26. Flüsse in Netzen

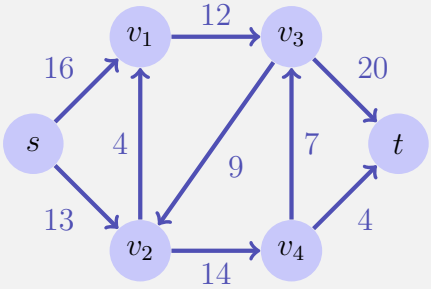
Flussnetzwerk, Maximaler Fluss, Schnitt, Restnetzwerk, Max-flow Min-cut Theorem, Ford-Fulkerson Methode, Edmonds-Karp Algorithmus, Maximales Bipartites Matching [Ottman/Widmayer, Kap. 9.7, 9.8.1], [Cormen et al, Kap. 26.1-26.3]

Motivation

- Modelliere Fluss von Flüssigkeiten, Bauteile auf Fliessbändern, Strom in elektrischen Netwerken oder Information in Kommunikationsnetzwerken.
- Konnektivität von Kommunikationsnetzwerken, Bipartites Matching, Zirkulationen, Scheduling, Image Segmentation, Baseball Eliminination...

Flussnetzwerk

- *Flussnetzwerk* $G = (V, E, c)$: gerichteter Graph mit *Kapazitäten*
- Antiparallele Kanten verboten: $(u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \notin E$.
- Fehlen einer Kante (u, v) auch modelliert durch $c(u, v) = 0$.
- *Quelle* s und *Senke* t: spezielle Knoten. Jeder Knoten v liegt auf einem Pfad zwischen s und t : $s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$

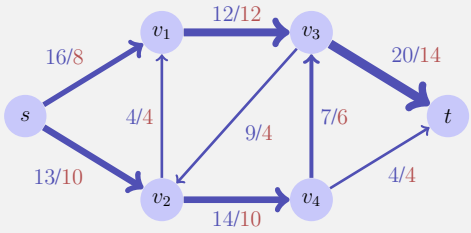


Fluss

Ein *Fluss* $f : V \times V \to \mathbb{R}$ erfüllt folgende Bedingungen:

- *Kapazitätsbeschränkung*:
  Für alle $u, v \in V$: $f(u, v) \leq c(u, v)$.
- *Schiefsymmetrie*:
  Für alle $u, v \in V$: $f(u, v) = -f(v, u)$.
- *Flusserhaltung*:
  Für alle $u \in V \setminus \{s, t\}$:

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = 0.$$



Wert w des Flusses:
$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$.
Hier $|f| = 18$.

Wie gross kann ein Fluss sein?

Begrenzende Faktoren: Schnitte

- *s von t trennender Schnitt*: Partitionierung von V in S und T mit $s \in S, t \in T$.
- *Kapazität* eines Schnittes: $c(S,T) = \sum_{v \in S, v' \in T} c(v,v')$
- *Minimaler Schnitt*: Schnitt mit minimaler Kapazität.
- *Fluss über Schnitt*: $f(S,T) = \sum_{v \in S, v' \in T} f(v,v')$

Implizites Summieren

Notation: Seien $U, U' \subseteq V$

$$f(U, U') := \sum_{\substack{u \in U \\ u' \in U'}} f(u, u'), \qquad f(u, U') := f(\{u\}, U')$$

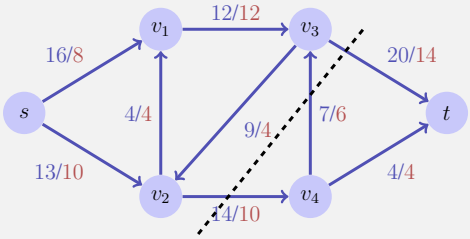
Somit

- $|f| = f(s, V)$
- $f(U, U) = 0$
- $f(U, U') = -f(U', U)$
- $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$, wenn $X \cap Y = \emptyset$.
- $f(R, V) = 0$ wenn $R \cap \{s, t\} = \emptyset$. [Flusserhaltung!]

Wie gross kann ein Fluss sein?

Es gilt für jeden Fluss und jeden Schnitt, dass $f(S,T) = |f|$:

$$f(S,T) = f(S,V) - \underbrace{f(S,S)}_{0} = f(S,V)$$
$$= f(s,V) + f(\underbrace{S - \{s\}}_{\not\ni t, \not\ni s}, V) = |f|.$$

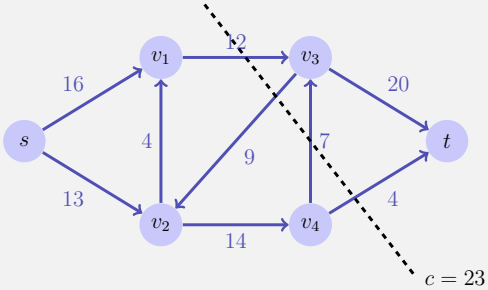


Maximaler Fluss ?

Es gilt insbesondere für alle Schnitte (S, T) von V.

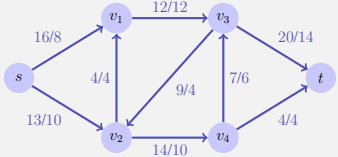
$$|f| \leq \sum_{v \in S, v' \in T} c(v, v') = c(S, T)$$

Werden sehen, dass Gleicheit gilt für $\min_{S,T} c(S, T)$.



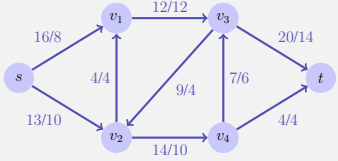
Maximaler Fluss ?

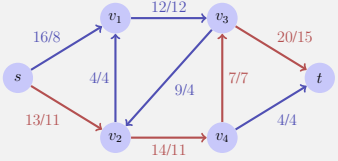
Naives Vorgehen:



Maximaler Fluss ?

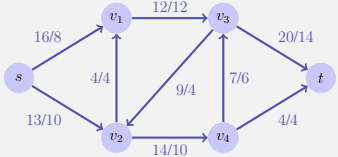
Naives Vorgehen:

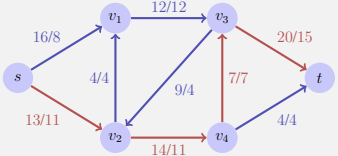


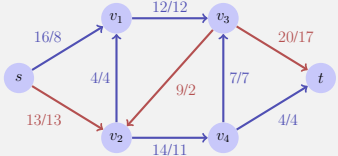


Maximaler Fluss ?

Naives Vorgehen:

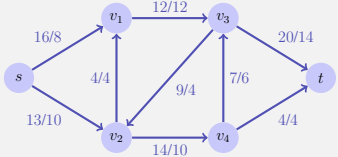


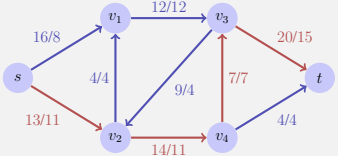


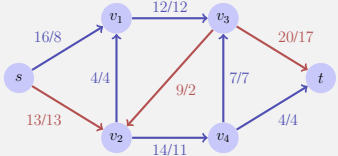


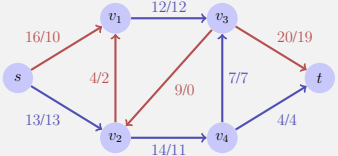
Maximaler Fluss ?

Naives Vorgehen:



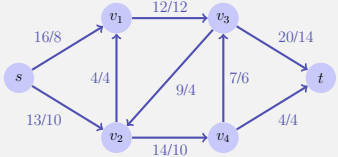


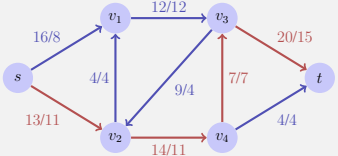


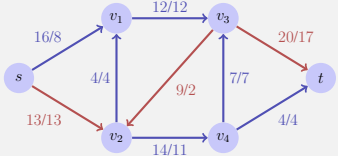


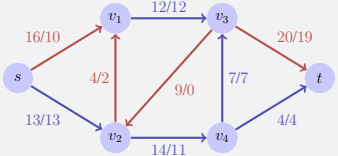
Maximaler Fluss ?

Naives Vorgehen:









Folgerung: Greedy Flusserhöhung löst das Problem nicht.

Die Ford-Fulkerson Methode

- Starte mit $f(u, v) = 0$ für alle $u, v \in V$
- Bestimme Restnetzwerk* G_f und Erweiterungspfad in G_f
- Erhöhe Fluss über den Erweiterungspfad*
- Wiederholung bis kein Erweiterungspfad mehr vorhanden.

$$
\begin{aligned}
G_f &:= (V, E_f, c_f) \\
c_f(u, v) &:= c(u, v) - f(u, v) \quad \forall u, v \in V \\
E_f &:= \{(u, v) \in V \times V | c_f(u, v) > 0\}
\end{aligned}
$$

*Wird im Folgenden erklärt

Flusserhöhung, negativ

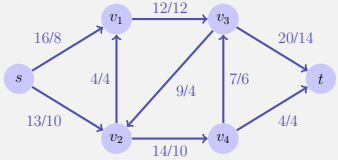
Sei ein Fluss f im Netzwerk gegeben.

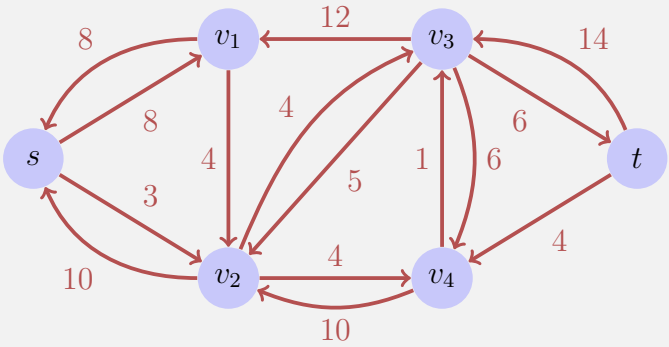
Erkenntnis:

- Flusserhöhung in Richtung einer Kante möglich, wenn Fluss entlang der Kante erhöht werden kann, also wenn $f(u, v) < c(u, v)$.
  Restkapazität $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v) > 0$.
- Flusserhöhung *entgegen* der Kantenrichtung möglich, wenn Fluss entlang der Kante verringert werden kann, also wenn $f(u, v) > 0$.
  Restkapazität $c_f(v, u) = f(u, v) > 0$.

Restnetzwerk

Restnetzwerk G_f gegeben durch alle Kanten mit Restkapazität:





Restnetzwerke haben dieselben Eigenschaften wie Flussnetzwerke, ausser dass antiparallele Kapazitäten-Kanten zugelassen sind.

Beobachtung

Theorem

Sei $G = (V, E, c)$ ein Flussnetzwerk mit Quelle s und Senke t und f ein Fluss in G. Sei G_f das dazugehörige Restnetzwerk und sei f' ein Fluss in G_f. Dann definiert $f \oplus f'$ mit

$$(f \oplus f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v)$$

einen Fluss in G mit Wert $|f| + |f'|$.

Beweis

$f \oplus f'$ ist ein Fluss in G:

- Kapazitätsbeschränkung

$$(f \oplus f')(u,v) = f(u,v) + \underbrace{f'(u,v)}_{\leq c(u,v) - f(u,v)} \leq c(u,v)$$

- Schiefsymmetrie

$$(f \oplus f')(u,v) = -f(v,u) + -f'(v,u) = -(f \oplus f')(v,u)$$

- Flusserhaltung $u \in V - \{s,t\}$:

$$\sum_{v \in V} (f \oplus f')(u,v) = \sum_{v \in V} f(u,v) + \sum_{v \in V} f'(u,v) = 0$$

Beweis

Wert von $f \oplus f'$

$$\begin{aligned} |f \oplus f'| &= (f \oplus f')(s, V) \\ &= \sum_{u \in V} f(s,u) + f'(s,u) \\ &= f(s,V) + f'(s,V) \\ &= |f| + |f'| \end{aligned}$$

■

Erweiterungspfade

Erweiterungspfad p: einfacher Pfad von s nach t im Restnetzwerk G_f.

Restkapazität $c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \text{ Kante in } p\}$

Fluss in G_f

Theorem

Die Funktion $f_p : V \times V \to \mathbb{R}$*,*

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{wenn } (u,v) \text{ Kante in } p \\ -c_f(p) & \text{wenn } (v,u) \text{ Kante in } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein Fluss in G_f *mit dem Wert* $|f_p| = c_f(p) > 0$*.*

f_p ist ein Fluss (leicht nachprüfbar). Es gibt genau einen Knoten $u \in V$ mit $(s,u) \in p$. Somit $|f_p| = \sum_{v \in V} f_p(s,v) = f_p(s,u) = c_f(p)$.

Folgerung

Strategie für den Algorithmus:

Mit einem Erweiterungspfad p in G_f definiert $f \oplus f_p$ einen neuen Fluss mit Wert $|f \oplus f_p| = |f| + |f_p| > |f|$.

Max-Flow Min-Cut Theorem

Theorem

Wenn f ein Fluss in einem Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ mit Quelle s und Senke t is, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist ein maximaler Fluss in G*
2. *Das Restnetzwerk G_f enthält keine Erweiterungspfade*
3. *Es gilt $|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T) von G.*

Beweis

- $(3) \Rightarrow (1)$:
  Es gilt $|f| \leq c(S,T)$ für alle Schnitte S, T. Aus $|f| = c(S,T)$ folgt also $|f|$ maximal.
- $(1) \Rightarrow (2)$:
  f maximaler Fluss in G. Annahme: G_f habe einen Erweiterungsfad. Dann gilt $|f \oplus f_p| = |f| + |f_p| > |f|$.
  Widerspruch.

Beweis $(2) \Rightarrow (3)$

Annahme: G_f habe keinen Erweiterungsfad

Definiere $S = \{v \in V :$ es existiert Pfad $s \rightsquigarrow v$ in $G_f\}$.

$(S, T) := (S, V \setminus S)$ ist ein Schnitt: $s \in S, t \in T$.

Sei $u \in S$ und $v \in T$. Dann $c_f(u, v) = 0$, also
$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v) = 0$. Somit $f(u, v) = c(u, v)$.

Somit

$$|f| = f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) = C(S, T).$$

Algorithmus Ford-Fulkerson(G, s, t)

Input: Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$
Output: Maximaler Fluss f.

for $(u, v) \in E$ **do**
    $f(u, v) \leftarrow 0$

while Existiert Pfad $p : s \rightsquigarrow t$ im Restnetzwerk G_f **do**
    $c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$
    foreach $(u, v) \in p$ **do**
        $f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(p)$
        $f(v, u) \leftarrow f(v, u) - c_f(p)$

Praktische Anmerkung

In einer Implementation des Ford-Fulkerson Algorithmus werden die negativen Flusskanten normalerweise nicht gespeichert, da ihr Wert sich stets als der negierter Wert der Gegenkante ergibt.

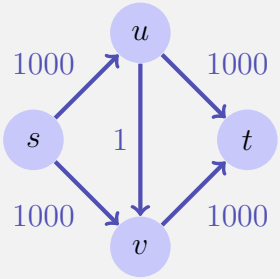
$f(u,v) \leftarrow f(u,v) + c_f(p)$
$f(v,u) \leftarrow f(v,u) - c_f(p)$

wird dann zu

if $(u,v) \in E$ **then**
    $f(u,v) \leftarrow f(u,v) + c_f(p)$
else
    $f(v,u) \leftarrow f(v,u) - c_f(p)$

Analyse

- Der Ford-Fulkerson Algorithmus muss für irrationale Kapazitäten nicht einmal terminieren! Für ganze oder rationale Zahlen terminiert der Algorithmus.
- Für ganzzahligen Fluss benötigt der Algorithmus maximal $|f_{\max}|$ Durchläufe der While-Schleife (denn der Fluss erhöht sich mindestens um 1). Suche einzelner zunehmender Weg (z.B. Tiefensuche oder Breitensuche) $\mathcal{O}(|E|)$. Also $\mathcal{O}(f_{\max}|E|)$.



Bei schlecht gewählter Strategie benötigt der Algorithmus hier bis zu 2000 Iterationen.

Edmonds-Karp Algorithmus

Wähle in der Ford-Fulkerson-Methode zum Finden eines Pfades in G_f jeweils einen Erweiterungspfad kürzester Länge (z.B. durch Breitensuche).

Edmonds-Karp Algorithmus

Theorem

Wenn der Edmonds-Karp Algorithmus auf ein ganzzahliges Flussnetzwerk $G = (V, E)$ mit Quelle s und Senke t angewendet wird, dann ist die Gesamtanzahl der durch den Algorithmus angewendete Flusserhöhungen in $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.

$\Rightarrow$ *Gesamte asymptotische Laufzeit: $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$*

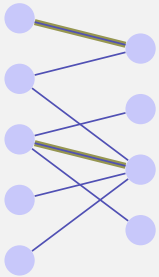
[Ohne Beweis]

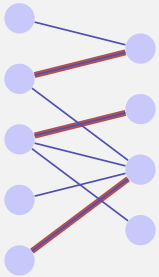
Anwendung: Maximales bipartites Matching

Gegeben: bipartiter ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

Matching M: $M \subseteq E$ so dass $|\{m \in M : v \in m\}| \leq 1$ für alle $v \in V$.

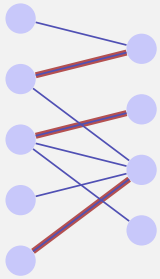
Maximales Matching M: Matching M, so dass $|M| \geq |M'|$ für jedes Matching M'.

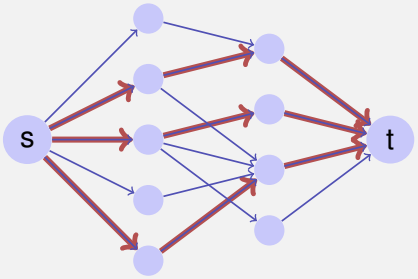




Korrespondierendes Flussnetzwerk

Konstruiere zur einer Partition L, R eines bipartiten Graphen ein korrespondierendes Flussnetzwerk mit Quelle s und Senke t, mit gerichteten Kanten von s nach L, von L nach R und von R nach t. Jede Kante bekommt Kapazität 1.





Ganzzahligkeitstheorem

Theorem

Wenn die Kapazitäten eines Flussnetzwerks nur ganzzahlige Werte anehmen, dann hat der durch Ford-Fulkerson erzeugte maximale Fluss die Eigenschaft, dass der Wert von $f(u, v)$ für alle $u, v \in V$ eine ganze Zahl ist.

[ohne Beweis]

Folgerung: Ford Fulkerson erzeugt beim zum bipartiten Graph gehörenden Flussnetzwerk ein maximales Matching $M = \{(u, v) : f(u, v) = 1\}$.