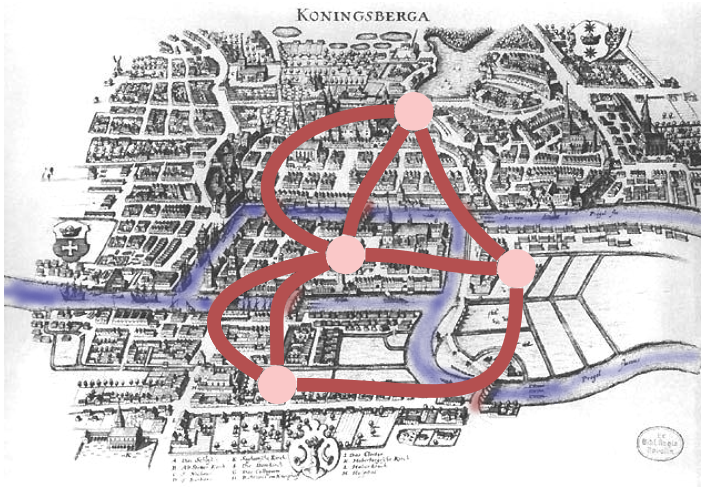
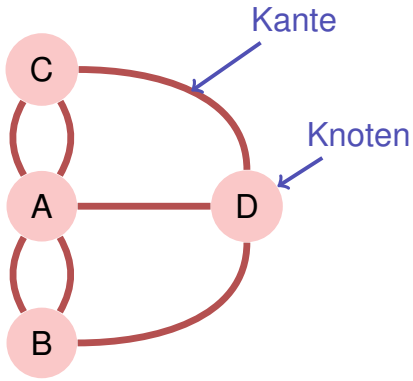
23. Graphen

Notation, Repräsentation, Traversieren (DFS, BFS), Topologisches Sortieren , Reflexive transitive Hülle, Zusammenhangskomponenten
[Ottman/Widmayer, Kap. 9.1 - 9.4,Cormen et al, Kap. 22]

Königsberg 1736



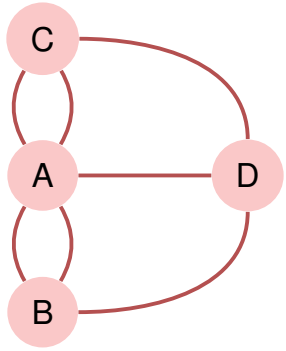
[Multi]Graph



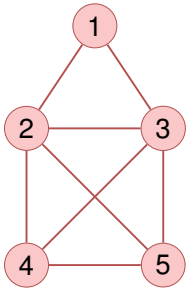
Zyklen

- Gibt es einen Rundweg durch die Stadt (den Graphen), welcher jede Brücke (jede Kante) genau einmal benutzt?
- Euler (1736): nein.
- Solcher Rundweg (*Zyklus*) heisst *Eulerscher Kreis*.
- Eulerzyklus $\Leftrightarrow$ jeder Knoten hat gerade Anzahl Kanten (jeder Knoten hat einen *geraden Grad*).

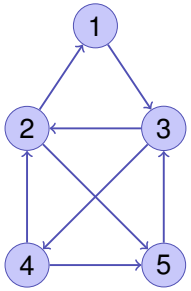
"$\Rightarrow$" ist sofort klar, "$\Leftarrow$" ist etwas schwieriger, aber auch elementar.



Notation



ungerichtet



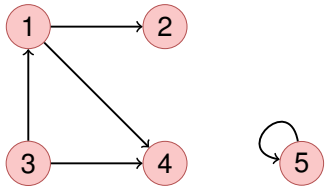
gerichtet

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{(1, 3), (2, 1), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 3)\}$

Notation

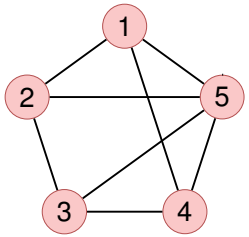
Ein *gerichteter Graph* besteht aus einer Menge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von Knoten (*Vertices*) und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von Kanten (*Edges*). Gleiche Kanten dürfen nicht mehrfach enthalten sein.



Schleife

Notation

Ein *ungerichteter Graph* besteht aus einer Menge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von Knoten und einer Menge $E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V\}$ von Kanten. Kanten dürfen nicht mehrfach enthalten sein.[46]

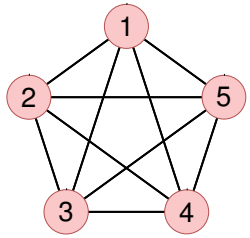


ungerichter Graph

[46] Im Gegensatz zum Eingangsbeispiel – dann Multigraph genannt.

Notation

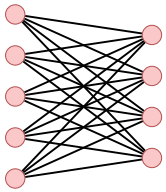
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ohne Schleifen in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist, heisst *vollständig*.



ein vollständiger ungerichter Graph

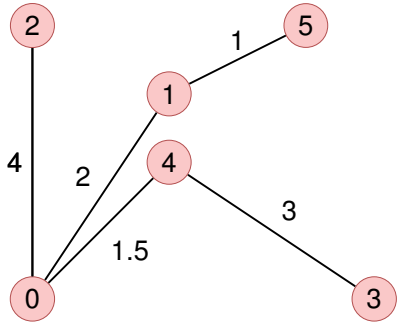
Notation

Ein Graph, bei dem V so in disjunkte U und W aufgeteilt werden kann, dass alle $e \in E$ einen Knoten in U und einen in W haben heisst *bipartit*.



Notation

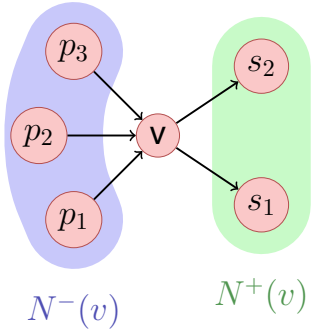
Ein *gewichteter Graph* $G = (V, E, c)$ ist ein Graph $G = (V, E)$ mit einer *Kantengewichtsfunktion* $c : E \to \mathbb{R}$. $c(e)$ heisst *Gewicht* der Kante e.



Notation

Für gerichtete Graphen $G = (V, E)$

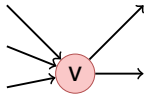
- $w \in V$ heisst *adjazent* zu $v \in V$, falls $(v, w) \in E$
- *Vorgängermenge* von $v \in V$: $N^-(v) := \{u \in V | (u, v) \in E\}$.
  Nachfolgermenge: $N^+(v) := \{u \in V | (v, u) \in E\}$



Notation

Für gerichtete Graphen $G = (V, E)$

- *Eingangsgrad*: $\deg^-(v) = |N^-(v)|$,
  Ausgangsgrad: $\deg^+(v) = |N^+(v)|$



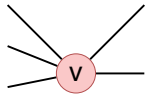
$\deg^-(v) = 3, \deg^+(v) = 2$

$\deg^-(w) = 1, \deg^+(w) = 1$

Notation

Für ungerichtete Graphen $G = (V, E)$:

- $w \in V$ heisst *adjazent* zu $v \in V$, falls $\{v, w\} \in E$
- *Nachbarschaft* von $v \in V$: $N(v) = \{w \in V | \{v, w\} \in E\}$
- *Grad* von v: $\deg(v) = |N(v)|$ mit Spezialfall Schleifen: erhöhen Grad um 2.



$\deg(v) = 5$

$\deg(w) = 2$

Beziehung zwischen Knotengraden und Kantenzahl

In jedem Graphen $G = (V, E)$ gilt

1. $\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$, falls G gerichtet
2. $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, falls G ungerichtet.

Wege

- *Weg*: Sequenz von Knoten $\langle v_1, \ldots, v_{k+1} \rangle$ so dass für jedes $i \in \{1 \ldots k\}$ eine Kante von v_i nach v_{i+1} existiert.
- *Länge* des Weges: Anzahl enthaltene Kanten k.
- *Gewicht* des Weges (in gewichteten Graphen): $\sum_{i=1}^{k} c((v_i, v_{i+1}))$ (bzw. $\sum_{i=1}^{k} c(\{v_i, v_{i+1}\})$)
- *Pfad* (auch: einfacher Pfad): Weg der keinen Knoten mehrfach verwendet.

Zusammenhang

- Ungerichteter Graph heisst *zusammenhängend*, wenn für jedes Paar $v, w \in V$ ein verbindender Weg existiert.
- Gerichteter Graph heisst *stark zusammenhängend*, wenn für jedes Paar $v, w \in V$ ein verbindender Weg existiert.
- Gerichteter Graph heisst *schwach zusammenhängend*, wenn der entsprechende ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

Einfache Beobachtungen

- Allgemein: $0 \leq |E| \in \mathcal{O}(|V|^2)$
- Zusammenhängender Graph: $|E| \in \Omega(|V|)$
- Vollständiger Graph: $|E| = \frac{|V| \cdot (|V|-1)}{2}$ (ungerichtet)
- Maximal $|E| = |V|^2$ (gerichtet),$|E| = \frac{|V| \cdot (|V|+1)}{2}$ (ungerichtet)

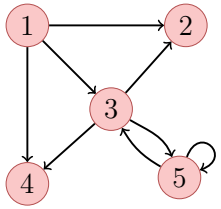
Zyklen

- *Zyklus*: Weg $\langle v_1, \ldots, v_{k+1} \rangle$ mit $v_1 = v_{k+1}$
- *Kreis*: Zyklus mit paarweise verschiedenen $v_1, \ldots, v_k$, welcher keine Kante mehrfach verwendet.
- *Kreisfrei (azyklisch)*: Graph ohne jegliche Kreise.

Eine Folgerung: Ungerichtete Graphen können keinen Kreis der Länge 2 enthalten (Schleifen haben Länge 1).

Repräsentation mit Matrix

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $v_1, \ldots, v_n$ gespeichert als *Adjazenzmatrix* $A_G = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit Einträgen aus $\{0, 1\}$. $a_{ij} = 1$ genau dann wenn Kante von v_i nach v_j.

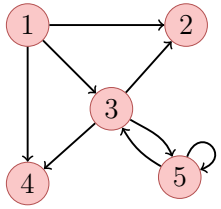


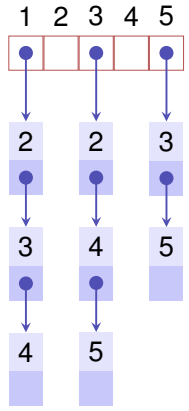
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Speicherbedarf $\Theta(|V|^2)$. A_G ist symmetrisch, wenn G ungerichtet.

Repräsentation mit Liste

Viele Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $v_1, \ldots, v_n$ haben deutlich weniger als n^2 Kanten. Repräsentation mit *Adjazenzliste*: Array $A[1], \ldots, A[n]$, A_i enthält verkettete Liste aller Knoten in $N^+(v_i)$.



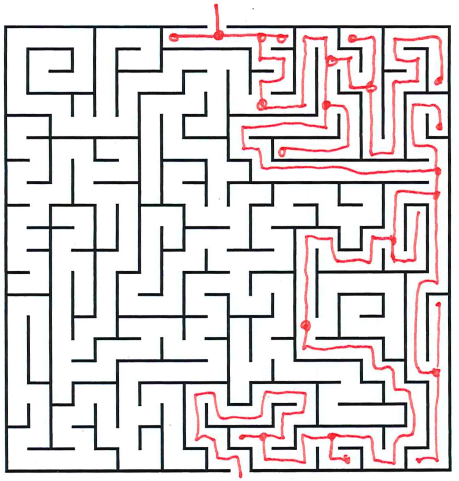


Speicherbedarf $\Theta(|V| + |E|)$.

Laufzeiten einfacher Operationen

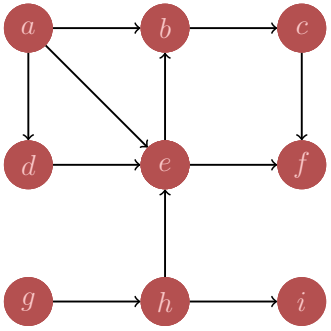
Operation	Matrix	Liste
Nachbarn/Nachfolger von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+ v)$
$v \in V$ ohne Nachbar/Nachfolger finden	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
$(u, v) \in E$?	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+ v)$
Kante einfügen	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Kante löschen	$\Theta(1)$	$\Theta(\deg^+ v)$

Tiefensuche



Graphen Traversieren: Tiefensuche

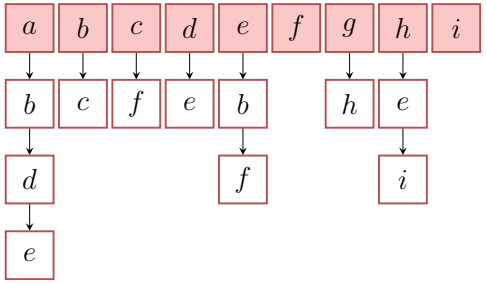
Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.



Reihenfolge

$a, b, c, f, d, e, g, h, i$

Adjazenzliste



Farben

Konzeptuelle Färbung der Knoten

- **Weiss:** Knoten wurde noch nicht entdeckt.
- **Grau:** Knoten wurde entdeckt und zur Traversierung vorgemerkt / in Bearbeitung.
- **Schwarz:** Knoten wurde entdeckt und vollständig bearbeitet

Algorithmus Tiefensuche DFS-Visit(G, v)

Input: Graph $G = (V, E)$, Knoten v.

$v.color \leftarrow$ grey
foreach $w \in N^+(v)$ **do**
    if $w.color =$ white **then**
        DFS-Visit(G, w)
$v.color \leftarrow$ black

Tiefensuche ab Knoten v. Laufzeit (ohne Rekursion): $\Theta(\deg^+ v)$

Algorithmus Tiefensuche DFS-Visit(G)

Input: Graph $G = (V, E)$

foreach $v \in V$ **do**
    $v.color \leftarrow$ white
foreach $v \in V$ **do**
    if $v.color =$ white **then**
        DFS-Visit(G,v)

Tiefensuche für alle Knoten eines Graphen. Laufzeit $\Theta(|V| + \sum_{v \in V}(\deg^+(v) + 1)) = \Theta(|V| + |E|)$.

Iteratives DFS-Visit(G, v)

Input: Graph $G = (V, E)$, $v \in V$ mit $v.color =$ white

Stack $S \leftarrow \emptyset$
$v.color \leftarrow$ grey; S.push(v) // invariant: grey nodes always on stack
while $S \neq \emptyset$ **do**
    $w \leftarrow$ nextWhiteSuccessor(v) // code: next slide
    if $w \neq$ null **then**
        $w.color \leftarrow$ grey; S.push(w)
        $v \leftarrow w$ // work on w. parent remains on the stack
    else
        $v.color \leftarrow$ black // no grey successors, v becomes black
        if $S \neq \emptyset$ **then**
            $v \leftarrow S$.pop() // visit/revisit next node
            if $v.color =$ grey **then** S.push(v)

Speicherbedarf Stack $\Theta(|V|)$

nextWhiteSuccessor(v)

Input: Knoten $v \in V$
Output: Nachfolgeknoten u von v mit $u.color =$ white, null sonst

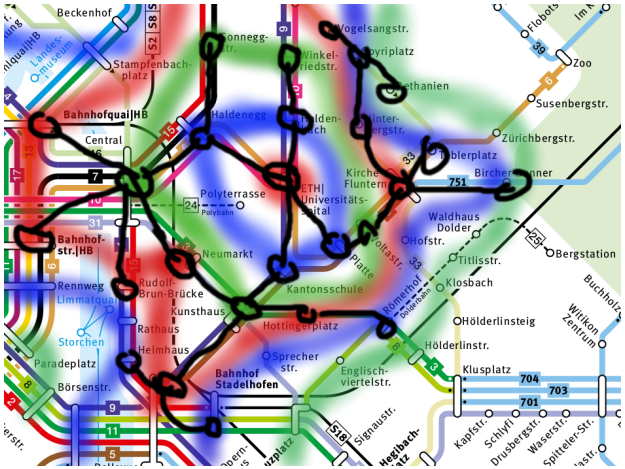
foreach $u \in N^+(v)$ **do**
    if $u.color =$ white **then**
        return u
return null

Interpretation der Farben

Beim Traversieren des Graphen wird ein Baum (oder Wald) aufgebaut. Beim Entdecken von Knoten gibt es drei Fälle

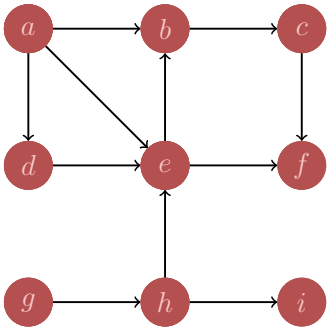
- Weisser Knoten: neue Baumkante
- Grauer Knoten: Zyklus („Rückwärtskante“)
- Schwarzer Knoten: Vorwärts-/Seitwärtskante

Breitensuche



Graphen Traversieren: Breitensuche

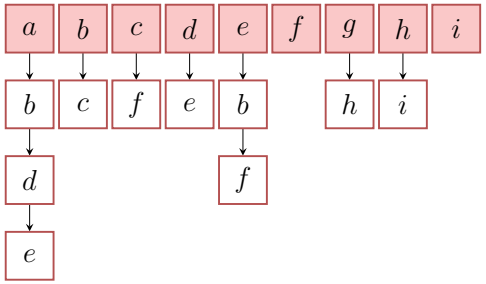
Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.



Reihenfolge

$a, b, d, e, c, f, g, h, i$

Adjazenzliste



(Iteratives) BFS-Visit(G, v)

Input: Graph $G = (V, E)$

Queue $Q \leftarrow \emptyset$
$v.color \leftarrow$ grey
enqueue(Q, v)
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  $w \leftarrow$ dequeue(Q)
  foreach $c \in N^+(w)$ **do**
    if $c.color =$ white **then**
      $c.color \leftarrow$ grey
      enqueue(Q, c)
  $w.color \leftarrow$ black

Algorithmus kommt mit $\mathcal{O}(|V|)$ Extraplatz aus.

Rahmenprogramm BFS-Visit(G)

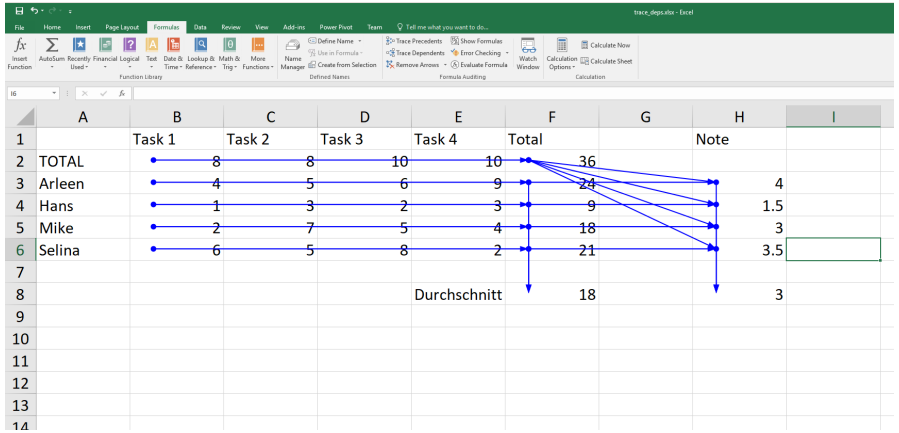
Input: Graph $G = (V, E)$

foreach $v \in V$ **do**
    $v.color \leftarrow$ white

foreach $v \in V$ **do**
    if $v.color =$ white **then**
        BFS-Visit(G,v)

Breitensuche für alle Knoten eines Graphen. Laufzeit $\Theta(|V| + |E|)$.

Topologisches Sortieren



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Total		Note	
2	TOTAL	8	8	10	10	36			
3	Arleen	4	5	6	9	24		4	
4	Hans	1	3	2	3	9		1.5	
5	Mike	2	7	5	4	18		3	
6	Selina	6	5	8	2	21		3.5	
7									
8					Durchschnitt	18		3	
9									
10									
11									
12									
13									
14									

Auswertungsreihenfolge?

Topologische Sortierung

Topologische Sortierung eines azyklischen gerichteten Graphen $G = (V, E)$:

Bijektive Abbildung

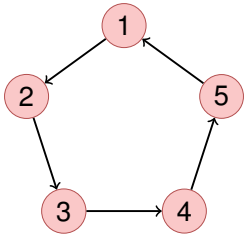
$$\text{ord} : V \to \{1, \ldots, |V|\}$$

so dass

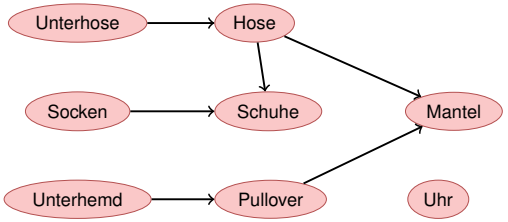
$$\text{ord}(v) < \text{ord}(w) \; \forall \; (v, w) \in E.$$

Identifizieren Wert i mit dem Element $v_i := \text{ord}^{-1}(i)$. Topologische Sortierung $\widehat{=} \langle v_1, \ldots, v_{|V|} \rangle$.

(Gegen-)Beispiele



Zyklischer Graph: kann nicht topologisch sortiert werden.



Eine mögliche Topologische Sortierung des Graphen: Unterhemd,Pullover,Unterhose,Uhr,Hose,Mantel,Socken,Schuhe

Beobachtung

Theorem

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann eine topologische Sortierung, wenn er kreisfrei ist

Beweis "⇒": Wenn G einen Kreis besitzt, so besitzt er keine topologische Sortierung. Denn in einem Kreis $\langle v_{i_1}, \ldots, v_{i_m} \rangle$ gälte $v_{i_1} < \cdots < v_{i_m} < v_{i_1}$.

Induktiver Beweis Gegenrichtung

- Anfang ($n = 1$): Graph mit einem Knoten ohne Schleife ist topologisch sortierbar. Setze $\mathrm{ord}(v_1) = 1$.
- Hypothese: Graph mit n Knoten kann topologisch sortiert werden.
- Schritt ($n \to n + 1$):
  1. G enthält einen Knoten v_q mit Eingangsgrad $\deg^-(v_q) = 0$. Andernfalls verfolge iterativ Kanten rückwärts – nach spätestens $n + 1$ Iterationen würde man einen Knoten besuchen, welcher bereits besucht wurde. Widerspruch zur Zyklenfreiheit.
  2. Graph ohne Knoten v_q und ohne dessen Eingangskanten kann nach Hypothese topologisch sortiert werden. Verwende diese Sortierung, setze $\mathrm{ord}(v_i) \leftarrow \mathrm{ord}(v_i) + 1$ für alle $i \neq q$ und setze $\mathrm{ord}(v_q) \leftarrow 1$.

Algorithmus, vorläufiger Entwurf

Graph $G = (V, E)$. $d \leftarrow 1$

1. Traversiere von beliebigem Knoten rückwärts bis ein Knoten v_q mit Eingangsgrad 0 gefunden ist.
2. Wird kein Knoten mit Eingangsgrad 0 gefunden (n Schritte), dann Zyklus gefunden.
3. Setze $\mathrm{ord}(v_q) \leftarrow d$.
4. Entferne v_q und seine Kanten von G.
5. Wenn $V \neq \emptyset$, dann $d \leftarrow d + 1$, gehe zu Schritt 1.

Laufzeit im schlechtesten Fall: $\Theta(|V|^2)$.

Verbesserung

Idee?

Berechne die Eingangsgrade der Knoten im Voraus und durchlaufe dann jeweils die Knoten mit Eingangsgrad 0 die Eingangsgrade der Nachfolgeknoten korrigierend.

Algorithmus Topological-Sort(G)

Input: Graph $G = (V, E)$.
Output: Topologische Sortierung ord

Stack $S \leftarrow \emptyset$
foreach $v \in V$ **do** $A[v] \leftarrow 0$
foreach $(v, w) \in E$ **do** $A[w] \leftarrow A[w] + 1$ // Eingangsgrade berechnen
foreach $v \in V$ with $A[v] = 0$ **do** push(S, v) // Merke Nodes mit Eingangsgrad 0
$i \leftarrow 1$
while $S \neq \emptyset$ **do**
    $v \leftarrow$ pop(S); $\mathrm{ord}[v] \leftarrow i$; $i \leftarrow i + 1$ // Wähle Knoten mit Eingangsgrad 0
    foreach $(v, w) \in E$ **do** // Verringere Eingangsgrad der Nachfolger
        $A[w] \leftarrow A[w] - 1$
        if $A[w] = 0$ **then** push(S, w)
if $i = |V| + 1$ **then return** ord **else return** "Cycle Detected"

Algorithmus Korrektheit

Theorem

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, kreisfreier Graph. Der Algorithmus TopologicalSort(G) berechnet in Zeit $\Theta(|V| + |E|)$ eine topologische Sortierung ord für G.

Beweis: folgt im wesentlichen aus vorigem Theorem:

1. Eingangsgrad verringern entspricht Knotenentfernen.
2. Im Algorithmus gilt für jeden Knoten v mit $A[v] = 0$ dass entweder der Knoten Eingangsgrad 0 hat oder dass zuvor alle Vorgänger einen Wert $\mathrm{ord}[u] \leftarrow i$ zugewiesen bekamen und somit $\mathrm{ord}[v] > \mathrm{ord}[u]$ für alle Vorgänger u von v. Knoten werden nur einmal auf den Stack gelegt.
3. Laufzeit: Inspektion des Algorithmus (mit Argumenten wie beim Traversieren).

Algorithmus Korrektheit

Theorem

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, nicht kreisfreier Graph. Der Algorithmus TopologicalSort(G) terminiert in Zeit $\Theta(|V| + |E|)$ und detektiert Zyklus.

Beweis: Sei $\langle v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \rangle$ ein Kreis in G. In jedem Schritt des Algorithmus bleibt $A[v_{i_j}] \geq 1$ für alle $j = 1, \ldots, k$. Also werden k Knoten nie auf den Stack gelegt und somit ist zum Schluss $i \leq V + 1 - k$.

Die Laufzeit des zweiten Teils des Algorithmus kann kürzer werden, jedoch kostet die Berechnung der Eingangsgrade bereits $\Theta(|V| + |E|)$.

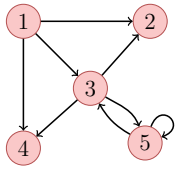
Alternative: Algorithmus DFS-Topsort(G, v)

Input: Graph $G = (V, E)$, Knoten v, Knotenliste L.

if $v.color =$ grey **then**
    stop (Zyklus)
if $v.color =$ black **then**
    return
$v.color \leftarrow$ grey
foreach $w \in N^+(v)$ **do**
    DFS-Topsort(G, w)
$v.color \leftarrow$ black
Füge v am Anfang der Liste L ein

Rufe Algorithmus für jeden noch nicht besuchten Knoten auf.
Asymptotische Laufzeit $\Theta(|V| + |E|)$.

Adjazenzmatrizen multipliziert



$$B := A_G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Interpretation

Theorem

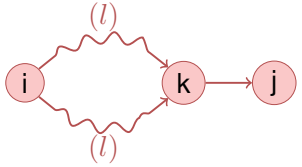
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt das Element $a_{i,j}^{(k)}$ der Matrix $(a_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n} = (A_G)^k$ die Anzahl der Wege mit Länge k von v_i nach v_j an.

Beweis

Per Induktion.

Anfang: Klar für $k = 1$. $a_{i,j} = a_{i,j}^{(1)}$.
Hypothese: Aussage wahr für alle $k \leq l$
Schritt ($l \to l + 1$):

$$a_{i,j}^{(l+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(l)} \cdot a_{k,j}$$



$a_{k,j} = 1$ g.d.w. Kante von k nach j, 0 sonst. Summe zählt die Anzahl Wege der Länge l vom Knoten v_i zu allen Knoten v_k welche direkte Verbindung zu Knoten v_j haben, also alle Wege der Länge $l + 1$.

Beispiel: Kürzester Weg

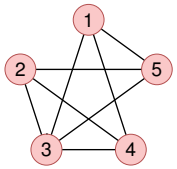
Frage: existiert Weg von i nach j? Wie lang ist der kürzeste Weg?

Antwort: Potenziere A_G bis für ein $k < n$ gilt $a_{i,j}^{(k)} > 0$. k gibt die Weglänge des kürzesten Weges. Wenn $a_{i,j}^{(k)} = 0$ für alle $1 \leq k < n$, so gibt es keinen Weg von i nach j.

Beispiel: Anzahl Dreiecke

Frage: Wie viele Dreieckswege enthält ein ungerichteter Graph?

Antwort: Entferne alle Zyklen (Diagonaleinträge). Berechne A_G^3. $a_{ii}^{(3)}$ bestimmt die Anzahl Wege der Länge 3, die i enthalten. Es gibt 6 verschiedene Permutationen eines Dreickweges. Damit Anzahl Dreiecke: $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(3)}/6$.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 24/6 = 4 \text{ Dreiecke.}$$

Relation

Gegeben: endliche Menge V

(Binäre) **Relation** R auf V: Teilmenge des kartesischen Produkts $V \times V = \{(a, b) | a \in V, b \in V\}$

Relation $R \subseteq V \times V$ heisst

- *reflexiv*, wenn $(v, v) \in R$ für alle $v \in V$
- *symmetrisch*, wenn $(v, w) \in R \Rightarrow (w, v) \in R$
- *transitiv*, wenn $(v, x) \in R$, $(x, w) \in R \Rightarrow (v, w) \in R$

Die *(Reflexive) Transitive Hülle* R^* von R ist die kleinste Erweiterung $R \subseteq R^* \subseteq V \times V$ von R, so dass R^* reflexiv und transitiv ist.

Graphen und Relationen

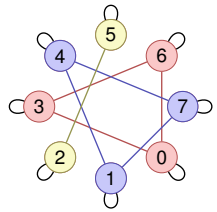
Graph $G = (V, E)$
Adjazenzen $A_G \mathrel{\widehat{=}}$ Relation $E \subseteq V \times V$ auf V

- *reflexiv* $\Leftrightarrow a_{i,i} = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$. (Schleifen)
- *symmetrisch* $\Leftrightarrow a_{i,j} = a_{j,i}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ (ungerichtet)
- *transitiv* $\Leftrightarrow$ $(u, v) \in E$, $(v, w) \in E \Rightarrow (u, w) \in E$. (Erreichbarkeit)

Beispiel: Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelation $\Leftrightarrow$ symmetrische, transitive, reflexive Relation $\Leftrightarrow$ Kollektion vollständiger, ungerichteter Graphen, für den jedes Element eine Schleife hat.

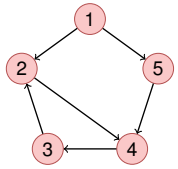
Beispiel: Äquivalenzklassen der Zahlen $\{0, ..., 7\}$ modulo 3



Reflexive Transitive Hülle

Reflexive transitive Hülle von G $\Leftrightarrow$ *Erreichbarkeitsrelation* E^*:
$(v, w) \in E^*$ gdw. $\exists$ Weg von Knoten v zu w.

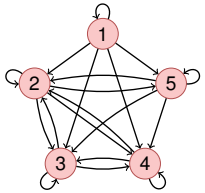
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$G = (V, E)$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$G^* = (V, E^*)$

Berechnung Reflexive Transitive Hülle

Ziel: Berechnung von $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ mit $b_{ij} = 1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E^*$

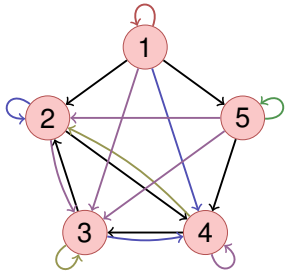
Beobachtung: $a_{ij} = 1$ bedeutet bereits $(v_i, v_j) \in E^*$.

Erste Idee:

- Starte mit $B \leftarrow A$ und setze $b_{ii} = 1$ für alle i (Reflexivität).
- Iteriere über i, j, k und setze $b_{ij} = 1$, wenn $b_{ik} = 1$ und $b_{kj} = 1$.
  Dann alle Wege der Länge 1 und 2 berücksichtigt
- Wiederhole Iteration $\Rightarrow$ alle Wege der Länge $1 \ldots 4$ berücksichtigt.
- $\lceil \log_2 n \rceil$ Wiederholungen nötig. $\Rightarrow$ Laufzeit $n^3 \lceil \log_2 n \rceil$

Verbesserung: Algorithmus von Warshall (1962)

Induktiver Ansatz: Alle Wege bekannt über Knoten aus $\{v_i : i < k\}$.
Hinzunahme des Knotens v_k.



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Algorithmus TransitiveClosure(A_G)

Input: Adjazenzmatrix $A_G = (a_{ij})_{i,j=1\ldots n}$
Output: Reflexive Transitive Hülle $B = (b_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ von G

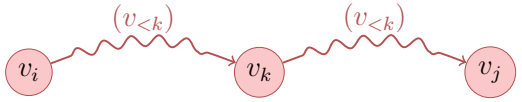
```
B ← A_G
for k ← 1 to n do
    a_kk ← 1                                   // Reflexivität
    for i ← 1 to n do
        for j ← 1 to n do
            b_ij ← max{b_ij, b_ik · b_kj}      // Alle Wege über v_k
return B
```

Laufzeit des Algorithmus $\Theta(n^3)$.

Korrektheit des Algorithmus (Induktion)

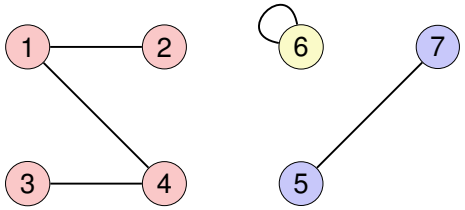
Invariante (k): alle Wege über Knoten mit maximalem Index $< k$ berücksichtigt

- **Anfang ($k = 1$)**: Alle direkten Wege (alle Kanten) in A_G berücksichtigt.
- **Hypothese**: Invariante (k) erfüllt.
- **Schritt** ($k \to k + 1$): Für jeden Weg von v_i nach v_j über Knoten mit maximalen Index k: nach Hypothese $b_{ik} = 1$ und $b_{kj} = 1$. Somit im k-ten Schleifendurchlauf: $b_{ij} \leftarrow 1$.



Zusammenhangskomponenten

Zusammenhangskomponenten eines ungerichteten Graphen G: Äquivalenzklassen der reflexiven, transitiven Hülle von G.
Zusammenhangskomponente = Teilgraph $G' = (V', E')$,
$E' = \{\{v, w\} \in E | v, w \in V'\}$ mit
$\{\{v, w\} \in E | v \in V' \vee w \in V'\} = E = \{\{v, w\} \in E | v \in V' \wedge w \in V'\}$



Graph mit Zusammenhangskomponenten $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{5, 7\}$, $\{6\}$.

Berechnung der Zusammenhangskomponenten

- Berechnung einer Partitionierung von V in paarweise disjunkte Teilmengen $V_1, \ldots, V_k$
- so dass jedes V_i die Knoten einer Zusammenhangskomponente enhält.
- Algorithmus: Tiefen- oder Breitensuche. Bei jedem Neustart von DFSSearch(G, v) oder BFSSearch(G, v) neue leere Zusammenhangskomponte erstellen und alle traversierten Knoten einfügen.