

# 25. Minimale Spannbäume

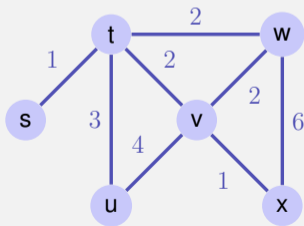
Motivation, Greedy, Algorithmus von Kruskal, Allgemeine Regeln, Union-Find Struktur, Algorithmus von Jarnik, Prim, Dijkstra, ,Algorithmus von Jarnik, Prim, Dijkstra ,Fibonacci Heaps

[Ottman/Widmayer, Kap. 9.6, 6.2, 6.1, Cormen et al, Kap. 23, 19]

# Problem

**Gegeben:** Ungerichteter, zusammenhängender, gewichteter Graph  $G = (V, E, c)$ .

**Gesucht:** Minimaler Spannbaum  $T = (V, E')$ : zusammenhängender, zyklensfreier Teilgraph  $E' \subset E$ , so dass  $\sum_{e \in E'} c(e)$  minimal.



# Beispiele von Anwendungen

- Netzwerk-Design: finde das billigste / kürzeste Netz oder Leitungssystem, welches alle Knoten miteinander verbindet.
- Approximation einer Lösung des Travelling-Salesman Problems: finde einen möglichst kurzen Rundweg, welcher jeden Knoten einmal besucht.

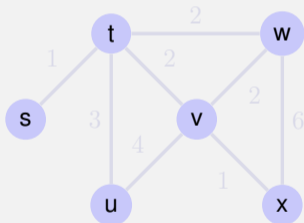
# Greedy Verfahren

Zur Erinnerung:

- Gierige Verfahren berechnen eine Lösung schrittweise, indem lokal beste Lösungen gewählt werden.
- Die meisten Probleme sind nicht mit einer greedy Strategie lösbar.
- Das Problem des Minimalen Spannbaumes kann mit einem gierigen Verfahren effizient gelöst werden.

# Greedy Idee (Kruskal, 1956)

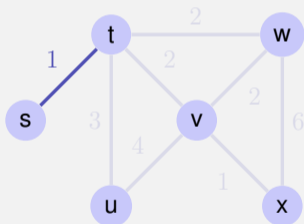
Konstruiere  $T$  indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

# Greedy Idee (Kruskal, 1956)

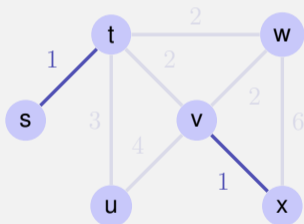
Konstruiere  $T$  indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

# Greedy Idee (Kruskal, 1956)

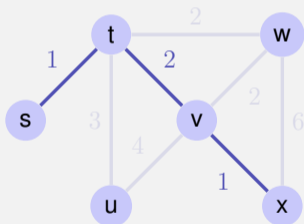
Konstruiere  $T$  indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

# Greedy Idee (Kruskal, 1956)

Konstruiere  $T$  indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.

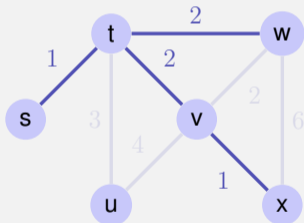


(Lösung ist nicht eindeutig.)



# Greedy Idee (Kruskal, 1956)

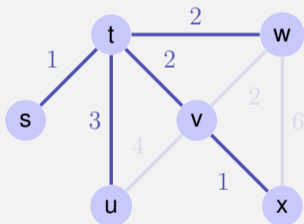
Konstruiere  $T$  indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

# Greedy Idee (Kruskal, 1956)

Konstruiere  $T$  indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

# Algorithmus MST-Kruskal( $G$ )

**Input:** Gewichteter Graph  $G = (V, E, c)$

**Output:** Minimaler Spannbaum mit Kanten  $A$ .

Sortiere Kanten nach Gewicht  $c(e_1) \leq \dots \leq c(e_m)$

$A \leftarrow \emptyset$

**for**  $k = 1$  **to**  $|E|$  **do**

**if**  $(V, A \cup \{e_k\})$  kreisfrei **then**  
         $A \leftarrow A \cup \{e_k\}$

**return**  $(V, A, c)$

# Korrektheit

Zu jedem Zeitpunkt ist  $(V, A)$  ein Wald, eine Menge von Bäumen.  
MST-Kruskal betrachtet jede Kante  $e_k$  einmal und wählt  $e_k$  oder verwirft  $e_k$

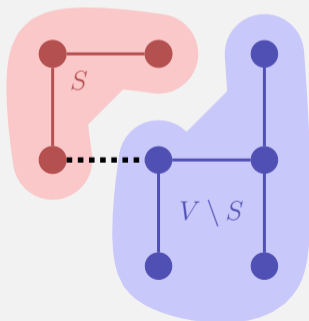
Notation (Momentaufnahme im Algorithmus)

- $A$ : Menge gewählte Kanten
- $R$ : Menge verworfener Kanten
- $U$ : Menge der noch unentschiedenen Kanten

# Schnitt

Ein Schnitt von  $G$  ist eine Partition  $S, V \setminus S$  von  $V$ . ( $S \subseteq V$ ).

Eine Kante kreuzt einen Schnitt, wenn einer Ihrer Endpunkte in  $S$  und der andere in  $V \setminus S$  liegt.



# Regeln

- 1 Auswahlregel: Wähle einen Schnitt, den keine gewählte Kante kreuzt. Unter allen unentschiedenen Kanten, welche den Schnitt kreuzen, wähle die mit minimalem Gewicht.
- 2 Verwerfregel: Wähle einen Kreis ohne verworfene Kanten. Unter allen unentschiedenen Kanten im Kreis verwerfe die mit maximalem Gewicht.

# Regeln

Kruskal wendet beide Regeln an:

- 1 Ein gewähltes  $e_k$  verbindet zwei Zusammenhangskomponenten, sonst würde ein Kreis erzeugt werden.  $e_k$  ist beim Verbinden minimal, man kann also einen Schnitt wählen, den  $e_k$  mit minimalem Gewicht kreuzt.
- 2 Ein verworfenes  $e_k$  ist Teil eines Kreises. Innerhalb des Kreises hat  $e_k$  maximales Gewicht.

# Korrektheit

## Theorem

*Jeder Algorithmus, welcher schrittweise obige Regeln anwendet bis  $U = \emptyset$  ist korrekt.*

Folgerung: MST-Kruskal ist korrekt.



# Auswahlinvariante

*Invariante:* Es gibt stets einen minimalen Spannbaum, der alle gewählten und keine der verworfenen Kanten enthält.

Wenn die beiden Regeln die Invariante erhalten, dann ist der Algorithmus sicher korrekt. Induktion:

- Zu Beginn:  $U = E, R = A = \emptyset$ . Invariante gilt offensichtlich.
- Invariante bleibt nach jedem Schritt des Algorithmus erhalten.
- Am Ende:  $U = \emptyset, R \cup A = E \Rightarrow (V, A)$  ist Spannbaum.

Beweis des Theorems: zeigen nun, dass die beiden Regeln die Invariante erhalten.

# Auswahlregel erhält Invariante

Es gibt stets einen minimalen Spannbaum  $T$ , der alle gewählten und keine der verworfenen Kanten enthält.

Wähle einen Schnitt, den keine gewählte Kante kreuzt. Unter allen unentschiedenen Kanten, welche den Schnitt kreuzen, wähle eine Kante  $e$  mit minimalem Gewicht.

- Fall 1:  $e \in T$  (fertig)
- Fall 2:  $e \notin T$ . Dann hat  $T \cup \{e\}$  einen Kreis, der  $e$  enthält. Kreis muss eine zweite Kante  $e'$  enthalten, welche den Schnitt auch kreuzt.<sup>50</sup> Da  $e' \notin R$  ist  $e' \in U$ . Somit  $c(e) \leq c(e')$  und  $T' = T \setminus \{e'\} \cup \{e\}$  ist auch minimaler Spannbaum (und  $c(e) = c(e')$ ).

---

<sup>50</sup>Ein solcher Kreis enthält mindestens einen Knoten in  $S$  und einen in  $V \setminus S$  und damit mindestens zwei Kanten zwischen  $S$  und  $V \setminus S$ .

# Verwerfregel erhält Invariante

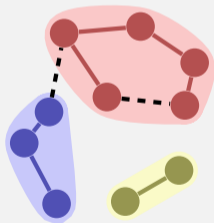
Es gibt stets einen minimalen Spannbaum  $T$ , der alle gewählten und keine der verworfenen Kanten enthält.

Wähle einen Kreis ohne verworfene Kanten. Unter allen unentschiedenen Kanten im Kreis verwerfe die Kante  $e$  mit maximalem Gewicht.

- Fall 1:  $e \notin T$  (fertig)
- Fall 2:  $e \in T$ . Entferne  $e$  von  $T$ , Das ergibt einen Schnitt. Diesen Schnitt muss eine weitere Kante  $e'$  aus dem Kreis kreuzen. Da  $c(e') \leq c(e)$  ist  $T' = T \setminus \{e\} \cup \{e'\}$  auch minimal (und  $c(e) = c(e')$ ).

# Zur Implementation

Gegeben eine Menge von Mengen  $i \equiv A_i \subset V$ . Zur Identifikation von Schnitten und Kreisen: Zugehörigkeit der beiden Endpunkte einer Kante zu einer der Mengen.



# Zur Implementation

Allgemeines Problem: Partition (Menge von Teilmengen) z.B.  
 $\{\{1, 2, 3, 9\}, \{7, 6, 4\}, \{5, 8\}, \{10\}\}$

Benötigt: Abstrakter Datentyp „Union-Find“ mit folgenden Operationen

- $\text{Make-Set}(i)$ : Hinzufügen einer neuen Menge  $i$ .
- $\text{Find}(e)$ : Name  $i$  der Menge, welche  $e$  enthält.
- $\text{Union}(i, j)$ : Vereinigung der Mengen mit Namen  $i$  und  $j$ .

# Union-Find Algorithmus MST-Kruskal( $G$ )

**Input:** Gewichteter Graph  $G = (V, E, c)$

**Output:** Minimaler Spannbaum mit Kanten  $A$ .

Sortiere Kanten nach Gewicht  $c(e_1) \leq \dots \leq c(e_m)$

$A \leftarrow \emptyset$

**for**  $k = 1$  **to**  $|V|$  **do**

$\lfloor$  MakeSet( $k$ )

**for**  $k = 1$  **to**  $m$  **do**

$(u, v) \leftarrow e_k$

**if** Find( $u$ )  $\neq$  Find( $v$ ) **then**

    Union(Find( $u$ ), Find( $v$ ))

$A \leftarrow A \cup e_k$

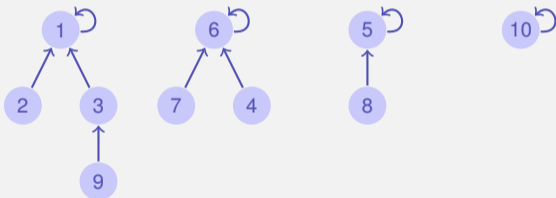
**else**

// konzeptuell:  $R \leftarrow R \cup e_k$

**return**  $(V, A, c)$

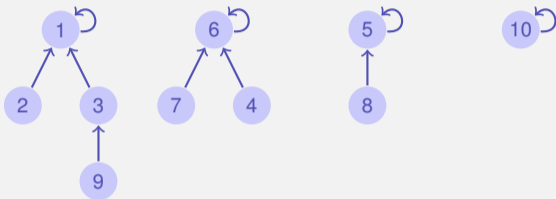
# Implementation Union-Find

Idee: Baum für jede Teilmenge in der Partition, z.B.  
 $\{\{1, 2, 3, 9\}, \{7, 6, 4\}, \{5, 8\}, \{10\}\}$



Baumwurzeln = Namen (Stellvertreter) der Mengen,  
Bäume = Elemente der Mengen

# Implementation Union-Find



Repräsentation als Array:

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parent	<b>1</b>	1	1	6	<b>5</b>	<b>6</b>	5	5	3	<b>10</b>



# Implementation Union-Find

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parent	<b>1</b>	1	1	6	<b>5</b>	<b>6</b>	5	5	3	<b>10</b>

---

**Make-Set**( $i$ )     $p[i] \leftarrow i$ ; **return**  $i$

---

**Find**( $i$ )        **while** ( $p[i] \neq i$ ) **do**  $i \leftarrow p[i]$   
                  **return**  $i$

---

**Union**( $i, j$ )<sup>51</sup>     $p[j] \leftarrow i$ ;

---

<sup>51</sup> $i$  und  $j$  müssen Namen (Wurzeln) der Mengen sein. Andernfalls verwende `Union(Find( $i$ ), Find( $j$ ))`

# Optimierung der Laufzeit für Find

Baum kann entarten: Beispiel Union(8, 7), Union(7, 6), Union(6, 5), ...

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	..
Parent	<b>1</b>	1	2	3	4	5	6	7	..

Laufzeit von Find im schlechtesten Fall in  $\Theta(n)$ .

# Optimierung der Laufzeit für Find

Idee: Immer kleineren Baum unter grösseren Baum hängen.  
Benötigt zusätzliche Grösseninformation (Array)  $g$

---

**Make-Set**( $i$ )     $p[i] \leftarrow i; g[i] \leftarrow 1; \text{return } i$

---

**Union**( $i, j$ )    **if**  $g[j] > g[i]$  **then**  $\text{swap}(i, j)$   
                   $p[j] \leftarrow i$   
                  **if**  $g[i] = g[j]$  **then**  $g[i] \leftarrow g[i] + 1$

---

$\Rightarrow$  Baumtiefe (und schlechteste Laufzeit für Find) in  $\Theta(\log n)$

# [Beobachtung]

## Theorem

*Obiges Verfahren Vereinigung nach Grösse konserviert die folgende Eigenschaft der Bäume: ein Baum mit Höhe  $h$  hat mindestens  $2^h$  Knoten.*

Unmittelbare Folgerung: Laufzeit Find =  $\mathcal{O}(\log n)$ .

# [Beweis]

Induktion: nach Voraussetzung haben Teilbäume jeweils mindestens  $2^{h_i}$  Knoten. ObdA:  
 $h_2 \leq h_1$ .

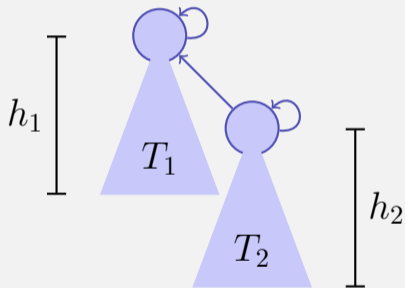
■  $h_2 < h_1$ :

$$h(T_1 \oplus T_2) = h_1 \Rightarrow g(T_1 \oplus T_2) \geq 2^{h_1}$$

■  $h_2 = h_1$ :

$$g(T_1) \geq g(T_2) \geq 2^{h_2}$$

$$\Rightarrow g(T_1 \oplus T_2) = g(T_1) + g(T_2) \geq 2 \cdot 2^{h_2} = 2^{h_2+1} = 2^{h(T_1 \oplus T_2)}$$



# Weitere Verbesserung

Bei jedem Find alle Knoten direkt an den Wurzelknoten hängen.

Find( $i$ ):

$j \leftarrow i$

**while** ( $p[i] \neq i$ ) **do**  $i \leftarrow p[i]$

**while** ( $j \neq i$ ) **do**

$t \leftarrow j$   
 $j \leftarrow p[j]$   
 $p[t] \leftarrow i$

**return**  $i$

Laufzeit: amortisiert *fast* konstant (Inverse der Ackermannfunktion).<sup>52</sup>

---

<sup>52</sup>Wird hier nicht vertieft.

# Laufzeit des Kruskal Algorithmus

- Sortieren der Kanten:  $\Theta(|E| \log |E|) = \Theta(|E| \log |V|)$ .<sup>53</sup>
  - Initialisieren der Union-Find Datenstruktur  $\Theta(|V|)$
  - $|E| \times \text{Union}(\text{Find}(x), \text{Find}(y))$ :  $\mathcal{O}(|E| \log |E|) = \mathcal{O}(|E| \log |V|)$ .
- Insgesamt  $\Theta(|E| \log |V|)$ .

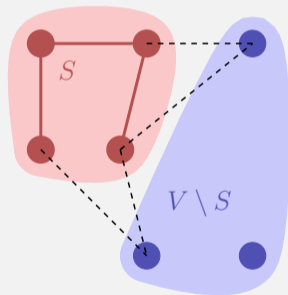
---

<sup>53</sup>da  $G$  zusammenhängend:  $|V| \leq |E| \leq |V|^2$

# Algorithmus von Jarnik (1930), Prim, Dijkstra (1959)

Idee: Starte mit einem  $v \in V$  und lasse von dort unter Verwendung der Auswahlregel einen Spannbaum wachsen:

```
A ← ∅  
S ← {v0}  
for i ← 1 to |V| do  
  Wähle billigste (u, v) mit u ∈ S, v ∉ S  
  A ← A ∪ {(u, v)}  
  S ← S ∪ {v} // (Färbung)
```



Anmerkung: man benötigt keine Union-Find Datenstruktur. Es genügt, Knoten zu färben, sobald sie zu  $S$  hinzugenommen werden.



# Laufzeit

Trivial  $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$ .

Verbesserung (wie bei Dijkstras Kürzeste Pfade):

■ Mit Min-Heap, Kosten:

- Initialisierung (Knotenfärbung)  $\mathcal{O}(|V|)$
- $|V| \times \text{ExtractMin} = \mathcal{O}(|V| \log |V|)$ ,
- $|E| \times \text{Insert oder DecreaseKey} = \mathcal{O}(|E| \log |V|)$ ,

$\mathcal{O}(|E| \cdot \log |V|)$

■ Mit Fibonacci-Heap:  $\mathcal{O}(|E| + |V| \cdot \log |V|)$ .

# Fibonacci Heaps

Datenstruktur zur Verwaltung von Elementen mit Schlüsseln.  
Operationen

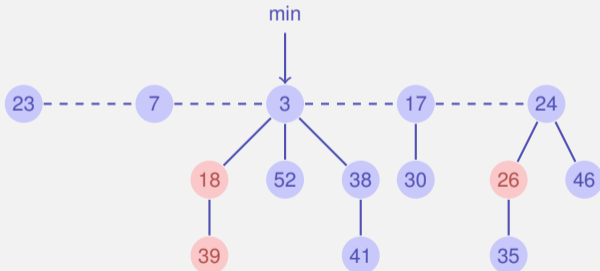
- **MakeHeap()**: Liefere neuen Heap ohne Elemente
- **Insert( $H, x$ )**: Füge  $x$  zu  $H$  hinzu
- **Minimum( $H$ )**: Liefere Zeiger auf das Element  $m$  mit minimalem Schlüssel
- **ExtractMin( $H$ )**: Liefere und entferne (von  $H$ ) Zeiger auf das Element  $m$
- **Union( $H_1, H_2$ )**: Liefere Verschmelzung zweier Heaps  $H_1$  und  $H_2$
- **DecreaseKey( $H, x, k$ )**: Verkleinere Schlüssel von  $x$  in  $H$  zu  $k$
- **Delete ( $H, x$ )**: Entferne Element  $x$  von  $H$

# Vorteil gegenüber Binary Heap?

	Binary Heap (worst-Case)	Fibonacci Heap (amortisiert)
MakeHeap	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Insert	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)$
Minimum	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
ExtractMin	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$
Union	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$
DecreaseKey	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)$
Delete	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$

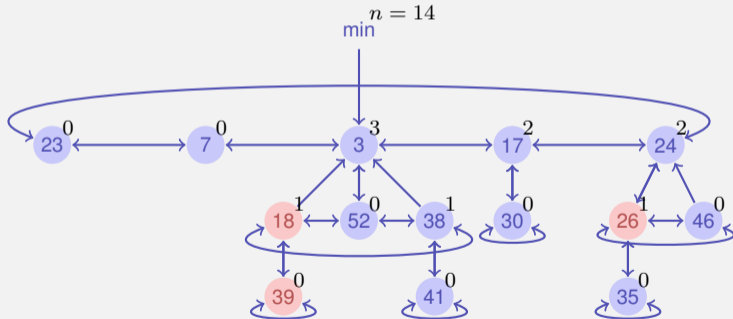
# Struktur

Menge von Bäumen, welche der Min-Heap Eigenschaft genügen.  
Markierbare Knoten.



# Implementation

Doppelt verkettete Listen von Knoten mit marked-Flag und Anzahl Kinder. Zeiger auf das minimale Element und Anzahl Knoten.



# Einfache Operationen

- MakeHeap (trivial)
- Minimum (trivial)
- Insert( $H, e$ )
  - 1 Füge neues Element in die Wurzelliste ein
  - 2 Wenn Schlüssel kleiner als Minimum, min-pointer neu setzen.
- Union ( $H_1, H_2$ )
  - 1 Wurzellisten von  $H_1$  und  $H_2$  aneinander hängen
  - 2 Min-Pointer neu setzen.
- Delete( $H, e$ )
  - 1 DecreaseKey( $H, e, -\infty$ )
  - 2 ExtractMin( $H$ )

# ExtractMin

- 1 Entferne Minimalknoten  $m$  aus der Wurzelliste
- 2 Hänge Liste der Kinder von  $m$  in die Wurzelliste
- 3 Verschmelze solange heapgeordnete Bäume gleichen Ranges, bis alle Bäume unterschiedlichen Rang haben:  
Rangarray  $a[0, \dots, n]$  von Elementen, zu Beginn leer. Für jedes Element  $e$  der Wurzelliste:
  - a Sei  $g$  der Grad von  $e$ .
  - b Wenn  $a[g] = nil$ :  $a[g] \leftarrow e$ .
  - c Wenn  $e' := a[g] \neq nil$ : Verschmelze  $e$  mit  $e'$  zu neuem  $e''$  und setze  $a[g] \leftarrow nil$ . Setze  $e''$  unmarkiert Iteriere erneut mit  $e \leftarrow e''$  vom Grad  $g + 1$ .

# DecreaseKey ( $H, e, k$ )

- 1 Entferne  $e$  von seinem Vaterknoten  $p$  (falls vorhanden) und erniedrige den Rang von  $p$  um eins.
- 2 Insert( $H, e$ )
- 3 Vermeide zu dünne Bäume:
  - a Wenn  $p = nil$ , dann fertig
  - b Wenn  $p$  unmarkiert: markiere  $p$ , fertig.
  - c Wenn  $p$  markiert: unmarkiere  $p$ , trenne  $p$  von seinem Vater  $pp$  ab und Insert( $H, p$ ). Iteriere mit  $p \leftarrow pp$ .



# Abschätzung für den Rang

## Theorem

*Sei  $p$  Knoten eines  $F$ -Heaps  $H$ . Ordnet man die Söhne von  $p$  in der zeitlichen Reihenfolge, in der sie an  $p$  durch Zusammenfügen angehängt wurden, so gilt: der  $i$ -te Sohn hat mindestens Rang  $i - 2$*

Beweis:  $p$  kann schon mehr Söhne gehabt haben und durch Abtrennung verloren haben. Als der  $i$ te Sohn  $p_i$  angehängt wurde, müssen  $p$  und  $p_i$  jeweils mindestens Rang  $i - 1$  gehabt haben.  $p_i$  kann maximal einen Sohn verloren haben (wegen Markierung), damit bleibt mindestens Rang  $i - 2$ .

# Abschätzung für den Rang

## Theorem

*Jeder Knoten  $p$  vom Rang  $k$  eines F-Heaps ist Wurzel eines Teilbaumes mit mindestens  $F_{k+1}$  Knoten. ( $F$ : Fibonacci-Folge)*

Beweis: Sei  $S_k$  Minimalzahl Nachfolger eines Knotens vom Rang  $k$  in einem F-Heap plus 1 (der Knoten selbst). Klar:  $S_0 = 1, S_1 = 2$ . Nach vorigem Theorem  $S_k \geq 2 + \sum_{i=0}^{k-2} S_i, k \geq 2$  ( $p$  und Knoten  $p_1$  jeweils 1). Für Fibonacci-Zahlen gilt (Induktion)  $F_k \geq 2 + \sum_{i=2}^k F_i, k \geq 2$  und somit (auch Induktion)  $S_k \geq F_{k+2}$ .

Fibonacci-Zahlen wachsen exponentiell ( $\mathcal{O}(\varphi^k)$ ) Folgerung: Maximaler Grad eines beliebigen Knotens im Fibonacci-Heap mit  $n$  Knoten ist  $\mathcal{O}(\log n)$ .

# Amortisierte Worst-case-Analyse Fibonacci Heap

$t(H)$ : Anzahl Bäume in der Wurzelliste von  $H$ ,  $m(H)$ : Anzahl markierte Knoten in  $H$  ausserhalb der Wurzelliste, Potentialfunktion  $\Phi(H) = t(H) + 2 \cdot m(H)$ . Zu Anfang  $\Phi(H) = 0$ . Potential immer nichtnegativ.

Amortisierte Kosten:

- **Insert**( $H, x$ ):  $t'(H) = t(H) + 1$ ,  $m'(H) = m(H)$ ,  
Potentialerhöhung 1, Amortisierte Kosten  $\Theta(1) + 1 = \Theta(1)$
- **Minimum**( $H$ ): Amortisierte Kosten = tatsächliche Kosten =  $\Theta(1)$
- **Union**( $H_1, H_2$ ): Amortisierte Kosten = tatsächliche Kosten =  $\Theta(1)$

# Amortisierte Kosten ExtractMin

- Anzahl der Bäume in der Wurzelliste  $t(H)$ .
- Tatsächliche Kosten der ExtractMin Operation:  $\mathcal{O}(\log n + t(H))$ .
- Nach dem Verschmelzen noch  $\mathcal{O}(\log n)$  Knoten.
- Anzahl der Markierungen kann beim Verschmelzen der Bäume maximal kleiner werden.
- Amortisierte Kosten von ExtractMin also maximal

$$\mathcal{O}(\log n + t(H)) + \mathcal{O}(\log n) - \mathcal{O}(t(H)) = \mathcal{O}(\log n).$$

# Amortisierte Kosten DecreaseKey

- Annahme: DecreaseKey führt zu  $c$  Abtrennungen eines Knotens von seinem Vaterknoten, tatsächliche Kosten  $\mathcal{O}(c)$
- $c$  Knoten kommen zur Wurzelliste hinzu
- Löschen von  $(c - 1)$  Markierungen, Hinzunahme maximal einer Markierung
- Amortisierte Kosten von DecreaseKey:

$$\mathcal{O}(c) + (t(H) + c) + 2 \cdot (m(H) - c + 2) - (t(H) + 2m(H)) = \mathcal{O}(1)$$