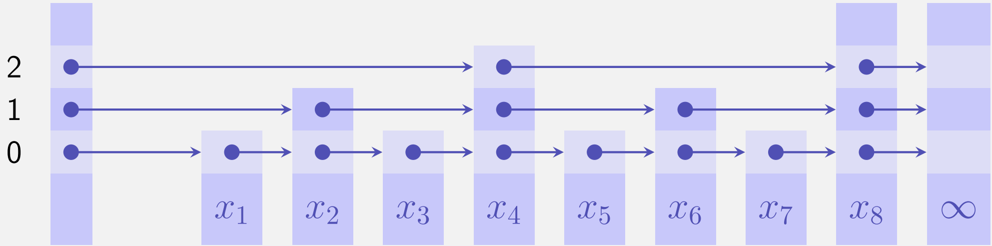
$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9.$$

Randomisierte Skipliste: Element finden



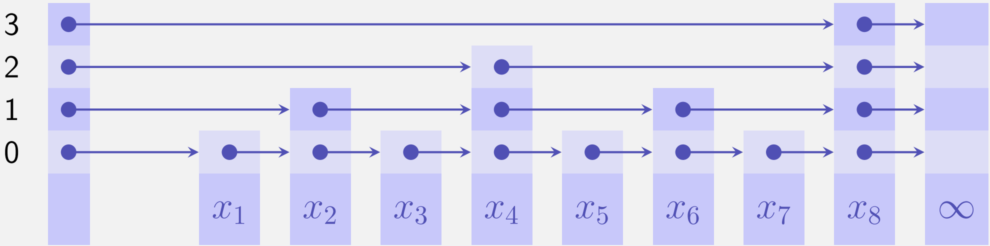
$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9.$$

Randomisierte Skipliste: Element finden



$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9.$$

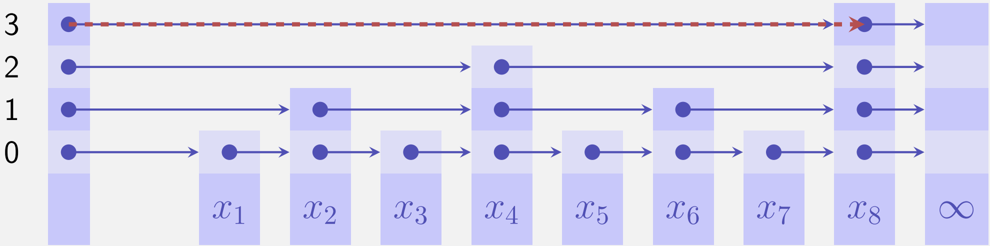
Randomisierte Skipliste: Element finden



$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9$.

Beispiel: Suche nach einem Schlüssel x mit $x_5 < x < x_6$.

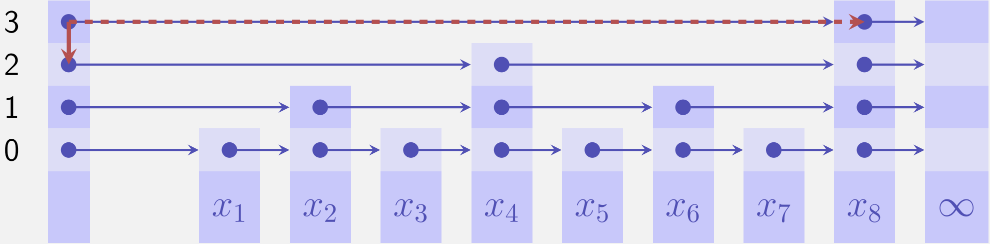
Randomisierte Skipliste: Element finden



$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9$.

Beispiel: Suche nach einem Schlüssel x mit $x_5 < x < x_6$.

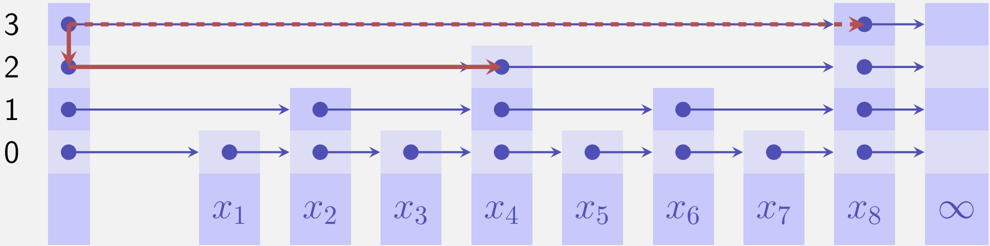
Randomisierte Skipliste: Element finden



$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9$.

Beispiel: Suche nach einem Schlüssel x mit $x_5 < x < x_6$.

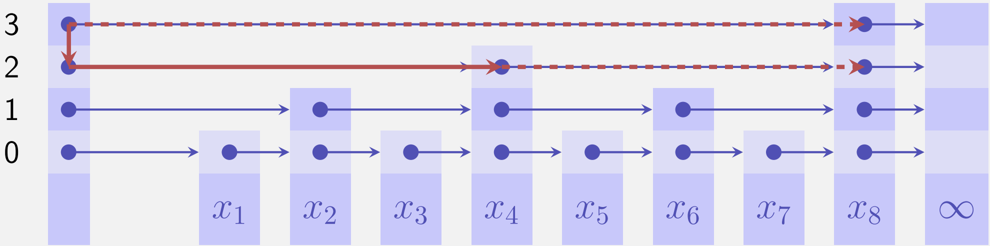
Randomisierte Skipliste: Element finden



$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9$.

Beispiel: Suche nach einem Schlüssel x mit $x_5 < x < x_6$.

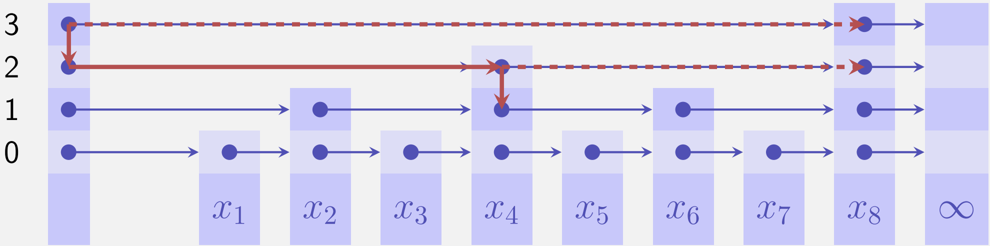
Randomisierte Skipliste: Element finden



$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9$.

Beispiel: Suche nach einem Schlüssel x mit $x_5 < x < x_6$.

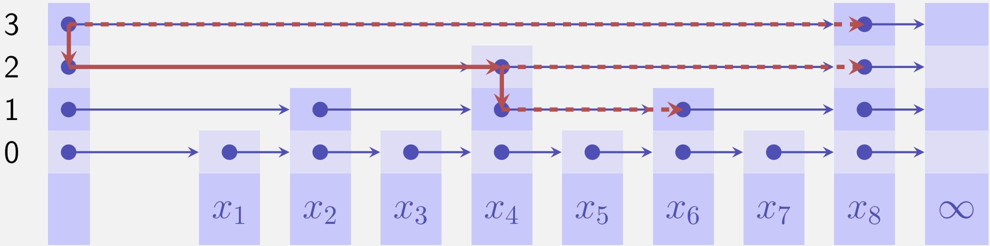
Randomisierte Skipliste: Element finden



$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9$.

Beispiel: Suche nach einem Schlüssel x mit $x_5 < x < x_6$.

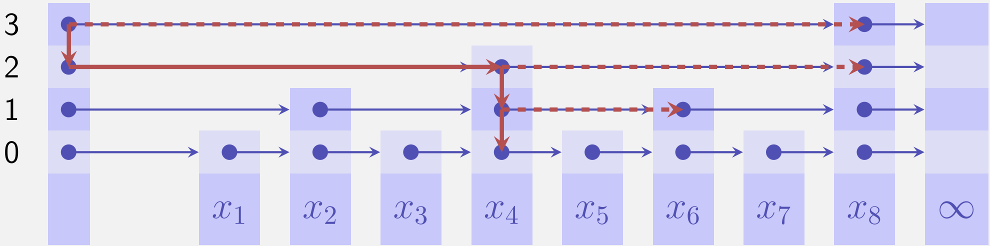
Randomisierte Skipliste: Element finden



$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9$.

Beispiel: Suche nach einem Schlüssel x mit $x_5 < x < x_6$.

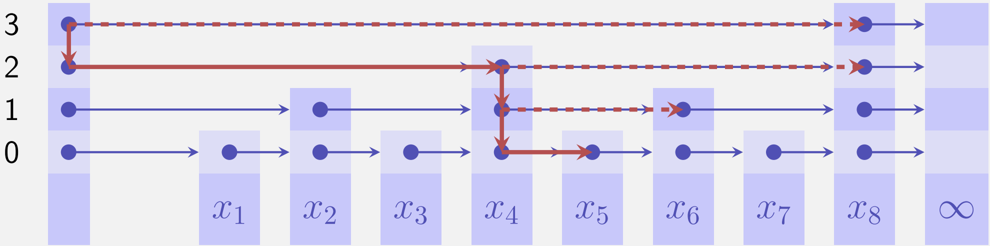
Randomisierte Skipliste: Element finden



$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9$.

Beispiel: Suche nach einem Schlüssel x mit $x_5 < x < x_6$.

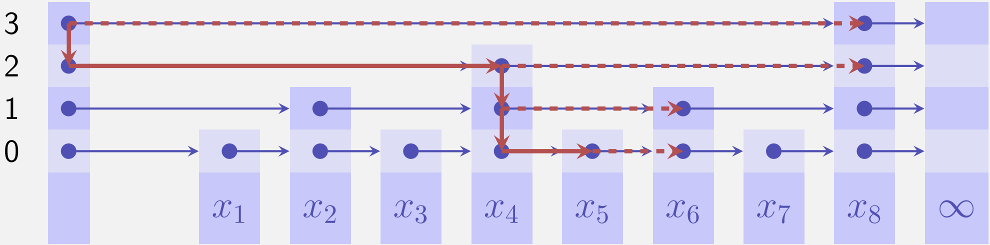
Randomisierte Skipliste: Element finden



$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9$.

Beispiel: Suche nach einem Schlüssel x mit $x_5 < x < x_6$.

Randomisierte Skipliste: Element finden



$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9$.

Beispiel: Suche nach einem Schlüssel x mit $x_5 < x < x_6$.

Skiplisten-Interface

```
template<typename T> class SkipList {
public:
  SkipList();
  ~SkipList();

  void insert(const T& value);
  void erase(const T& value);

  // iterator implementation ...
};
```

Teilweise implementiert:

- Eine Klasse `Node` speichert ein Element `value` vom Typ `T` und einen `std::vector` (`forward`) mit Pointern auf nachfolgende Nodes.
- Erste Node (ohne Wert): `head`.
- `forward[0]` zeigt auf die jeweils nächste Node in der Liste.
- Wir verwenden das in einem bereits implementierten Iterator.

Typen als Template-Parameter

```
template <typename ElementType>
class vector{
        size_t size;
        T* elem;
public:
        ...
        vector(size_t s):
        size{s},
        elem{new ElementType[s]}{}
        ...
        ElementType& operator[](size_t pos){
                return elem[pos];
        }
        ...
}
```

Funktions-Templates

```
template <typename T> // square number
T sq(T x){
        return x*x;
}
template <typename Container, typename F>
void apply(Container& c, F f){ // x <- f(x) forall x in c
        for(auto& x: c)
        x = f(x);
}
int main(){
        std::vector<int> v={1,2,3};
        apply(v,sq<int>);
        output(v); // 1 4 9
}
```

Implementiere `insert` and `erase`

`insert(const T& value)`

- erstelle neue Node
- wähle zufällige Anzahl von Leveln
- finde, für jeden Level, die nächst-kleinere Node
- setze Pointer von den vorherigen Nodes und der neuen Node

Implementiere `insert` and `erase`

`insert(const T& value)`

- erstelle neue Node
- wähle zufällige Anzahl von Leveln
- finde, für jeden Level, die nächst-kleinere Node
- setze Pointer von den vorherigen Nodes und der neuen Node

`erase(const T& value)`

- finde erst kleinere Node
- überprüfe ob nächste Node den Wert `value` hat
- Pointer entsprechend setzen
- gegebnenfalls Node löschen

Implementiere `insert` and `erase`

`insert(const T& value)`

- erstelle neue Node
- wähle zufällige Anzahl von Leveln
- finde, für jeden Level, die nächst-kleinere Node
- setze Pointer von den vorherigen Nodes und der neuen Node

`erase(const T& value)`

- finde erst kleinere Node
- überprüfe ob nächste Node den Wert `value` hat
- Pointer entsprechend setzen
- gegebnenfalls Node löschen

Warnung: Es können gleiche Werte mehrfach vorkommen.

Wiederholung dynamisch alloziierter Speicher

Sehr wichtig: Jedes `new` braucht sein `delete` und nur eins!

Wiederholung dynamisch alloziierter Speicher

Sehr wichtig: Jedes `new` braucht sein `delete` und nur eins!

Deshalb "Rule of three":

- constructor
- copy constructor
- destructor

Wiederholung dynamisch alloziierter Speicher

Sehr wichtig: Jedes `new` braucht sein `delete` und nur eins!

Deshalb “Rule of three”:

- constructor
- copy constructor
- destructor

being lazy “ Rule of two”:

- niemals kopieren (unsicher)
- mache copy constructor privat (sicher)

Fragen?