

Name, Vorname (Druckbuchstaben): \_\_\_\_\_

Legi Nummer: \_\_\_\_\_

**252-0024-00L**

**Parallele Programmierung**

**ETH/CS: FS 2016**

**Basisprüfung**

**Montag, 15.8.2016**

**120 Minuten**

Diese Prüfung enthält 20 Seiten (inklusive dieses Deckblatts) und 9 Aufgaben. Überprüfen Sie, dass keine Seiten fehlen. Füllen Sie alle oben verlangten Informationen aus. Schreiben Sie die Legi-Nummer oben auf jede einzelne Seite, für den Fall, dass Seiten verlorengehen oder abgetrennt werden.

Nehmen Sie sich am Anfang 5 Minuten Zeit, um alle Aufgaben durchzulesen. Während dieser Zeit ist es nicht erlaubt, Prüfungsfragen zu beantworten. Danach haben Sie 120 Minuten Zeit für die Lösung der Aufgaben.

Falls Sie sich durch irgendjemanden oder irgendetwas gestört fühlen, melden Sie dies sofort einer Aufsichtsperson. Wir sammeln die Prüfung zum Schluss ein. Wichtig: stellen Sie unbedingt selbst sicher, dass Ihre Prüfung von einem Assistenten eingezogen wird. Stecken Sie keine Prüfung ein und lassen Sie Ihre Prüfung nicht einfach am Platz liegen. Dasselbe gilt, wenn Sie früher abgeben wollen: bitte melden Sie sich lautlos und wir holen die Prüfung ab. Vorzeitige Abgaben sind nur bis 15 Minuten vor Prüfungsende möglich.

Wenn Sie zur Toilette müssen, melden Sie dies einer Aufsichtsperson durch Handzeichen. Es darf zur gleichen Zeit immer nur eine Studentin oder ein Student zur Toilette.

Es gelten die folgenden Regeln:

- **Lösungen müssen lesbar sein.** Verwenden Sie für Ihre Lösungen den verfügbaren Platz. Lösungen mit unklarer Reihenfolge oder anderweitig unverständlicher Präsentation können zu Punktabzügen führen.
- **Lösungen ohne Lösungsweg erhalten nicht die volle Punktzahl.** Eine korrekte Antwort ohne Lösungsweg, Erklärungen oder algebraischen Umformungen erhält keine Punkte; inkorrekte Antworten mit teilweise richtigen Formeln, Berechnungen und Umformungen können Teilpunkte erhalten.
- Falls mehr Platz benötigt wird, fordern Sie bei den Assistenten zusätzliche Blätter an. Versehen Sie die Aufgabe gegebenenfalls mit einem klaren Hinweis. Richtlinie: **Die Aufgaben sollten sich alle in dem vorgegebenen Platz beantworten lassen.**
- Die Aufgaben können auf **Englisch oder Deutsch** beantwortet werden. Benutzen Sie keinen roten Stift!

| Problem | Points | Score |
|---------|--------|-------|
| 1       | 10     |       |
| 2       | 6      |       |
| 3       | 8      |       |
| 4       | 10     |       |
| 5       | 8      |       |
| 6       | 11     |       |
| 7       | 12     |       |
| 8       | 7      |       |
| 9       | 8      |       |
| Total:  | 80     |       |



**Code verstehen**

*Code interpretation*

(b) Gegeben sei folgende Methode:

*Consider the following method:*

(3)

```
public static void increment(int a, Integer b, int[] c,
    IntWrapper d){
    a++;
    b++;
    c[0]++;
    d.v++;
}
```

Betrachten Sie die Klasse IntWrapper:

*Consider the class IntWrapper:*

```
class IntWrapper {
    public int v;
    IntWrapper(int value){
        this.v = value;
    }
}
```

Nun betrachten Sie den folgenden Code:

*Now consider the following code:*

```
int A = 1;
Integer B = 1;
int[] C = {1};
IntWrapper D = new IntWrapper(1);
increment(A, B, C, D);
System.out.println(A+ " "+B+ " "+C[0]+ " "+D.v);
```

Geben sie die Werte von A, B, C[0] und D.v nach Ausführung des Codes an und begründen sie ihre Antwort für jede der Variablen kurz.

*Determine the values of A, B, C[0] and D.v after executing the given code and justify your answer shortly for each variable.*

A:

.....

B:

.....

C[0]:

.....

D.v:

.....

**Multiple-choice**

- (c) Welche der untenstehenden Deklarationsanweisungen ist **inkorrekt** in Java?

- `int _a`
- `Integer[ ] b`
- `float 3var`
- `static final byte d = 0`

- (d) Carefully read the following code:

```
int[] a = new int[5];
int i = 0;
do {
    System.out.print(a[++i]);
} while(i < 5);
```

Was gibt der Code aus?

- 0000
- nach der Ausgabe 0000 wird eine Exception geworfen
- 00000
- nach der Ausgabe 00000 wird eine Exception geworfen

*Multiple-choice*

- Which is **not** a correct variable declaration statement in Java?* (1)

- Consider the following Code:* (1)

*What is the output of this code?*

- 0000*
- after printing 0000 an exception i thrown*
- 00000*
- after printing 00000 an exception i thrown*

### Speedup, Amdahl, Gustafson (6 points)

2. Beantworten Sie die folgenden Fragen zu Speedup sowie zum Gesetz von Amdahl und Gustafson:

*Answer the following questions about speedup, Amdahl's and Gustafson's laws:*

(a) Schreiben Sie die Formel für den Speedup nach dem **Gustafsonschen** Gesetz auf und erläutern Sie kurz die Parameter.

*Write down the formula for speedup according to **Gustafson's** law and briefly describe its parameters.* (2)

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

(b) Gehen Sie davon aus, dass 20% der Implementierung eines Algorithmus nicht parallelisierbar sind. Was ist der maximal erreichbare Speedup nach dem **Amdahlschen** Gesetz?

*Assume that 20% of the code of an algorithm cannot be parallelized. What is the maximally achievable speedup according to **Amdahl's** law?* (2)

.....  
.....  
.....  
.....

(c) Ihnen steht ein Prozessor mit 47 Kernen zur Verfügung, um ein Programm parallel auszuführen. Insgesamt sind 94% des Programmes parallelisierbar. Alle parallelisierbaren Teile können ohne weitere Overheads mit der selben Laufzeit auf allen Cores ausgeführt werden. Welcher Speedup lässt sich gemäss **Amdahlschen** Gesetz erzielen?

*Imagine you have a processor which has 47 cores and a program you want to parallelize. 94% of this program can be parallelized. Moreover, the program can be executed at the same speed on all those cores without additional overheads. By using **Amdahl's** law, what is the parallel speedup achievable?* (2)

.....  
.....  
.....  
.....

### Pipelining (8 points)

3. “Wash it yourself” bietet einen Raum zum Waschen, Trocknen und Bügeln von Kleidern. Hierfür steht eine Waschmaschine, ein Trockner und ein Bügeleisen zur Verfügung. Um die Maschinen stärker aus zu nutzen, beschloss die Firma mehrere Kunden gleichzeitig in den Waschraum zu lassen. Diese können die Maschinen nun wie im Pipeline Modell in Figure 1 dargestellt nutzen. Einen kompletten Zyklus von Waschen, Trocknen und Bügeln bezeichnen wir als 'Runde'

*“Wash it yourself” is a service where customers can wash, dry and iron their clothes. There is one washing machine, one tumbler and one ironing board. To fully utilize the laundry room the company decided to allow more than one client to access the laundry room at the same time. They can use the machines according to the pipeline model shown in Figure 1. A complete cycle of washing, drying and ironing is called a 'round'.*

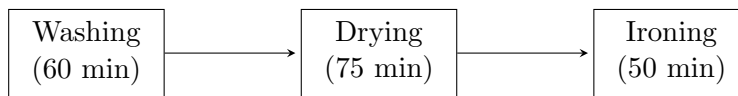


Abbildung 1: Pipeline

- (a) Berechnen Sie den Durchsatz der Pipeline in Runden/Stunde. *Calculate the throughput of the pipeline. The unit is rounds/hour.* (2)

.....

.....

.....

.....

- (b) Ist die Pipeline balanciert oder unbalanciert? Was ist die Latenz der ersten und was die Latenz der zweiten Runde? Bitte begründen Sie Ihre Antwort mit einer Zeichnung. *Is the pipeline balanced or unbalanced? What is the latency of the first and second round? Please justify your answer with a drawing.* (3)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) Wenige Jahre später entdeckt die Firma eine neuartige Maschine die sich "WashDryIron" nennt. Diese Maschine kann die Kleider in 240 Minuten waschen, trocknen und bügeln. Die Firma überlegt nun, ob Sie die drei alten Maschinen (Waschmaschine, Trockner und Bügeleisen) durch drei identische "WashDryIron" Maschinen ersetzen soll. Die folgenden Szenarien werden betrachtet:

*After some years of service, the company discovers a novel 3-in-1 machine called "WashDryIron". This machine can wash, dry and iron the clothes in 240 minutes. The company wants to decide if they should replace the three current machines (washing machine, tumbler and iron), with three identical "WashDryIron" machines. The following scenarios are considered:* (3)

1.) Die Maschinen sind zuerst ungenutzt und es kommen gleichzeitig drei Kunden zum Waschen, Trocknen und Bügeln. Welche Konfiguration ist hier besser, also wie lange benötigt die alte (Waschmaschine, Trockner und Bügler) im Vergleich zur neuen (drei WashDryIron Maschinen) Konfiguration?

*1.) The machines are initially unused and three customers at once come to wash, dry and iron. Which configuration is better, i.e. how long does the old (washing machine, dryer and iron) compared to the new setup (three WashDryIron machines) take?*

.....  
 .....  
 .....  
 .....

2.) Es kommen so viele Kunden, dass die Maschinen praktisch ständig laufen. Welche Konfiguration hat den höheren Durchsatz? Geben Sie die Zahlen an.

*2.) There are so many customers that the machines are practically in permanent use. Which setup has the higher throughput? Provide the numbers.*

.....  
 .....  
 .....  
 .....

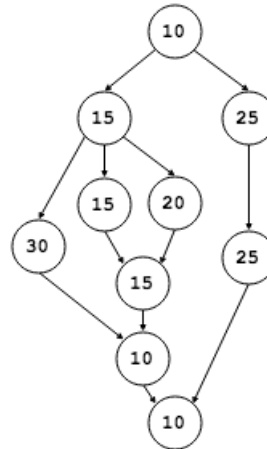
### Task Parallelism (10 points)

#### 4. Task Graphen

Betrachten Sie folgenden Task-Graphen. Knoten enthalten die jeweilige Laufzeit:

#### Task Graphs.

Consider the following task graph. Each node contains its execution time:



- (a) Geben Sie die untere und obere Schranke für die Ausführungszeiten an. Was ist der maximale Speedup (ausgehend von unendlich vielen Prozessoren)? Wieviele Prozessoren benötigen Sie tatsächlich, um diesen Speedup auf obigen Task Graphen zu erreichen? Erklären Sie Ihre Antwort kurz.

- Give lower and upper bounds on execution times. What is the maximum possible speed up (assuming infinite processors)? What is the number of processors required to achieve the maximum speedup on the given Task Graph? Briefly explain your answer.* (3)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (b) Geben Sie das beste Scheduling Szenario für eine 2-Prozessor-Maschine an (schematisch wenn nötig). Welchen Speedup erhalten Sie?

- Provide the best scheduling scenario for a 2 processor machine (schematically if necessary). What speedup do you get?* (3)

.....

.....

.....

.....

.....





## Synchronization (8 points)

5. Bei den folgenden Multiple-Choice Fragen gibt es einen Punkt, wenn alle korrekten Möglichkeiten angekreuzt wurden. Andernfalls gibt es 0 Punkte.

*For the following multiple choice questions, 1 point is provided if and only if all correct answers are marked, otherwise 0 points are given.*

(a) Welche der folgenden Situationen führen zu einer Race Condition, wenn keine Synchronisationsmechanismen eingesetzt werden?

*Which of the following situations leads to a race condition provided that no synchronisation mechanism is in place? (1)*

- Ein Thread A liest eine Variable x zur gleichen Zeit wie ein Thread B in diese Variable x schreibt.
- Ein Thread A liest eine Variable x zur gleichen Zeit wie ein Thread B diese Variable x liest.
- Ein Thread A schreibt eine Variable x zur gleichen Zeit wie ein Thread B diese Variable x schreibt.
- Ein Thread A schreibt eine Variable x zur gleichen Zeit wie ein Thread B eine Variable y schreibt.
- Ein Thread A liest eine Variable x zur gleichen Zeit wie ein Thread B eine Variable y schreibt.
- Ein Thread A liest eine Variable x zur gleichen Zeit wie ein Thread B eine Variable y liest.

*A thread A reads a variable x at the same time with a thread B that writes this variable x.*

*A thread A reads a variable x at the same time with a thread B that reads this variable x.*

*A thread A writes a variable x at the same time with a thread B that writes this variable x.*

*A thread A writes a variable x at the same time with a thread B that writes a variable y.*

*A thread A reads a variable x at the same time with a thread B that writes a variable y.*

*A thread A reads a variable x at the same time with a thread B that reads a variable y.*

(b) Welche der folgenden Sätze sind wahr?

*Which of the following sentences are true? (1)*

- Es ist möglich, Nebenläufigkeit auf einem einzelnen Core zu haben.
- Es braucht mindestens zwei Cores, um eine parallele Ausführung zu erreichen.
- Eine Art, Parallelismus zu erreichen, ist der Gebrauch von mehreren Threads. Andererseits kann Nebenläufigkeit durch einen einzelnen Thread erreicht werden.
- Parallelismus befasst sich mit dem schnelleren Lösen von Problemen.
- Nebenläufigkeit befasst sich mit dem korrekten und effizienten Zugriffsmanagement auf geteilte Ressourcen.

*It is possible to have concurrency on a single core.*

*At least two cores are required to achieve parallel execution*

*One way to achieve parallelism is the use of multiple threads. On the other hand, concurrency may be achieved with a single thread.*

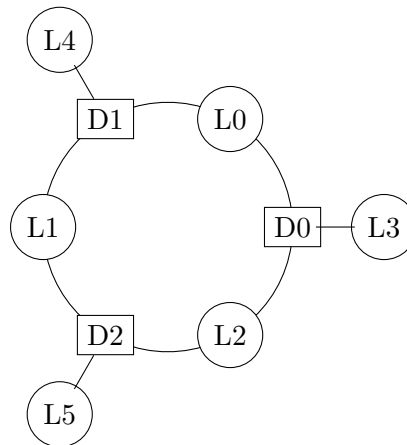
*Parallelism aims at solving a problem faster.*

*Concurrency aims at correct and efficient management of access to the shared resources.*

- (c) Folgende Abbildung zeigt ein rundes Gebäude mit drei Türen und sechs Lichtern. Jede Tür hat jeweils ein Licht auf beiden Seiten und eins oberhalb, also insgesamt drei benachbarte Lichter. Die Lichter werden durch die Klasse `Light` repräsentiert, die Türen durch die Klasse `Door`. Das Öffnen der Türen ist trickreich: jede Tür hat einen Schalter, welcher die erreichbaren drei Lichter umschaltet (an wird zu aus, aus wird zu an). Nur wenn alle drei Lichter einer Tür angeschaltet sind, öffnet sich die Tür. Die Türschalter aller Türen können gleichzeitig benutzt werden.

Vervollständige die Methode `tryOpen()` in der Klasse `Door` so, dass zuerst die drei erreichbaren Lichter umgeschaltet werden (toggle) und `true` zurückgegeben wird genau dann, wenn dann alle drei Lichter eingeschaltet sind.

Eine beliebige Anzahl Threads darf auf den Türen operieren. Erklären Sie Ihr Synchronisationsschema kurz und bündig.



```
public class Light {
    private final int id; // unique
    private boolean on = false;

    public Light() {
        // set unique id omitted for brevity
    }
    public int getID() { return this.id };
    public void toggle() {on = !on};
    public boolean on() {return on;};
}
```

*The following figure depicts a building with three doors and six lights. Each door has one light on each side and one above it, i.e., three adjacent lights. The lights are represented with the class `Light`, the doors are represented with the class `Door`. Opening a door is tricky: there is a switch that toggles (on becomes off, off becomes on) the adjacent lights and if and only if then all three adjacent lights are finally on, the door will open.*

*Complete the method `tryOpen()` of the `Door` class such that it first toggles its left, right and top light and returns true if and only if all lights are on.*

*An arbitrary number of threads is allowed to act on the doors. Explain in brief your synchronization scheme.*



### Mutex Implementation (11 points)

6. Bei den folgenden Multiple-Choice Fragen gibt es einen Punkt, wenn alle korrekten Möglichkeiten angekreuzt wurden. Andernfalls gibt es 0 Punkte.

*For the following multiple choice questions, 1 point is provided if and only if all correct answers are marked, otherwise 0 points are given.*

(a) Welches dieser Statements ist korrekt im Bezug auf Javas volatile Schlüsselwort.

*Which of these statements are correct regarding Java's volatile key word? (1)*

- Caching und Reordering ist für die mit volatile markierten Variablen deaktiviert.
- Der Wert einer mit volatile gekennzeichneten Variablen wird immer vom Cache gelesen.
- Verwendung von mit volatile gekennzeichneten Variablen beschleunigt die Programmausführung grundsätzlich.
- Volatile kann zum Verhindern von Data Races verwendet werden.
- Volatile kann zum Verhindern von Bad Interleavings verwendet werden.

*Caching and reordering is disabled for variables marked volatile.*

*The value of a variable marked volatile is always read from cache.*

*The use of volatile variables speeds up code generally.*

*Volatile can be used to avoid data races.*

*Volatile can be used to avoid bad interleavings.*

(b) Welche der folgenden Aussagen zu den Mutex Algorithmen ist wahr?

*Which of the following statements about different mutex algorithms is true? (1)*

- Der Filter Lock Algorithmus ist fair.
- Der Filter Lock basiert auf der Verwendung mehrere Instanzen des Peterson Algorithmus.
- Der Peterson Lock Algorithmus basiert auf der Verwendung mehrerer Instanzen des Filter Locks.
- Der Peterson Lock unterliegt Starvation.

*The Filter Lock Algorithm is fair.*

*The Filter Lock is based on using multiple instances of the Peterson algorithm.*

*The Peterson Lock is based on using multiple instances of the Filter Lock algorithm.*

*The Peterson Lock suffers from starvation.*

(c) Erklären Sie knapp (Stichworte oder 1-2 Sätze), warum Lock contention problematisch ist. Nennen und erklären Sie kurz eine in der Vorlesung diskutierte Strategie, um damit umzugehen.

*Explain in keywords or short sentences (1-2) why lock contention is problematic. Name and briefly explain one strategy, discussed in the lecture, to alleviate the problem(s). (2)*

.....

.....

.....

.....

.....

Betrachten Sie folgende (korrekte) Implementation eines Peterson-Locks:

```
class PetersonLock
{
    AtomicBoolean flag[] = new AtomicBoolean[2];
    volatile int victim;

    // pre: id = 0 or 1
    public void Acquire(int id) {
        flag[id].set(true);
        victim = id;
        while (flag[1-id].get() && victim == id);
    }

    // pre: id = 0 or 1
    public void Release(int id) {
        flag[id].set(false);
    }
}
```

Jemand schlägt vor, folgendermassen drei Peterson Locks hierarchisch für die Implementation eines Locks für Systeme mit vier Prozessen zu verwenden (Prozess ID 0,1,2,3):

```
class Lock4{
    PetersonLock[] lock = new PetersonLock[3];

    // pre: id = 0, 1, 2 or 3
    public void Acquire(int id){
        lock[0].Acquire(id / 2);
        lock[1+id/2].Acquire(id % 2);
    }

    // pre: id = 0, 1, 2 or 3
    public void Release(int id){
        lock[1+id/2].Release(id % 2);
        lock[0].Release(id / 2);
    }
}
```

*Consider the following (correct) implementation of a Peterson lock:*

*Someone suggests to use three Peterson locks hierarchically in order to implement a lock for a system with four processes (having id 0,1,2 and 3) in the following way.*

- (d) Zeigen sie in einem Diagramm die Struktur des (inkorrekt) implementierten Locks Lock4 auf. *Draw a figure sketching the structure of the (incorrectly) implemented lock Lock4.* (2)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (e) Erklären Sie warum das Lock Lock4 nicht korrekt funktioniert. *Explain why the lock Lock4 cannot not work correctly.* (2)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (f) Zeigen Sie einen Lösungsweg auf, der trotzdem lediglich drei PetersonLocks verwendet. *Explain what to change in order to make it work. Your solution must use the three Peterson locks.* (3)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Lock-free programming (12 points)

7. Diese Frage behandelt die lock-freie Programmierung.

*This question covers lock-free programming.*

(a) Beschreiben Sie das ABA Problem und wann es auftritt.

*Describe what the ABA problem is and when it occurs. (3)*

.....

.....

.....

.....

.....

(b) Nennen Sie drei Ansätze zur Lösung des ABA Problems.

*Name three methods that can solve ABA problem. (3)*

.....

.....

.....

.....

.....

(c) Geben Sie in der Tabelle an, welche Voraussetzung an einen nebenläufigen Algorithmus zu den dargestellten Eigenschaften führt.

*Fill in the requirement of a concurrent algorithm such that it provides the properties given in the table below. (2)*

|                         | Non-Blocking | Blocking |
|-------------------------|--------------|----------|
| Everyone makes progress | .....        | .....    |
| Someone makes progress  | .....        | .....    |



- (d) Der folgende Code verwendet Locks für die Implementation eines Algorithmus zur Akkumulation von Integer Einträgen. Der Code darunter soll die gleiche Funktionalität in lock-freier Weise implementieren. Füllen Sie die fehlenden Codestücke entsprechend ein.

*The following piece of code uses locks to implement the accumulation of integer array entries. The code below is supposed to implement the same functionality using a lock-free algorithm. Fill in the missing code lines accordingly.* (4)

Lock-based Implementation:

```
public class Accumulator{
    private int sum;

    public synchronized int getVal(){ return sum; }

    public synchronized void accumulate(int [] data){
        for (int index = 0; index<data.length; ++index)
            sum = sum + data[index];
    }
};
```

Lock-Free Implementation:

```
public class Accumulator{
    private ..... sum;

    public int getVal(){ return ..... ; }

    public void accumulate(int [] data){
        .....
        .....
        .....
        .....
        .....
        .....
    }
};
```

## Linearizability (7 points)

8. In den folgenden Aufgaben seien A, B und C Threads, welche mit einem gemeinsam benutzten Stack-Objekt arbeiten. Die Spezifikation ist in der folgenden Interfacedefinition ersichtlich:

```
public interface Stack {
    /* pushes element v onto the stack */
    public void push(int v);

    /* removes the top element and returns it */
    public int pop();

    /* returns the top element */
    public int top();
}
```

*In the following questions let A, B and C denote threads operating on a shared stack object as specified in the listing below.*

Welches der folgenden Szenarien ist linear konsistent? Markiere entweder den Linearisierungspunkt oder erkläre, warum es nicht linear konsistent ist.

*Which of the following scenarios are linearly consistent? Either mark the point of linearization or explain why it is not linearly consistent.*

(a) A s.push(1): \*-----\* (1)

B s.push(2): \*-----\*

A s.pop()->2: \*-----\*

B s.pop()->1: \*-----\*

.....

.....

(b) C s.push(1): \*-----\* (1)

B s.push(2): \*-----\*

A s.pop()->1: \*-----\*

C s.pop()->2: \*-----\*

B s.push(3): \*-----\*

A s.pop()->4: \*-----\*

C s.push(4): \*-----\*

.....

.....

(c) A s.push(1): \*-----\* (1)

B s.push(2): \*-----\*

A s.top()->2: \*-----\*

B s.push(3): \*-----\*

C s.pop()->2: \*-----\*

C s.pop()->3: \*-----\*

A s.pop()->1: \*-----\*

.....

.....

(d) A s.push(1): \*-----\* (1)

B s.push(2): \*-----\*

C s.pop()->1: \*-----\*

B s.push(3): \*-----\*

B s.pop()->2: \*-----\*

.....

.....

(e) Was ist der Unterschied zwischen Linearisierbarkeit und sequenzieller Konsistenz? Konstruiere ein Beispiel welches sequenziell konsistent aber nicht linearisierbar ist. *What are the differences between linearizability and sequential consistency? Construct an example that is sequential consistent but not linearizable.* (3)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Parallel Algorithms (8 points)

9. Paralleles Sortieren und Sortiernetzwerke

*Parallel Sorting and Sorting Networks*

- (a) Was sagt das Null-Eins-Prinzip für Komparatornetzwerke aus?

*What is the statement of the zero-one-principle for comparator networks? (4)*

.....

.....

.....

.....

.....

- (b) Geben Sie eine Eingabefolge bestehend aus 0 und 1 für das folgende Odd-Even-Sortiernetzwerk der Tiefe 6 an, sodass zwei Werte bei einem Komparator der Tiefe 6 vertauscht werden. Schreiben Sie auf alle Leitungen die entsprechenden Werte.

*Consider the following odd-even sorting network of depth 6. Provide an input sequence of 0 and 1 such that there is a swap of two values at a comparator of depth 6. Write all values carried by the wires next to them. (4)*

Hinweis: Denken Sie daran, wie wir in den Übungen gezeigt haben, dass ein Odd-Even-Sortiernetzwerk für eine Input-Sequenz der Länge  $n$  Tiefe  $n$  haben muss, und konstruieren sie eine Input-Sequenz, bei der der "schlimmste Fall" auftritt.

*Hint: Recall how we showed in the exercises that an odd-even sorting network needs depth  $n$  for inputs of size  $n$  and provide an input triggering the "worst case".*

