3. Beispiele

Korrektheit zeigen, Rekursion und Rekurrenzen
[Literaturangaben bei den Beispielen]

3.1 Altägyptische Multiplikation

Altägyptische Multiplikation – Ein Beispiel, wie man Korrektheit von Algorithmen zeigen kann.

Altägyptische Multiplikation[3]

Berechnung von $11 \cdot 9$

11	9
~~22~~	~~4~~
~~44~~	~~2~~
88	1
99	–

9	11
18	5
~~36~~	~~2~~
72	1
99	

1. Links verdoppeln, rechts ganzzahlig halbieren.
2. Gerade Zahl rechts $\Rightarrow$ Zeile streichen.
3. Übrige Zeilen links addieren.

[3] Auch bekannt als Russiche Bauernmulltiplikation

Vorteile

- Kurze Beschreibung, einfach zu verstehen.
- Effizient für Computer im Dualsystem: Verdoppeln = Left Shift, Halbieren = Right Shift

Beispiel

left shift $9 = 01001_2 \rightarrow 10010_2 = 18$
right shift $9 = 01001_2 \rightarrow 00100_2 = 4$

Fragen

- Für welche Eingaben liefert der Algorithums das richtige Resultat (in endlicher Zeit)?
- Wie beweist man seine Korrektheit?
- Was ist ein gutes Mass für seine Effizienz?

Die Essenz

Wenn $b > 1$, $a \in \mathbb{Z}$, dann:

$$a \cdot b = \begin{cases} 2a \cdot \frac{b}{2} & \text{falls } b \text{ gerade,} \\ a + 2a \cdot \frac{b-1}{2} & \text{falls } b \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Terminierung

$$a \cdot b = \begin{cases} a & \text{falls } b = 1, \\ 2a \cdot \frac{b}{2} & \text{falls } b \text{ gerade,} \\ a + 2a \cdot \frac{b-1}{2} & \text{falls } b \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Rekursiv funktional notiert

$$f(a,b) = \begin{cases} a & \text{falls } b = 1, \\ f(2a, \frac{b}{2}) & \text{falls } b \text{ gerade,} \\ a + f(2a, \frac{b-1}{2}) & \text{falls } b \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Als Funktion programmiert

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b){
  if(b==1)
    return a;
  else if (b%2 == 0)
    return f(2*a, b/2);
  else
    return a + f(2*a, (b−1)/2);
}
```


Korrektheit: Mathematischer Beweis

$$f(a,b) = \begin{cases} a & \text{falls } b = 1, \\ f(2a, \frac{b}{2}) & \text{falls } b \text{ gerade}, \\ a + f(2a \cdot \frac{b-1}{2}) & \text{falls } b \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Zu zeigen: $f(a,b) = a \cdot b$ für $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^+$.

Korrektheit: Mathematischer Beweis per Induktion

Sei $a \in \mathbb{Z}$, zu zeigen $f(a,b) = a \cdot b \quad \forall b \in \mathbb{N}^+$.

Anfang: $f(a,1) = a = a \cdot 1$

Hypothese: $f(a,b') = a \cdot b' \quad \forall 0 < b' \leq b$

Schritt: $f(a,b') = a \cdot b' \quad \forall 0 < b' \leq b \overset{!}{\Rightarrow} f(a,b+1) = a \cdot (b+1)$

$$f(a,b+1) = \begin{cases} f(2a, \overbrace{\frac{b+1}{2}}^{0<\cdot\leq b}) \overset{i.H.}{=} a \cdot (b+1) & \text{falls } b > 0 \text{ ungerade}, \\ a + f(2a, \underbrace{\frac{b}{2}}_{0<\cdot<b}) \overset{i.H.}{=} a + a \cdot b & \text{falls } b > 0 \text{ gerade}. \end{cases}$$

■

[Code-Umformung: Endrekursion]

Die Rekursion lässt sich *endrekursiv* schreiben

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b){
  if(b==1)
    return a;
  else if (b%2 == 0)
    return f(2*a, b/2);
  else
    return a + f(2*a, (b−1)/2);
}
```

→

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b){
  if(b==1)
    return a;
  int z=0;
  if (b%2 != 0){
    −−b;
    z=a;
  }
  return z + f(2*a, b/2);
}
```

[Code-Umformung: Endrekursion $\Rightarrow$ Iteration]

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b){
  if(b==1)
    return a;
  int z=0;
  if (b%2 != 0){
    --b;
    z=a;
  }
  return z + f(2*a, b/2);
}
```

```
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b != 1) {
    int z = 0;
    if (b % 2 != 0){
      --b;
      z = a;
    }
    res += z;
    a *= 2; // neues a
    b /= 2; // neues b
  }
  res += a; // Basisfall b=1
  return res;
}
```


[Code-Umformung: Vereinfachen]

```
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b != 1) {
    int z = 0;
    if (b % 2 != 0){
      --b;   ⟶ Teil der Division
      z = a; ⟶ Direkt in res
    }
    res += z;
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  res += a; ⟶ in den Loop
  return res;
}
```

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b % 2 != 0)
      res += a;
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```


Korrektheit: Argumentation mit Invarianten!

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b % 2 != 0){
      res += a;
      --b;
    }
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Sei $x := a \cdot b$.

Hier gilt $x = \boxed{a \cdot b + res}$

Wenn hier $x = a \cdot b + res$ ...

... dann auch hier $x = a \cdot b + res$
b gerade

Hier gilt $x = a \cdot b + res$
Hier gilt $x = a \cdot b + res$ und $b = 0$
Also $res = x$.

Zusammenfassung

Der Ausdruck $a \cdot b + res$ ist eine *Invariante*.

- Werte von a, b, res ändern sich, aber die Invariante bleibt "im Wesentlichen" unverändert: Invariante vorübergehend durch eine Anweisung zerstört, aber dann darauf wieder hergestellt. Betrachtet man solche Aktionsfolgen als atomar, bleibt der Wert tatsächlich invariant
- Insbesondere erhält die Schleife die Invariante (*Schleifeninvariante*), sie wirkt dort wie der Induktionsschritt bei der vollständigen Induktion
- Invarianten sind offenbar mächtige Beweishilfsmittel!

[Weiteres Kürzen]

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b % 2 != 0){
      res += a;
      --b;
    }
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    res += a * (b%2);
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```


[Analyse]

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    res += a * (b%2);
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Altägyptische Multiplikation entspricht der Schulmethode zur Basis 2.

1	0	0	1	$\times$	1	0	1	1	
					1	0	0	1	(9)
				1	0	0	1		(18)
				1	1	0	1	1	
		1	0	0	1				(72)
		1	1	0	0	0	1	1	(99)

Effizienz

Frage: Wie lange dauert eine Multiplikation von a und b?

- Mass für die Effizienz
  - Gesamtzahl der elementaren Operationen: Verdoppeln, Halbieren, Test auf "gerade", Addition
  - Im rekursiven wie im iterativen Code: maximal 6 Operationen pro Aufruf bzw. Durchlauf
- Wesentliches Kriterium:
  - Anzahl rekursiver Aufrufe oder
  - Anzahl Schleifendurchläufe(im iterativen Fall)
- $\frac{b}{2^n} \leq 1$ gilt für $n \geq \log_2 b$. Also nicht mehr als $6\lceil \log_2 b \rceil$ elementare Operationen.

3.2 Schnelle Multiplikation von Zahlen

[Ottman/Widmayer, Kap. 1.2.3]

Beispiel 2: Multiplikation grosser Zahlen

Primarschule:

	a	b		c	d	
	6	2	$\cdot$	3	7	
				1	4	$d \cdot b$
			4	2		$d \cdot a$
				6		$c \cdot b$
		1	8			$c \cdot a$
$=$		2	2	9	4	

$2 \cdot 2 = 4$ einstellige Multiplikationen. $\Rightarrow$ Multiplikation zweier n-stelliger Zahlen: n^2 einstellige Multiplikationen

Beobachtung

$$\begin{aligned} ab \cdot cd &= (10 \cdot a + b) \cdot (10 \cdot c + d) \\ &= 100 \cdot a \cdot c + 10 \cdot a \cdot c \\ &\quad + 10 \cdot b \cdot d + b \cdot d \\ &\quad + 10 \cdot (a - b) \cdot (d - c) \end{aligned}$$

Verbesserung?

	a	b		c	d	
	6	2	$\cdot$	3	7	
				1	4	$d \cdot b$
			1	4		$d \cdot b$
			1	6		$(a - b) \cdot (d - c)$
			1	8		$c \cdot a$
		1	8			$c \cdot a$
$=$		2	2	9	4	

$\rightarrow 3$ einstellige Multiplikationen.

Grosse Zahlen

$$6237 \cdot 5898 = \underbrace{62}_{a'}\underbrace{37}_{b'} \cdot \underbrace{58}_{c'}\underbrace{98}_{d'}$$

Rekursive / induktive Anwendung: $a' \cdot c'$, $a' \cdot d'$, $b' \cdot c'$ und $c' \cdot d'$ wie oben berechnen.

$\rightarrow 3 \cdot 3 = 9$ statt 16 einstellige Multiplikationen.

Verallgemeinerung

Annahme: zwei n-stellige Zahlen, $n = 2^k$ für ein k.

$$\begin{aligned}(10^{n/2}a + b) \cdot (10^{n/2}c + d) = 10^n \cdot a \cdot c + 10^{n/2} \cdot a \cdot c \\ + 10^{n/2} \cdot b \cdot d + b \cdot d \\ + 10^{n/2} \cdot (a - b) \cdot (d - c)\end{aligned}$$

Rekursive Anwendung dieser Formel: Algorithmus von Karatsuba und Ofman (1962).

Analyse

$M(n)$: Anzahl einstelliger Multiplikationen.

Rekursive Anwendung des obigen Algorithmus $\Rightarrow$ Rekursionsgleichung:

$$M(2^k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0, \\ 3 \cdot M(2^{k-1}) & \text{falls } k > 0. \end{cases}$$

Teleskopieren

Iteratives Einsetzen der Rekursionsformel zum Lösen der Rekursionsgleichung.

$$\begin{aligned}M(2^k) &= 3 \cdot M(2^{k-1}) = 3 \cdot 3 \cdot M(2^{k-2}) = 3^2 \cdot M(2^{k-2}) \\ &= \ldots \\ &\stackrel{!}{=} 3^k \cdot M(2^0) = 3^k.\end{aligned}$$

Beweis: Vollständige Induktion

Hypothese H:

$$M(2^k) = 3^k.$$

Induktionsanfang ($k = 0$):

$$M(2^0) = 3^0 = 1. \quad \checkmark$$

Induktionsschritt ($k \to k + 1$):

$$M(2^{k+1}) \stackrel{\text{def}}{=} 3 \cdot M(2^k) \stackrel{\text{H}}{=} 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}.$$

■

Vergleich

Primarschulmethode: n^2 einstellige Multiplikationen.

Karatsuba/Ofman:

$$M(n) = 3^{\log_2 n} = (2^{\log_2 3})^{\log_2 n} = 2^{\log_2 3 \log_2 n} = n^{\log_2 3} \approx n^{1.58}.$$

Beispiel: 1000-stellige Zahl: $1000^2/1000^{1.58} \approx 18$.

Bestmöglicher Algorithums?

Wir kennen nun eine obere Schranke $n^{\log_2 3}$.

Es gibt praktisch (für grosses n) relevante, schnellere Algorithmen. Beispiel: Schönhage-Strassen-Algorithmus (1971) basierend auf schneller Fouriertransformation mit Laufzeit $\mathcal{O}(n \log n \cdot \log\log n)$. Die beste obere Schranke ist nicht bekannt.

Untere Schranke: n. Jede Ziffer muss zumindest einmal angeschaut werden.

Anhang: Asymptotik mit Additionen und Shifts

Bei jeder Multiplikation zweier n-stelliger Zahlen kommt auch noch eine konstante Anzahl Additionen, Subtraktionen und Shifts dazu

Additionen, Subtraktionen und Shifts von n stelligen Zahlen kosten $\mathcal{O}(n)$

Daher ist die asymptotische Laufzeit eigentlich (mit geeignetem $c > 1$) bestimmt durch die folgende Rekurrenz

$$T(n) = \begin{cases} 3 \cdot T\left(\frac{1}{2}n\right) + c \cdot n & \text{falls } n > 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anhang: Asymptotik mit Additionen und Shifts

Annahme: $n = 2^k$, $k > 0$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 3 \cdot T\left(2^{k-1}\right) + c \cdot 2^k \\ &= 3 \cdot (3 \cdot T(2^{k-2}) + c \cdot 2^{k-1}) + c \cdot 2^k \\ &= 3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot T(2^{k-3}) + c \cdot 2^{k-2}) + c \cdot 2^{k-1}) + c \cdot 2^k \\ &= 3 \cdot (3 \cdot (...(3 \cdot T(2^{k-k}) + c \cdot 2^1)...) + c \cdot 2^{k-1}) + c \cdot 2^k \\ &= 3^k \cdot T(1) + c \cdot 3^{k-1}2^1 + c \cdot 3^{k-2}2^2 + ... + c \cdot 3^0 2^k \\ &\leq c \cdot 3^k \cdot (1 + 2/3 + (2/3)^2 + ... + (2/3)^k) \end{aligned}$$

Die geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{k} \varrho^i$ mit $\varrho = 2/3$ konvergiert für $k \to \infty$ gegen $\frac{1}{1-\varrho} = 3$.

Somit $T(2^k) \leq c \cdot 3^k \cdot 3 \in \Theta(3^k) = \Theta(3^{\log_2 n}) = \Theta(n^{\log_2 3})$.

3.3 Maximum Subarray Problem

Algorithmenentwurf – Maximum Subarray Problem [Ottman/Widmayer, Kap. 1.3]
Divide and Conquer [Ottman/Widmayer, Kap. 1.2.2. S.9; Cormen et al, Kap. 4-4.1]

Algorithmenentwurf

Induktive Entwicklung eines Algorithmus: Zerlegung in Teilprobleme, Verwendung der Lösungen der Teilproblem zum Finden der endgültigen Lösung.

Ziel: Entwicklung des asymptotisch effizientesten (korrekten) Algorithmus.

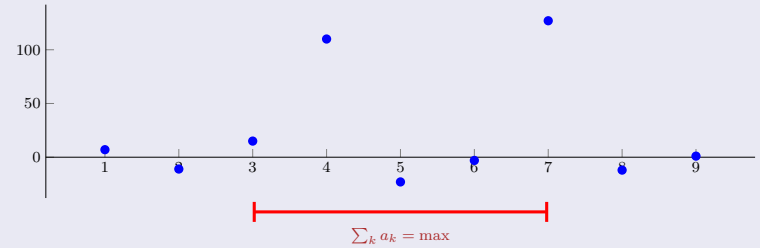
Effizienz hinsichtlich der Laufzeitkosten (# Elementaroperationen) oder / und Speicherbedarf.

Maximum Subarray Problem

Gegeben: ein Array von n reellen Zahlen $(a_1, \ldots, a_n)$.

Gesucht: Teilstück $[i, j]$, $1 \leq i \leq j \leq n$ mit maximaler positiver Summe $\sum_{k=i}^{j} a_k$.

Beispiel: $a = (7, -11, 15, 110, -23, -3, 127, -12, 1)$



Naiver Maximum Subarray Algorithmus

Input: Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Output: I, J mit $\sum_{k=I}^{J} a_k$ maximal.

$M \leftarrow 0$; $I \leftarrow 1$; $J \leftarrow 0$
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  for $j \in \{i, \ldots, n\}$ **do**
    $m = \sum_{k=i}^{j} a_k$
    if $m > M$ **then**
      $M \leftarrow m$; $I \leftarrow i$; $J \leftarrow j$
return I, J

Analyse

Theorem

Der naive Algorithmus für das Maximum Subarray Problem führt $\Theta(n^3)$ Additionen durch.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(j-i+1) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(j+1) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-i+1} j = \sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i+1)(n-i+2)}{2}$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\frac{i\cdot(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(2n+1)(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \Theta(n^3).$$

■

Beobachtung

$$\sum_{k=i}^{j} a_k = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{j} a_k\right)}_{S_j} - \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{i-1} a_k\right)}_{S_{i-1}}$$

Präfixsummen

$$S_i := \sum_{k=1}^{i} a_k.$$

Maximum Subarray Algorithmus mit Präfixsummen

Input: Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Output: I, J mit $\sum_{k=J}^{J} a_k$ maximal.

```
S_0 ← 0
for i ∈ {1,...,n} do // Präfixsumme
    S_i ← S_{i-1} + a_i
M ← 0; I ← 1; J ← 0
for i ∈ {1,...,n} do
    for j ∈ {i,...,n} do
        m = S_j − S_{i-1}
        if m > M then
            M ← m; I ← i; J ← j
```


Analyse

Theorem

Der Präfixsummen Algorithmus für das Maximum Subarray Problem führt $\Theta(n^2)$ Additionen und Subtraktionen durch.

Beweis:

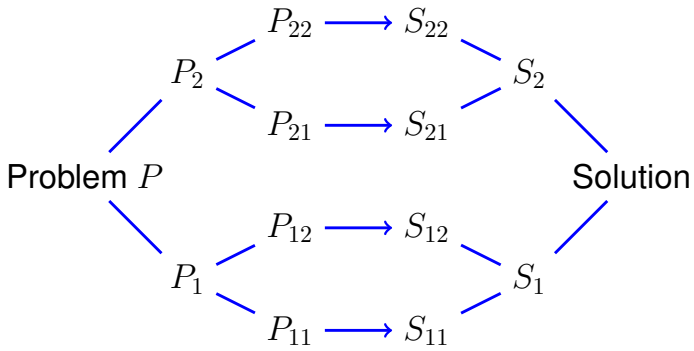
$$\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 1 = n + \sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = n + \sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$$

■

divide et impera

Teile und (be)herrsche (engl. divide and conquer)

Zerlege das Problem in Teilprobleme, deren Lösung zur vereinfachten Lösung des Gesamtproblems beitragen.



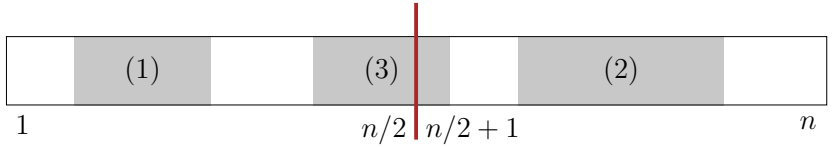
Maximum Subarray – Divide

- Divide: Teile das Problem in zwei (annähernd) gleiche Hälften auf: $(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_{\lfloor n/2 \rfloor}, \quad a_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, \ldots, a_1)$
- Vereinfachende Annahme: $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Maximum Subarray – Conquer

Sind i, j die Indizes einer Lösung $\Rightarrow$ Fallunterscheidung:

1. Lösung in linker Hälfte $1 \leq i \leq j \leq n/2 \Rightarrow$ Rekursion (linke Hälfte)
2. Lösung in rechter Hälfte $n/2 < i \leq j \leq n \Rightarrow$ Rekursion (rechte Hälfte)
3. Lösung in der Mitte $1 \leq i \leq n/2 < j \leq n \Rightarrow$ Nachfolgende Beobachtung



Maximum Subarray – Beobachtung

Annahme: Lösung in der Mitte $1 \leq i \leq n/2 < j \leq n$

$$
\begin{aligned}
S_{\max} &= \max_{\substack{1 \leq i \leq n/2 \\ n/2 < j \leq n}} \sum_{k=i}^{j} a_k = \max_{\substack{1 \leq i \leq n/2 \\ n/2 < j \leq n}} \left(\sum_{k=i}^{n/2} a_k + \sum_{k=n/2+1}^{j} a_k \right) \\
&= \max_{1 \leq i \leq n/2} \sum_{k=i}^{n/2} a_k + \max_{n/2 < j \leq n} \sum_{k=n/2+1}^{j} a_k \\
&= \max_{1 \leq i \leq n/2} \underbrace{S_{n/2} - S_{i-1}}_{\text{Suffixsumme}} + \max_{n/2 < j \leq n} \underbrace{S_j - S_{n/2}}_{\text{Präfixsumme}}
\end{aligned}
$$

Maximum Subarray Divide and Conquer Algorithmus

Input: Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Output: Maximales $\sum_{k=i'}^{j'} a_k$.
if $n = 1$ **then**
  return $\max\{a_1, 0\}$
else
  Unterteile $a = (a_1, \ldots, a_n)$ in $A_1 = (a_1, \ldots, a_{n/2})$ und $A_2 = (a_{n/2+1}, \ldots, a_n)$
  Berechne rekursiv beste Lösung W_1 in A_1
  Berechne rekursiv beste Lösung W_2 in A_2
  Berechne grösste Suffixsumme S in A_1
  Berechne grösste Präfixsumme P in A_2
  Setze $W_3 \leftarrow S + P$
  return $\max\{W_1, W_2, W_3\}$

Analyse

Theorem
Der Divide and Conquer Algorithmus für das Maximum Subarray Sum Problem führt $\Theta(n \log n)$ viele Additionen und Vergleiche durch.

Analyse

Input: Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Output: Maximales $\sum_{k=i'}^{j'} a_k$.
if $n = 1$ **then**
$\Theta(1)$ **return** $\max\{a_1, 0\}$
else
$\Theta(1)$ Unterteile $a = (a_1, \ldots, a_n)$ in $A_1 = (a_1, \ldots, a_{n/2})$ und $A_2 = (a_{n/2+1}, \ldots, a_n)$
$T(n/2)$ Berechne rekursiv beste Lösung W_1 in A_1
$T(n/2)$ Berechne rekursiv beste Lösung W_2 in A_2
$\Theta(n)$ Berechne grösste Suffixsumme S in A_1
$\Theta(n)$ Berechne grösste Präfixsumme P in A_2
$\Theta(1)$ Setze $W_3 \leftarrow S + P$
$\Theta(1)$ **return** $\max\{W_1, W_2, W_3\}$

Analyse

Rekursionsgleichung

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{falls } n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + a \cdot n & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

Analyse

Mit $n = 2^k$:

$$\overline{T}(k) = \begin{cases} c & \text{falls } k = 0 \\ 2\overline{T}(k-1) + a \cdot 2^k & \text{falls } k > 0 \end{cases}$$

Lösung:

$$\overline{T}(k) = 2^k \cdot c + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \cdot a \cdot 2^{k-i} = c \cdot 2^k + a \cdot k \cdot 2^k = \Theta(k \cdot 2^k)$$

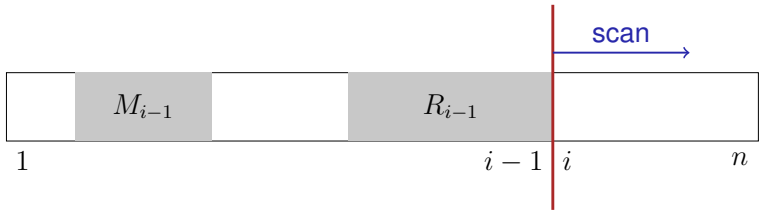
also

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

■

Maximum Subarray Sum Problem – Induktiv

Annahme: Maximaler Wert M_{i-1} der Subarraysumme für $(a_1, \ldots, a_{i-1})$ $(1 < i \leq n)$ bekannt.



a_i: erzeugt höchstens Intervall am Rand (Präfixsumme).

$R_{i-1} \Rightarrow R_i = \max\{R_{i-1} + a_i, 0\}$

Induktiver Maximum Subarray Algorithmus

Input: Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Output: $\max\{0, \max_{i,j} \sum_{k=i}^{j} a_k\}$.

$M \leftarrow 0$
$R \leftarrow 0$
for $i = 1 \ldots n$ **do**
  $R \leftarrow R + a_i$
  if $R < 0$ **then**
    $R \leftarrow 0$
  if $R > M$ **then**
    $M \leftarrow R$
return M;

Analyse

Theorem

Der induktive Algorithmus für das Maximum Subarray Sum Problem führt $\Theta(n)$ viele Additionen und Vergleiche durch.

Komplexität des Problems?

Geht es besser als $\Theta(n)$?

Jeder korrekte Algorithmus für das Maximum Subarray Sum Problem muss jedes Element im Algorithmus betrachten.

Annahme: der Algorithmus betrachtet nicht a_i.

1. Lösung des Algorithmus enthält a_i. Wiederholen den Algorithmus mit genügend kleinem a_i, so dass die Lösung den Punkt nicht enthalten hätte dürfen.
2. Lösung des Algorithmus enthält a_i nicht. Wiederholen den Algorithmus mit genügend grossem a_i, so dass die Lösung a_i hätten enthalten müssen.

Komplexität des Maximum Subarray Sum Problems

Theorem

Das Maximum Subarray Sum Problem hat Komplexität $\Theta(n)$.

Beweis: Induktiver Algorithmus mit asymptotischer Laufzeit $\mathcal{O}(n)$.
Jeder Algorithmus hat Laufzeit $\Omega(n)$.
Somit ist die Komplexität $\Omega(n) \cap \mathcal{O}(n) = \Theta(n)$. ■

3.4 Anhang

Herleitung einiger mathematischen Formeln

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Trick:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 - (i-1)^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = n^3$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 - (i-1)^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 - i^3 + 3i^2 - 3i + 1 = n - \frac{3}{2} n \cdot (n+1) + 3 \sum_{i=0}^{n} i^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) \in \Theta(n^3)$$

Kann einfach verallgemeinert werden: $\sum_{i=1}^{n} i^k \in \Theta(n^{k+1})$.

Geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} \rho^i \stackrel{!}{=} \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \rho^i \cdot (1-\varrho) &= \sum_{i=0}^{n} \rho^i - \sum_{i=0}^{n} \rho^{i+1} = \sum_{i=0}^{n} \rho^i - \sum_{i=1}^{n+1} \rho^i \\ &= \rho^0 - \rho^{n+1} = 1-\rho^{n+1}.\end{aligned}$$

Für $0 \leq \rho < 1$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \frac{1}{1-\rho}$$