19. Dynamische Programmierung I

Memoisieren, Optimale Substruktur, Überlappende Teilprobleme, Abhängigkeiten, Allgemeines Vorgehen. Beispiele: Fibonacci, Schneiden von Eisenstangen, Längste aufsteigende Teilfolge, längste gemeinsame Teilfolge, Editierdistanz, Matrixkettenmultiplikation, Matrixmultiplikation nach Strassen

[Ottman/Widmayer, Kap. 1.2.3, 7.1, 7.4, Cormen et al, Kap. 15]

Fibonacci Zahlen

 (schon wieder)

$$F_n := \begin{cases} n & \text{wenn } n < 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{wenn } n \geq 2. \end{cases}$$

Analyse: warum ist der rekursive Algorithmus so langsam.

Algorithmus FibonacciRecursive(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

if $n < 2$ **then**
  $f \leftarrow n$
else
  $f \leftarrow$ FibonacciRecursive$(n-1)$ + FibonacciRecursive$(n-2)$
return f

Analyse

$T(n)$: Anzahl der ausgeführten Operationen.

- $n = 0, 1$: $T(n) = \Theta(1)$

Analyse

$T(n)$: Anzahl der ausgeführten Operationen.

- $n = 0, 1$: $T(n) = \Theta(1)$
- $n \geq 2$: $T(n) = T(n-2) + T(n-1) + c$.

Analyse

$T(n)$: Anzahl der ausgeführten Operationen.

- $n = 0, 1$: $T(n) = \Theta(1)$
- $n \geq 2$: $T(n) = T(n-2) + T(n-1) + c$.

$$T(n) = T(n-2) + T(n-1) + c \geq 2T(n-2) + c \geq 2^{n/2}c' = (\sqrt{2})^n c'$$

Analyse

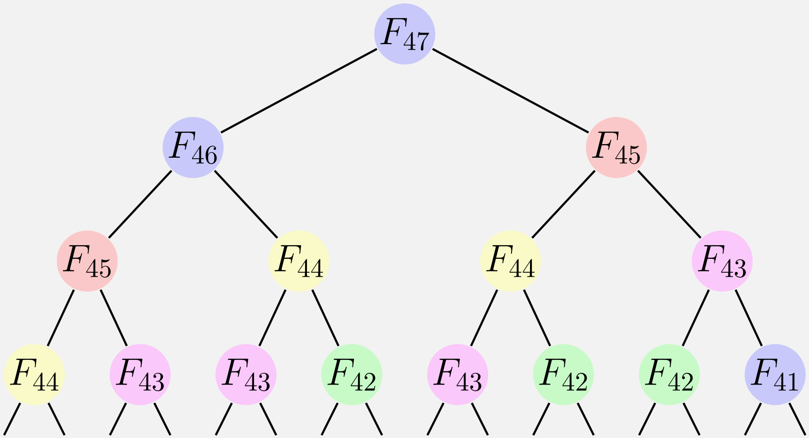
$T(n)$: Anzahl der ausgeführten Operationen.

- $n = 0, 1$: $T(n) = \Theta(1)$
- $n \geq 2$: $T(n) = T(n-2) + T(n-1) + c$.

$$T(n) = T(n-2) + T(n-1) + c \geq 2T(n-2) + c \geq 2^{n/2}c' = (\sqrt{2})^n c'$$

Algorithmus ist *exponentiell (!)* in n.

Grund, visualisiert



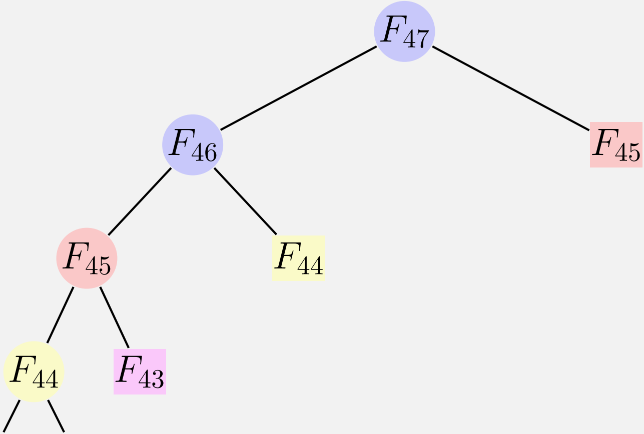
Knoten mit denselben Werten werden (zu) oft ausgewertet.

Memoization

Memoization (sic) Abspeichern von Zwischenergebnissen.

- Bevor ein Teilproblem gelöst wird, wird Existenz eines entsprechenden Zwischenergebnis geprüft.
- Existiert ein gespeichertes Zwischenergebnis bereits, so wird dieses verwendet.
- Andernfalls wird der Algorithmus ausgeführt und das Ergebnis wird entsprechend gespeichert.

Memoization bei Fibonacci



Rechteckige Knoten wurden bereits ausgewertet.

Algorithmus FibonacciMemoization(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

if $n \leq 2$ **then**
    $f \leftarrow 1$
else if $\exists$memo$[n]$ **then**
    $f \leftarrow$ memo$[n]$
else
    $f \leftarrow$ FibonacciMemoization$(n-1)$ + FibonacciMemoization$(n-2)$
    memo$[n] \leftarrow f$

return f

Analyse

Berechnungsaufwand:

$$T(n) = T(n-1) + c = ... = \mathcal{O}(n).$$

denn nach dem Aufruf von $f(n-1)$ wurde $f(n-2)$ bereits berechnet.

Das lässt sich auch so sehen: Für jedes n wird $f(n)$ maximal einmal rekursiv berechnet. Laufzeitkosten: n Aufrufe mal $\Theta(1)$ Kosten pro Aufruf $n \cdot c \in \Theta(n)$. Die Rekursion verschwindet aus der Berechnung der Laufzeit.

Algorithmus benötigt $\Theta(n)$ Speicher.[39]

[39] Allerdings benötigt der naive Algorithmus auch $\Theta(n)$ Speicher für die Rekursionsverwaltung.

Genauer hingesehen ...

... berechnet der Algorithmus der Reihe nach die Werte F_1, F_2, F_3,
... verkleidet im *Top-Down* Ansatz der Rekursion.

Man kann den Algorithmus auch gleich *Bottom-Up* hinschreiben.
Das ist charakteristisch für die *dynamische Programmierung*.

Algorithmus FibonacciBottomUp(n)

Input: $n \geq 0$
Output: n-te Fibonacci Zahl

$F[1] \leftarrow 1$
$F[2] \leftarrow 1$
for $i \leftarrow 3, \dots, n$ **do**
  $F[i] \leftarrow F[i-1] + F[i-2]$

return $F[n]$

Dynamische Programmierung: Idee

- Aufteilen eines komplexen Problems in eine vernünftige Anzahl kleinerer Teilprobleme
- Die Lösung der Teilprobleme wird zur Lösung des komplexeren Problems verwendet
- Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

Dynamische Programmierung: Konsequenz

Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

$\Rightarrow$ Resultate werden zwischengespeichert

Wir tauschen Laufzeit gegen Speicherplatz

Dynamic Programming: Beschreibung

1. Verwalte *DP-Tabelle* mit Information zu den Teilproblemen.
   Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

Dynamic Programming: Beschreibung

1. Verwalte *DP-Tabelle* mit Information zu den Teilproblemen.
   Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?
2. Berechnung der *Randfälle*.
   Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?

Dynamic Programming: Beschreibung

1. Verwalte *DP-Tabelle* mit Information zu den Teilproblemen.
   Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?
2. Berechnung der *Randfälle*.
   Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?
3. *Berechnungsreihenfolge* bestimen.
   In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?

Dynamic Programming: Beschreibung

1. Verwalte *DP-Tabelle* mit Information zu den Teilproblemen.
   Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?
2. Berechnung der *Randfälle*.
   Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?
3. *Berechnungsreihenfolge* bestimen.
   In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?
4. Auslesen der *Lösung*.
   Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

Dynamic Programming: Beschreibung

1. Verwalte *DP-Tabelle* mit Information zu den Teilproblemen.
   Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?
2. Berechnung der *Randfälle*.
   Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?
3. *Berechnungsreihenfolge* bestimen.
   In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?
4. Auslesen der *Lösung*.
   Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

Laufzeit (typisch) = Anzahl Einträge der Tabelle mal Aufwand pro Eintrag.

Dynamic Programming: Beschreibung am Beispiel

1 **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

Dynamic Programming: Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält n-te Fibonacci Zahl.

Dynamic Programming: Beschreibung am Beispiel

1 **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält n-te Fibonacci Zahl.

2 **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

Dynamic Programming: Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält n-te Fibonacci Zahl.

2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

   Werte F_1 und F_2 sind unabhängig einfach “berechenbar”.

Dynamic Programming: Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält n-te Fibonacci Zahl.

2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

   Werte F_1 und F_2 sind unabhängig einfach “berechenbar”.

3. **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**

Dynamic Programming: Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält n-te Fibonacci Zahl.

2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

   Werte F_1 und F_2 sind unabhängig einfach "berechenbar".

3. **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**

   F_i mit aufsteigenden i.

Dynamic Programming: Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält n-te Fibonacci Zahl.

2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

   Werte F_1 und F_2 sind unabhängig einfach “berechenbar”.

3. **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**

   F_i mit aufsteigenden i.

4. **Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?**

Dynamic Programming: Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält n-te Fibonacci Zahl.

2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

   Werte F_1 und F_2 sind unabhängig einfach "berechenbar".

3. **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**

   F_i mit aufsteigenden i.

4. **Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?**

   F_n ist die n-te Fibonacci-Zahl.

Dynamic Programming = Divide-And-Conquer ?

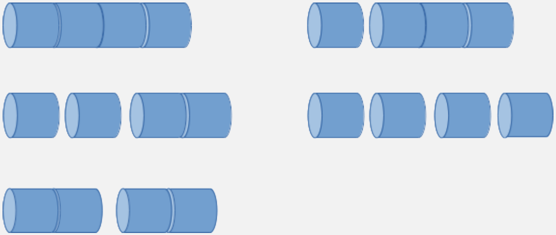
- In beiden Fällen ist das Ursprungsproblem (einfacher) lösbar, indem Lösungen von Teilproblemen herangezogen werden können. Das Problem hat *optimale Substruktur*.
- Bei Divide-And-Conquer Algorithmen (z.B. Mergesort) sind Teilprobleme unabhängig; deren Lösungen werden im Algorithmus nur einmal benötigt.
- Beim DP sind Teilprobleme nicht unabhängig. Das Problem hat *überlappende Teilprobleme*, welche im Algorithmus mehrfach gebraucht werden.
- Damit sie nur einmal gerechnet werden müssen, werden Resultate tabelliert. Dafür darf es *zwischen Teilproblemen keine zirkulären Abhängigkeiten* geben.

Schneiden von Eisenstäben

- Metallstäbe werden zerschnitten und verkauft.
- Metallstäbe der Länge $n \in \mathbb{N}$ verfügbar. Zerschneiden kostet nichts.
- Für jede Länge $l \in \mathbb{N}$, $l \leq n$ bekannt: Wert $v_l \in \mathbb{R}^+$
- Ziel: Zerschneide die Stange so (in $k \in \mathbb{N}$ Stücke), dass

$$\sum_{i=1}^{k} v_{l_i} \text{ maximal unter } \sum_{i=1}^{k} l_i = n.$$

Schneiden von Eisenstäben: Beispiel



Arten, einen Stab der Länge 4 zu zerschneiden (ohne Permutationen)

Länge	0	1	2	3	4
Preis	0	2	3	8	9

$\Rightarrow$ Bester Schnitt: 3 + 1 mit Wert 10.

Wie findet man den DP Algorithmus

0. Genaue Formulierung der gesuchten Lösung
1. Definiere Teilprobleme (und bestimme deren Anzahl)
2. Raten / Aufzählen (und bestimme die Laufzeit für das Raten)
3. Rekursion: verbinde die Teilprobleme
4. Memoisieren / Tabellieren. Bestimme die Abhängigkeiten der Teilprobleme
5. Lösung des Problems
   Laufzeit = #Teilprobleme $\times$ Zeit/Teilproblem

Struktur des Problems

0. *Gesucht:* r_n = maximal erreichbarer Wert von (ganzem oder geschnittenem) Stab mit Länge n.
1. *Teilprobleme:* maximal erreichbarer Wert r_k für alle $0 \leq k < n$
2. *Rate* Länge des ersten Stückes
3. *Rekursion*

$$r_k = \max\left\{v_i + r_{k-i} : 0 < i \leq k\right\}, \quad k > 0$$
$$r_0 = 0$$

4. *Abhängigkeit:* r_k hängt (nur) ab von den Werten v_i, $l \leq i \leq k$ und den optimalen Schnitten r_i, $i < k$
5. *Lösung* in r_n

Algorithmus RodCut(v,n)

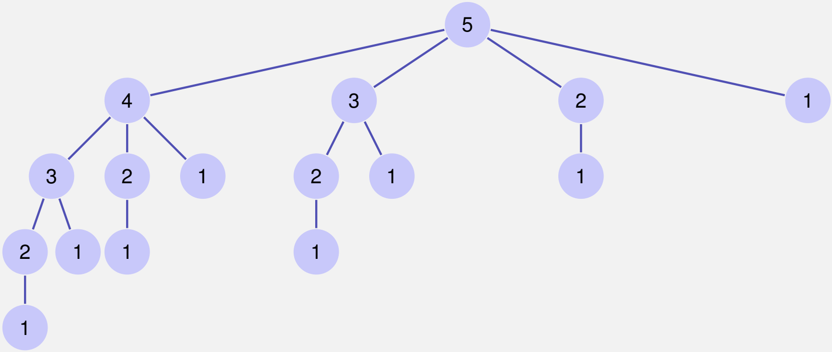
Input: $n \geq 0$, Preise v
Output: bester Wert

$q \leftarrow 0$
if $n > 0$ **then**
  for $i \leftarrow 1, \ldots, n$ **do**
    $q \leftarrow \max\{q, v_i + \text{RodCut}(v, n-i)\}$;
return q

Laufzeit $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + c \quad \Rightarrow$[40] $\quad T(n) \in \Theta(2^n)$

[40] $T(n) = T(n-1) + \sum_{i=0}^{n-2} T(i) + c = T(n-1) + (T(n-1) - c) + c = 2T(n-1) \quad (n > 0)$

Rekursionsbaum



Algorithmus RodCutMemoized(m, v, n)

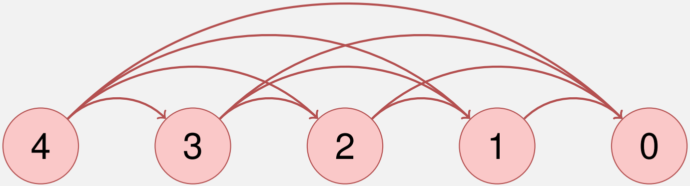
Input: $n \geq 0$, Preise v, Memoization Tabelle m
Output: bester Wert

$q \leftarrow 0$
if $n > 0$ **then**
  if $\exists\ m[n]$ **then**
    $q \leftarrow m[n]$
  else
    for $i \leftarrow 1, \dots, n$ **do**
      $q \leftarrow \max\{q, v_i + \text{RodCutMemoized}(m, v, n-i)\}$;
    $m[n] \leftarrow q$
return q

Laufzeit $\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$

Teilproblem-Graph

beschreibt die Abhängigkeiten der Teilprobleme untereinander



und darf keine Zyklen enthalten

Konstruktion des optimalen Schnittes

- Während der (rekursiven) Berechnung der optimalen Lösung für jedes $k \leq n$ bestimmt der rekursive Algorithmus die optimale Länge des ersten Stabes
- Speichere die Länge des ersten Stabes für jedes $k \leq n$ in einer Tabelle mit n Einträgen.

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1 **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält besten Wert eines Stabes der Länge n.

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält besten Wert eines Stabes der Länge n.

2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält besten Wert eines Stabes der Länge n.

2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

   Wert r_0 ist 0.

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1 **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält besten Wert eines Stabes der Länge n.

2 **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

Wert r_0 ist 0.

3 **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**

.

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält besten Wert eines Stabes der Länge n.

2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

   Wert r_0 ist 0.

3. **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**

   $r_i, i = 1, \ldots, n$.

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1 **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält besten Wert eines Stabes der Länge n.

2 **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

Wert r_0 ist 0.

3 **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**

$r_i, i = 1, \ldots, n$.

4 **Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?**

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

   Tabelle der Grösse $n \times 1$. n-ter Eintrag enthält besten Wert eines Stabes der Länge n.

2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

   Wert r_0 ist 0.

3. **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**

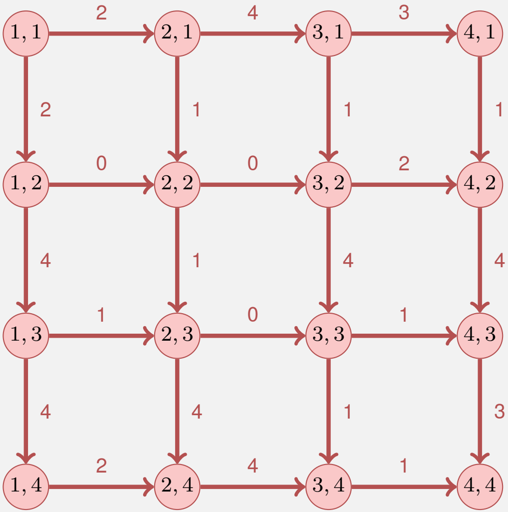
   $r_i, i = 1, \ldots, n$.

4. **Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?**

   r_n ist der beste Wert für eine Stange der Länge n

Kaninchen!

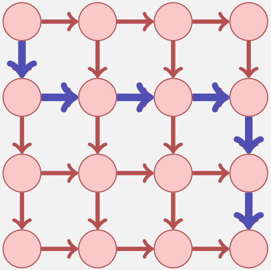
Ein Kaninchen sitzt auf Platz $(1,1)$ eines $n \times n$ Gitters. Es kann nur nach Osten oder nach Süden gehen. Auf jedem Wegstück liegt eine Anzahl Rüben. Wie viele Rüben sammelt das Kaninchen maximal ein?



Kaninchen!

Anzahl mögliche Pfade?

- Auswahl von $n-1$ Wegen nach Süden aus $2n-2$ Wegen insgesamt.



Der Weg 100011
(1:nach Süden, 0:nach Osten)

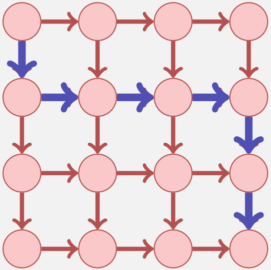
$\Rightarrow$ Naiver Algorithmus hat keine Chance

Kaninchen!

Anzahl mögliche Pfade?

- Auswahl von $n-1$ Wegen nach Süden aus $2n-2$ Wegen insgesamt.
- $$\binom{2n-2}{n-1} \in \Omega(2^n)$$

$\Rightarrow$ Naiver Algorithmus hat keine Chance



Der Weg 100011
(1:nach Süden, 0:nach Osten)

Rekursion

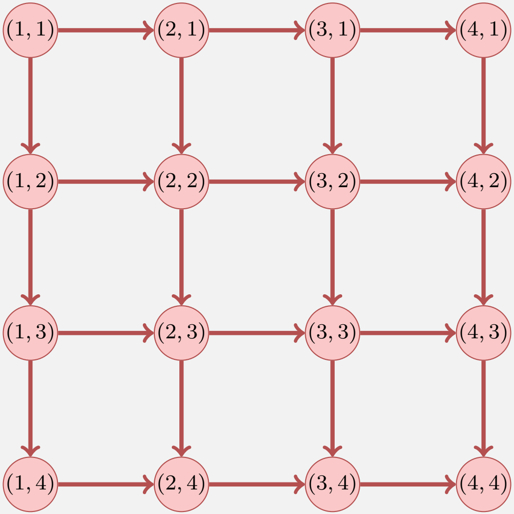
Gesucht: $T_{0,0}$ = *Maximale Anzahl Rüben von* $(0,0)$ *nach* (n,n).

Sei $w_{(i,j)-(i',j')}$ Anzahl Rüben auf Kante von (i,j) nach (i',j').

Rekursion (maximale Anzahl Rüben von (i,j) nach (n,n))

$$T_{ij} = \begin{cases} \max\{w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}\}, & i < n, j < n \\ w_{(i,j)-(i,j+1)} + T_{i,j+1}, & i = n, j < n \\ w_{(i,j)-(i+1,j)} + T_{i+1,j}, & i < n, j = n \\ 0 & i = j = n \end{cases}$$

Teilproblemabhängigkeitsgraph



Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1. Tabelle T der Grösse $n \times n$. Eintrag bei i, j enthält die maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n).

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1. **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

   Tabelle T der Grösse $n \times n$. Eintrag bei i, j enthält die maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n).

2. **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1 **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

Tabelle T der Grösse $n \times n$. Eintrag bei i, j enthält die maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n).

2 **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

Wert $T_{n,n}$ ist 0.

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1 **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

Tabelle T der Grösse $n \times n$. Eintrag bei i, j enthält die maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n).

2 **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

Wert $T_{n,n}$ ist 0.

3 **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**

.

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1 **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

Tabelle T der Grösse $n \times n$. Eintrag bei i, j enthält die maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n).

2 **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

Wert $T_{n,n}$ ist 0.

3 **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**

$T_{i,j}$ mit $i = n \searrow 1$ und für jedes i: $j = n \searrow 1$, (oder umgekehrt: $j = n \searrow 1$ und für jedes j: $i = n \searrow 1$).

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1 **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

Tabelle T der Grösse $n \times n$. Eintrag bei i, j enthält die maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n).

2 **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

Wert $T_{n,n}$ ist 0.

3 **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**

$T_{i,j}$ mit $i = n \searrow 1$ und für jedes i: $j = n \searrow 1$, (oder umgekehrt: $j = n \searrow 1$ und für jedes j: $i = n \searrow 1$).

4 **Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?**

Bottom-Up Beschreibung am Beispiel

1 **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

Tabelle T der Grösse $n \times n$. Eintrag bei i, j enthält die maximale Anzahl Rüben von (i, j) nach (n, n).

2 **Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?**

Wert $T_{n,n}$ ist 0.

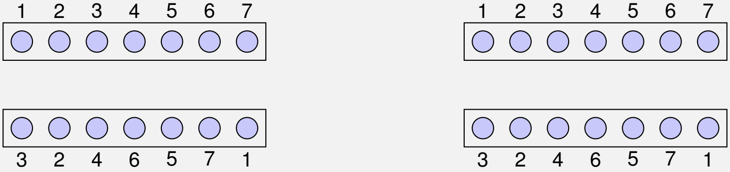
3 **In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?**

$T_{i,j}$ mit $i = n \searrow 1$ und für jedes i: $j = n \searrow 1$, (oder umgekehrt: $j = n \searrow 1$ und für jedes j: $i = n \searrow 1$).

4 **Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?**

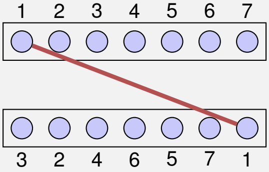
$T_{1,1}$ enthält die maximale Anzahl Rüben

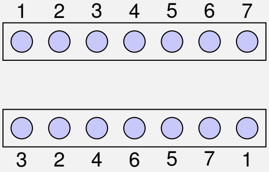
Längste aufsteigende Teilfolge (LAT)



Verbinde so viele passende Anschlüsse wie möglich, ohne dass sich die Anschlüsse kreuzen.

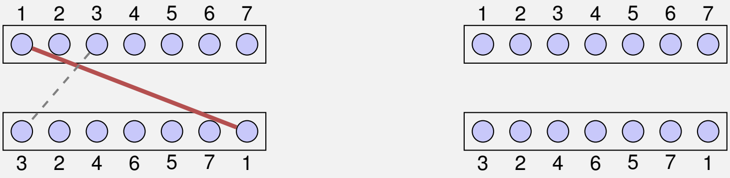
Längste aufsteigende Teilfolge (LAT)





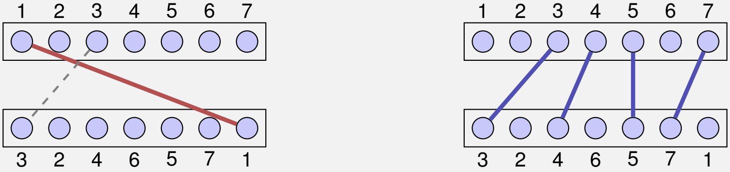
Verbinde so viele passende Anschlüsse wie möglich, ohne dass sich die Anschlüsse kreuzen.

Längste aufsteigende Teilfolge (LAT)



Verbinde so viele passende Anschlüsse wie möglich, ohne dass sich die Anschlüsse kreuzen.

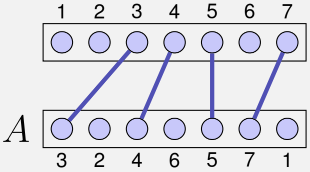
Längste aufsteigende Teilfolge (LAT)



Verbinde so viele passende Anschlüsse wie möglich, ohne dass sich die Anschlüsse kreuzen.

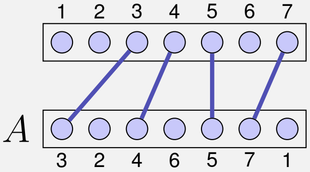
Formalisieren

- Betrachte Folge $A_n = (a_1, \ldots, a_n)$.
- Suche eine längste aufsteigende Teilfolge von A_n.
- Beispiele aufsteigender Teilfolgen: $(3, 4, 5)$, $(2, 4, 5, 7)$, $(3, 4, 5, 7)$, $(3, 7)$.



Formalisieren

- Betrachte Folge $A_n = (a_1, \dots, a_n)$.
- Suche eine längste aufsteigende Teilfolge von A_n.
- Beispiele aufsteigender Teilfolgen: $(3, 4, 5)$, $(2, 4, 5, 7)$, $(3, 4, 5, 7)$, $(3, 7)$.



Verallgemeinerung: Lasse Zahlen ausserhalb von $1, ..., n$ zu, auch mit Mehrfacheinträgen. (Weitehrhin aber nur strikt aufsteigende Teilfolgen) Beispiel: (2,3,3,3,5,1) mit aufsteigender Teilfolge (2,3,5).

Erster Entwurf

Sei *L_i = längste Teilfolge von A_i, ($1 \leq i \leq n$).*

Annahme: LAT L_k von A_k für bekannt. Wollen nun LAT L_{k+1} für A_{k+1} berechnen.

Erster Entwurf

Sei *L_i = längste Teilfolge von A_i, $(1 \leq i \leq n)$.*

Annahme: LAT L_k von A_k für bekannt. Wollen nun LAT L_{k+1} für A_{k+1} berechnen.

Wenn a_{k+1} zu L_k passt, dann $L_{k+1} = L_k \oplus a_{k+1}$?

Erster Entwurf

Sei *L_i = längste Teilfolge von A_i, ($1 \leq i \leq n$).*

Annahme: LAT L_k von A_k für bekannt. Wollen nun LAT L_{k+1} für A_{k+1} berechnen.

Wenn a_{k+1} zu L_k passt, dann $L_{k+1} = L_k \oplus a_{k+1}$?

Gegenbeispiel: $A_5 = (1, 2, 5, 3, 4)$. Sei $A_3 = (1, 2, 5)$ mit $L_3 = A$. Bestimme L_4 aus L_3?

Erster Entwurf

Sei *L_i = längste Teilfolge von A_i, ($1 \leq i \leq n$).*

Annahme: LAT L_k von A_k für bekannt. Wollen nun LAT L_{k+1} für A_{k+1} berechnen.

Wenn a_{k+1} zu L_k passt, dann $L_{k+1} = L_k \oplus a_{k+1}$?

Gegenbeispiel: $A_5 = (1, 2, 5, 3, 4)$. Sei $A_3 = (1, 2, 5)$ mit $L_3 = A$. Bestimme L_4 aus L_3?

So kommen wir nicht weiter: können nicht von L_k auf L_{k+1} schliessen.

Zweiter Entwurf

Sei L_i *= längste Teilfolge von A_i, ($1 \le i \le n$).*

Annahme: eine LAT L_j für alle $j \le k$ bekannt. Wollen nun LAT L_{k+1} für $k+1$ berechnen.

Zweiter Entwurf

Sei *L_i = längste Teilfolge von A_i, ($1 \leq i \leq n$).*

Annahme: eine LAT L_j für alle $j \leq k$ bekannt. Wollen nun LAT L_{k+1} für $k+1$ berechnen.

Betrachte alle passenden $L_{k+1} = L_j \oplus a_{k+1}$ ($j \leq k$) und wähle eine längste solche Folge.

Zweiter Entwurf

Sei *L_i = längste Teilfolge von A_i, ($1 \leq i \leq n$).*

Annahme: eine LAT L_j für alle $j \leq k$ bekannt. Wollen nun LAT L_{k+1} für $k+1$ berechnen.

Betrachte alle passenden $L_{k+1} = L_j \oplus a_{k+1}$ ($j \leq k$) und wähle eine längste solche Folge.

Gegenbeispiel: $A_5 = (1, 2, 5, 3, 4)$. Sei $A_4 = (1, 2, 5, 3)$ mit $L_1 = (1)$, $L_2 = (1, 2)$, $L_3 = (1, 2, 5)$, $L_4 = (1, 2, 5)$. Bestimme L_5 aus $L_1, \ldots, L_4$?

Zweiter Entwurf

Sei *L_i = längste Teilfolge von A_i, ($1 \leq i \leq n$).*

Annahme: eine LAT L_j für alle $j \leq k$ bekannt. Wollen nun LAT L_{k+1} für $k+1$ berechnen.

Betrachte alle passenden $L_{k+1} = L_j \oplus a_{k+1}$ ($j \leq k$) und wähle eine längste solche Folge.

Gegenbeispiel: $A_5 = (1,2,5,3,4)$. Sei $A_4 = (1,2,5,3)$ mit $L_1 = (1)$, $L_2 = (1,2)$, $L_3 = (1,2,5)$, $L_4 = (1,2,5)$. Bestimme L_5 aus $L_1, \ldots, L_4$?

So kommen wir nicht weiter: können nicht von *jeweils nur einer beliebigen Lösung* L_j auf L_{k+1} schliessen. Wir müssten alle möglichen LAT betrachten. Zu viel!

Dritter Entwurf

Sei $M_{n,i}$ = *längste Teilfolge von* A_n *der Länge* i *(*$1 \leq i \leq n$*)*

Annahme: die LAT $M_{k,j}$ für A_k, *welche mit kleinstem Element enden* seien für alle Längen $1 \leq j \leq k$ bekannt.

Dritter Entwurf

Sei $M_{n,i}$ = *längste Teilfolge von A_n der Länge i ($1 \leq i \leq n$)*

Annahme: die LAT $M_{k,j}$ für A_k, *welche mit kleinstem Element enden* seien für alle Längen $1 \leq j \leq k$ bekannt.

Betrachte nun alle passenden $M_{k,j} \oplus a_{k+1}$ ($j \leq k$) und aktualisiere die Tabelle der längsten aufsteigenden Folgen, welche mit kleinstem Element enden.

Dritter Entwurf Beispiel

Beispiel: $A = (1, 1000, 1001, 4, 5, 2, 6, 7)$

A	LAT $M_{k,\cdot}$
1	(1)

Dritter Entwurf Beispiel

Beispiel: $A = (1, 1000, 1001, 4, 5, 2, 6, 7)$

A	LAT $M_{k,\cdot}$
1	(1)
$+1000$	$(1), (1, 1000)$

Dritter Entwurf Beispiel

Beispiel: $A = (1, 1000, 1001, 4, 5, 2, 6, 7)$

A	LAT $M_{k,\cdot}$
1	(1)
$+\,1000$	$(1), (1, 1000)$
$+\,1001$	$(1), (1, 1000), (1, 1000, 1001)$

Dritter Entwurf Beispiel

Beispiel: $A = (1, 1000, 1001, 4, 5, 2, 6, 7)$

A	LAT $M_{k,\cdot}$
1	(1)
$+\ 1000$	$(1), (1, 1000)$
$+\ 1001$	$(1), (1, 1000), (1, 1000, 1001)$
$+\ 4$	$(1), (1, 4), (1, 1000, 1001)$

Dritter Entwurf Beispiel

Beispiel: $A = (1, 1000, 1001, 4, 5, 2, 6, 7)$

A	LAT $M_{k,\cdot}$
1	(1)
$+\,1000$	$(1), (1, 1000)$
$+\,1001$	$(1), (1, 1000), (1, 1000, 1001)$
$+\,4$	$(1), (1, 4), (1, 1000, 1001)$
$+\,5$	$(1), (1, 4), (1, 4, 5)$

Dritter Entwurf Beispiel

Beispiel: $A = (1, 1000, 1001, 4, 5, 2, 6, 7)$

A	LAT $M_{k,\cdot}$
1	(1)
$+\,1000$	$(1), (1, 1000)$
$+\,1001$	$(1), (1, 1000), (1, 1000, 1001)$
$+\,4$	$(1), (1, 4), (1, 1000, 1001)$
$+\,5$	$(1), (1, 4), (1, 4, 5)$
$+\,2$	$(1), (1, 2), (1, 4, 5)$

Dritter Entwurf Beispiel

Beispiel: $A = (1, 1000, 1001, 4, 5, 2, 6, 7)$

A	LAT $M_{k,\cdot}$
1	(1)
$+\,1000$	$(1), (1, 1000)$
$+\,1001$	$(1), (1, 1000), (1, 1000, 1001)$
$+\,4$	$(1), (1, 4), (1, 1000, 1001)$
$+\,5$	$(1), (1, 4), (1, 4, 5)$
$+\,2$	$(1), (1, 2), (1, 4, 5)$
$+\,6$	$(1), (1, 2), (1, 4, 5), (1, 4, 5, 6)$

Dritter Entwurf Beispiel

Beispiel: $A = (1, 1000, 1001, 4, 5, 2, 6, 7)$

A	LAT $M_{k,\cdot}$
1	(1)
$+\,1000$	$(1), (1, 1000)$
$+\,1001$	$(1), (1, 1000), (1, 1000, 1001)$
$+\,4$	$(1), (1, 4), (1, 1000, 1001)$
$+\,5$	$(1), (1, 4), (1, 4, 5)$
$+\,2$	$(1), (1, 2), (1, 4, 5)$
$+\,6$	$(1), (1, 2), (1, 4, 5), (1, 4, 5, 6)$
$+\,7$	$(1), (1, 2), (1, 4, 5), (1, 4, 5, 6), (1, 4, 5, 6, 7)$

DP Table

- Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge $M_{k,j}$ am Slot j.

DP Table

- Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge $M_{k,j}$ am Slot j.
- Beispielfolge:
  3 2 5 1 6 4

Index	1	2	3	4	5	6
Wert	3	2	5	1	6	4

DP Table

- Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge $M_{k,j}$ am Slot j.
- Beispielfolge:
  3 2 5 1 6 4

Index	1	2	3	4	5	6
Wert	3	2	5	1	6	4

Index	0	1	2	3	4	...
$(L_j)_j$	$-\infty$	∞	∞	∞	∞	

DP Table

- Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge $M_{k,j}$ am Slot j.
- Beispielfolge:
  3 2 5 1 6 4

Index	1	2	3	4	5	6
Wert	3	2	5	1	6	4

Index	0	1	2	3	4	...
$(L_j)_j$	$-\infty$	3	∞	∞	∞	

DP Table

- Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge $M_{k,j}$ am Slot j.
- Beispielfolge:
  3 2 5 1 6 4

Index	1	2	3	4	5	6
Wert	3	2	5	1	6	4

Index	0	1	2	3	4	...
$(L_j)_j$	$-\infty$	2	∞	∞	∞	

DP Table

- Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge $M_{k,j}$ am Slot j.
- Beispielfolge:
  3 2 5 1 6 4

Index	1	2	3	4	5	6
Wert	3	2	5	1	6	4

Index	0	1	2	3	4	...
$(L_j)_j$	$-\infty$	2	5	∞	∞	

DP Table

- Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge $M_{k,j}$ am Slot j.
- Beispielfolge:
  3 2 5 1 6 4

Index	1	2	3	4	5	6
Wert	3	2	5	1	6	4

Index	0	1	2	3	4	...
$(L_j)_j$	$-\infty$	1	5	∞	∞	

DP Table

- Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge $M_{k,j}$ am Slot j.
- Beispielfolge:
  3 2 5 1 6 4

Index	1	2	3	4	5	6
Wert	3	2	5	1	6	4

Index	0	1	2	3	4	...
$(L_j)_j$	$-\infty$	1	5	6	∞	

DP Table

- Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge $M_{k,j}$ am Slot j.
- Beispielfolge:
  3 2 5 1 6 4
- Problem: Tabelle enthält zum Schluss nicht die Folge, nur den letzten Wert.

Index	1	2	3	4	5	6
Wert	3	2	5	1	6	4

Index	0	1	2	3	4	...
$(L_j)_j$	$-\infty$	1	4	6	∞	

DP Table

- Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge $M_{k,j}$ am Slot j.
- Beispielfolge:
  3 2 5 1 6 4
- Problem: Tabelle enthält zum Schluss nicht die Folge, nur den letzten Wert.
- Lösung: Zweite Tabelle mit den Vorgängern.

Index	1	2	3	4	5	6
Wert	3	2	5	1	6	4

Index	0	1	2	3	4	...
$(L_j)_j$	$-\infty$	1	4	6	∞	

DP Table

- Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge $M_{k,j}$ am Slot j.
- Beispielfolge:
  3 2 5 1 6 4
- Problem: Tabelle enthält zum Schluss nicht die Folge, nur den letzten Wert.
- Lösung: Zweite Tabelle mit den Vorgängern.

Index	1	2	3	4	5	6
Wert	3	2	5	1	6	4
Vorgänger	$-\infty$	$-\infty$	2	$-\infty$	5	1

Index	0	1	2	3	4	...
$(L_j)_j$	-∞	1	4	6	∞	

Dynamic Programming Algorithmus LAT

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1

Dynamic Programming Algorithmus LAT

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

Zwei Tabellen $T[0,\ldots,n]$ und $V[1,\ldots,n]$.

1 $T[j]$: letztes Element der aufsteigenden Folge $M_{n,j}$

$V[j]$: Wert des Vorgängers von a_j.

Zu Beginn $T[0] \leftarrow -\infty$, $T[i] \leftarrow \infty \; \forall i > 1$

Dynamic Programming Algorithmus LAT

1

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

Zwei Tabellen $T[0,\dots,n]$ und $V[1,\dots,n]$.
$T[j]$: letztes Element der aufsteigenden Folge $M_{n,j}$
$V[j]$: Wert des Vorgängers von a_j.
Zu Beginn $T[0] \leftarrow -\infty$, $T[i] \leftarrow \infty \; \forall i > 1$

2

Berechnung eines Eintrags

Dynamic Programming Algorithmus LAT

1 **Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?**

Zwei Tabellen $T[0,\dots,n]$ und $V[1,\dots,n]$.
$T[j]$: letztes Element der aufsteigenden Folge $M_{n,j}$
$V[j]$: Wert des Vorgängers von a_j.
Zu Beginn $T[0] \leftarrow -\infty$, $T[i] \leftarrow \infty \; \forall i > 1$

2 **Berechnung eines Eintrags**

Einträge in T aufsteigend sortiert. Für jeden Neueintrag a_{k+1} binäre Suche nach l, so dass $T[l] < a_k < T[l+1]$. Setze $T[l+1] \leftarrow a_{k+1}$. Setze $V[k] = T[l]$.

Dynamic Programming Algorithmus LAT

Berechnungsreihenfolge

3

Dynamic Programming Algorithmus LAT

Berechnungsreihenfolge

3 Beim Traversieren der Liste werden die Einträge $T[k]$ und $V[k]$ mit aufsteigendem k berechnet.

Dynamic Programming Algorithmus LAT

Berechnungsreihenfolge

3 Beim Traversieren der Liste werden die Einträge $T[k]$ und $V[k]$ mit aufsteigendem k berechnet.

Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

4

Dynamic Programming Algorithmus LAT

Berechnungsreihenfolge

3 Beim Traversieren der Liste werden die Einträge $T[k]$ und $V[k]$ mit aufsteigendem k berechnet.

Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

4 Suche das grösste l mit $T[l] < \infty$. l ist der letzte Index der LAT. Suche von l ausgehend den Index $i < l$, so dass $V[l] = a_i$, i ist der Vorgänger von l. Repetiere mit $l \leftarrow i$ bis $T[l] = -\infty$

Analyse

- Berechnung Tabelle:
  - Initialisierung: $\Theta(n)$ Operationen
  - Berechnung k-ter Eintrag: Binäre Suche auf Positionen $\{1, \ldots, k\}$ plus konstante Anzahl Zuweisungen.

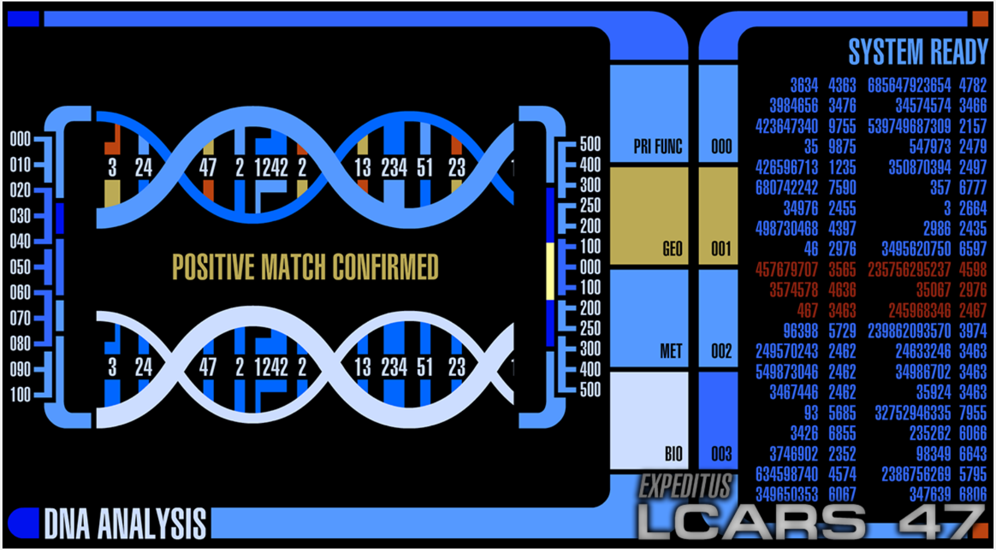
$$\sum_{k=1}^{n} (\log k + \mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(n) + \sum_{k=1}^{n} \log(k) = \Theta(n \log n).$$

- Rekonstruktion: Traversiere A von rechts nach links: $\mathcal{O}(n)$.

Somit Gesamtlaufzeit

$$\Theta(n \log n).$$

DNA - Vergleich (Star Trek)



DNA - Vergleich

- DNA besteht aus Sequenzen von vier verschiedenen Nukleotiden **A**denin **G**uanin **T**hymin **C**ytosin
- DNA-Sequenzen (Gene) werden mit Zeichenketten aus A, G, T und C beschrieben.
- Ein möglicher Vergleich zweier Gene: Bestimme **Längste gemeinsame Teilfolge**

Das Problem, die längste gemeinsame Teilfolge zu finden ist ein Spezialfall der minimalen Editierdistanz.

Minimale Editierdistanz

Editierdistanz von zwei Zeichenketten $A_n = (a_1, \ldots, a_m)$, $B_m = (b_1, \ldots, b_m)$.

Editieroperationen:

- Einfügen eines Zeichens
- Löschen eines Zeichens
- Änderung eines Zeichens

Frage: Wie viele Editieroperationen sind mindestens nötig, um eine gegebene Zeichenkette A in eine Zeichenkette B zu überführen.

TIGER ZIGER ZIEGER ZIEGE

Minimale Editierdistanz

Gesucht: Günstigste zeichenweise Transformation $A_n \to B_m$ mit Kosten

Operation	Levenshtein	LGT[41]	allgemein
c einfügen	1	1	ins(c)
c löschen	1	1	del(c)
Ersetzen $c \to c'$	$\mathbb{1}(c \neq c')$	$\infty \cdot \mathbb{1}(c \neq c')$	repl(c, c')

Beispiel

T	I	G	E	R		T	I	_	G	E	R		T→Z	+E	-R
Z	I	E	G	E		Z	I	E	G	E	_		Z→T	-E	+R

[41] Längste gemeinsame Teilfolge – Spezialfall des Editierproblems

DP

0 $E(n,m)$ = minimale Anzahl Editieroperationen (ED Kosten) für $a_{1\ldots n} \to b_{1\ldots m}$

1 Teilprobleme $E(i,j)$ = ED von $a_{1\ldots i}$. $b_{1\ldots j}$. #TP $= n \cdot m$

2 Raten/Probieren Kosten$\Theta(1)$

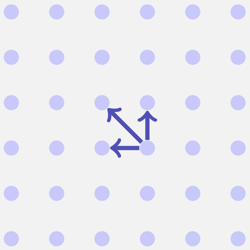
- $a_{1..i} \to a_{1\ldots i-1}$ (löschen)
- $a_{1..i} \to a_{1\ldots i} b_j$ (einfügen)
- $a_{1..i} \to a_{1\ldots i_1} b_j$ (ersetzen)

3 Rekursion

$$E(i,j) = \min \begin{cases} \text{del}(a_i) + E(i-1,j), \\ \text{ins}(b_j) + E(i,j-1), \\ \text{repl}(a_i,b_j) + E(i-1,j-1) \end{cases}$$

DP

4. Abhängigkeiten



$\Rightarrow$ Berechnung von links oben nach rechts unten. Zeilen- oder Spaltenweise.

5. Lösung steht in $E(n, m)$

Beispiel (Levenshteinabstand)

$$E[i,j] \leftarrow \min\left\{E[i-1,j]+1, E[i,j-1]+1, E[i-1,j-1]+\mathbb{1}(a_i \neq b_j)\right\}$$

	∅	Z	I	E	G	E
∅	0	1	2	3	4	5
T	1	1	2	3	4	5
I	2	2	1	2	3	4
G	3	3	2	2	2	3
E	4	4	3	2	3	2
R	5	5	4	3	3	3

Editierschritte: von rechts unten nach links oben, der Rekursion folgend. Bottom-Up Beschreibung des Algorithmus: Übung

Bottom-Up DP Algorithmus ED]

1

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

Bottom-Up DP Algorithmus ED]

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1 Tabelle $E[0, \ldots, m][0, \ldots, n]$. $E[i, j]$: Minimaler Editierabstand der Zeichenketten $(a_1, \ldots, a_i)$ und $(b_1, \ldots, b_j)$

Bottom-Up DP Algorithmus ED]

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

1 Tabelle $E[0,\dots,m][0,\dots,n]$. $E[i,j]$: Minimaler Editierabstand der Zeichenketten $(a_1,\dots,a_i)$ und $(b_1,\dots,b_j)$

Berechnung eines Eintrags

2

Bottom-Up DP Algorithmus ED]

1

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

Tabelle $E[0,\dots,m][0,\dots,n]$. $E[i,j]$: Minimaler Editierabstand der Zeichenketten $(a_1,\dots,a_i)$ und $(b_1,\dots,b_j)$

2

Berechnung eines Eintrags

$E[0,i] \leftarrow i \;\forall 0 \le i \le m$, $E[j,0] \leftarrow i \;\forall 0 \le j \le n$. Berechnung von $E[i,j]$ sonst mit $E[i,j] =$
$\min\{\text{del}(a_i) + E(i-1,j), \text{ins}(b_j) + E(i,j-1), \text{repl}(a_i,b_j) + E(i-1,j-1)\}$

Bottom-Up DP Algorithmus ED

3

Berechnungsreihenfolge

Bottom-Up DP Algorithmus ED

Berechnungsreihenfolge

3 Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.

Bottom-Up DP Algorithmus ED

3

Berechnungsreihenfolge

Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.

Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

4

Bottom-Up DP Algorithmus ED

3

Berechnungsreihenfolge

Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.

4

Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

Beginne bei $j = m$, $i = n$. Falls $E[i, j] = \text{repl}(a_i, b_j) + E(i-1, j-1)$ gilt, gib $a_i \rightarrow b_j$ aus und fahre fort mit $(j, i) \leftarrow (j-1, i-1)$; sonst, falls $E[i, j] = \text{del}(a_i) + E(i-1, j)$ gib $\text{del}(a_i)$ aus fahre fort mit $j \leftarrow j - 1$; sonst, falls $E[i, j] = \text{ins}(b_j) + E(i, j-1)$, gib $\text{ins}(b_j)$ aus und fahre fort mit $i \leftarrow i - 1$. Terminiere für $i = 0$ und $j = 0$.

Matrix-Kettenmultiplikation

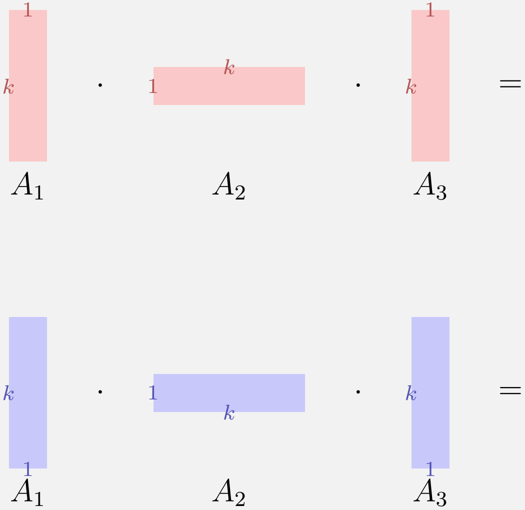
Aufgabe: Berechnung des Produktes $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n$ von Matrizen $A_1, \ldots, A_n$.

Matrizenmultiplikation ist assoziativ, d.h. Klammerung kann beliebig gewählt werden.

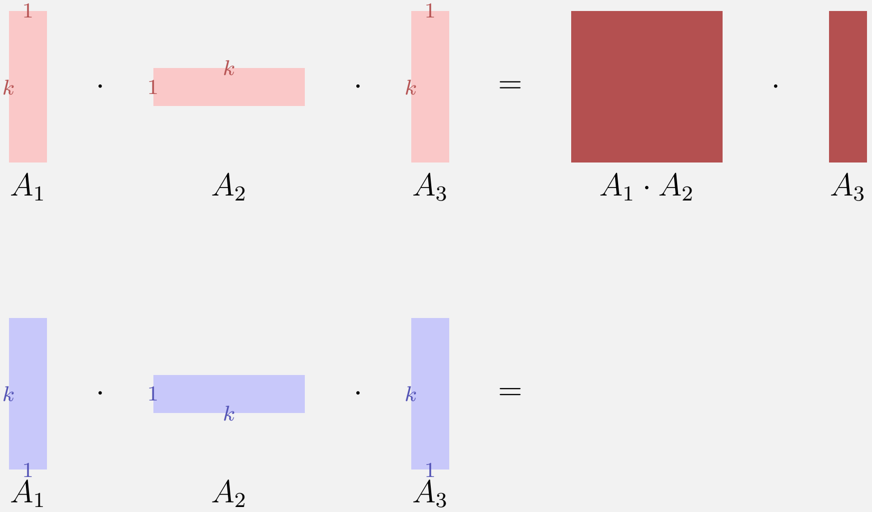
Ziel: möglichst effiziente Berechnung des Produktes.

Annahme: Multiplikation einer $(r \times s)$-Matrix mit einer $(s \times u)$-Matrix hat Kosten $r \cdot s \cdot u$.

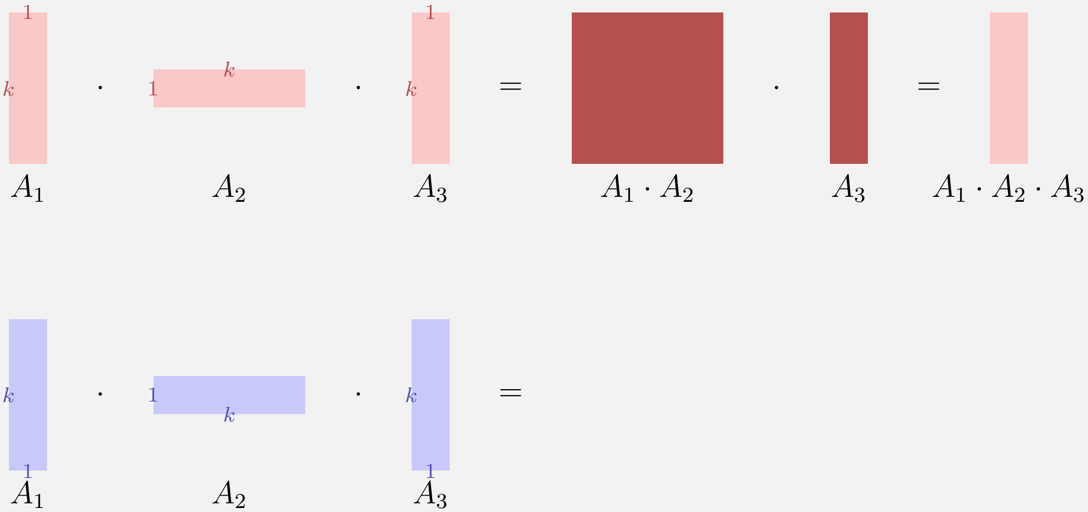
Macht das einen Unterschied?



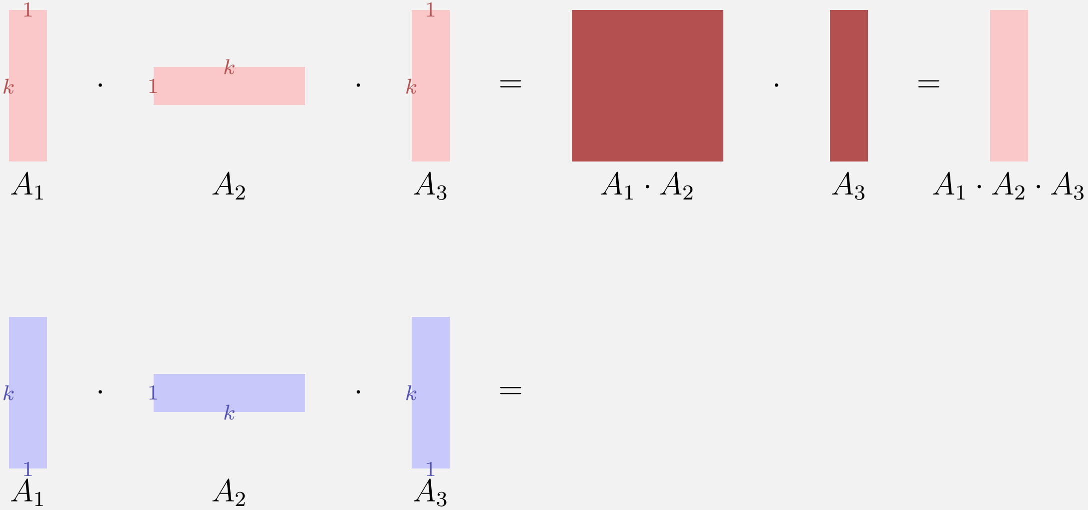
Macht das einen Unterschied?



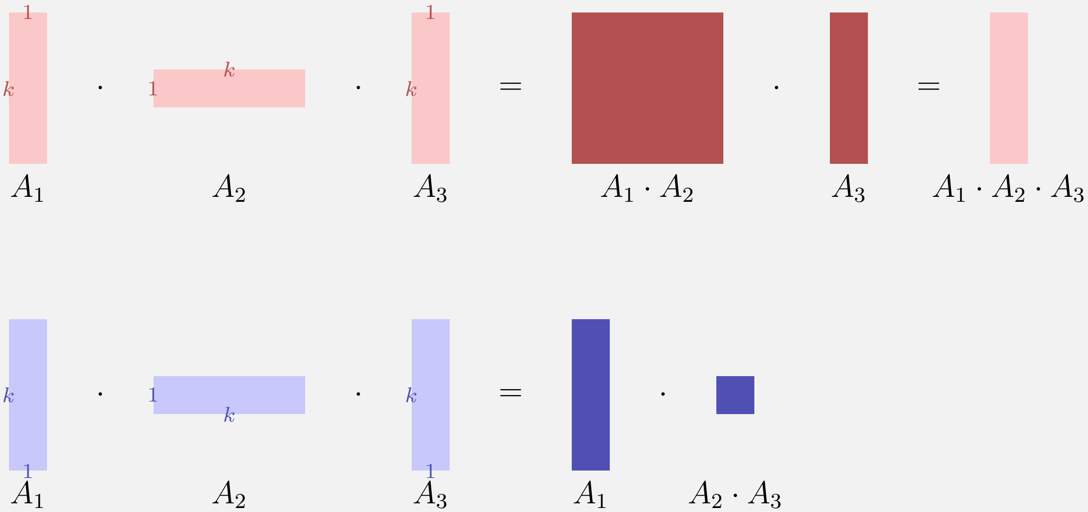
Macht das einen Unterschied?



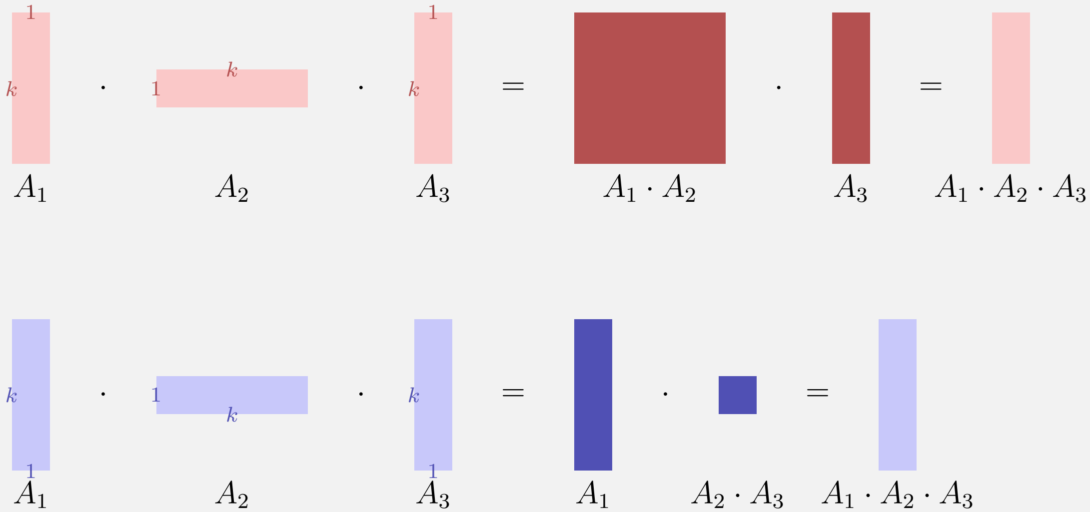
Macht das einen Unterschied?



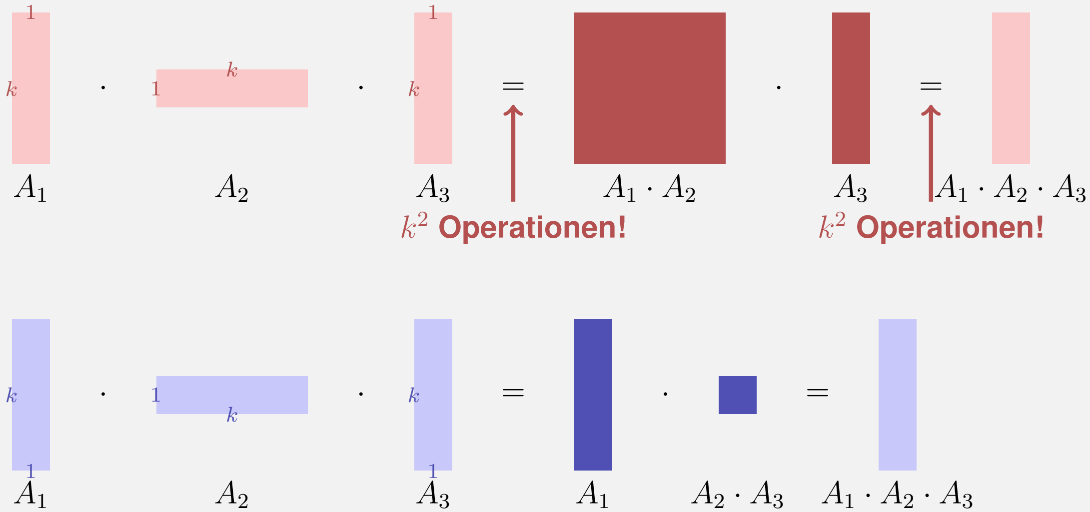
Macht das einen Unterschied?



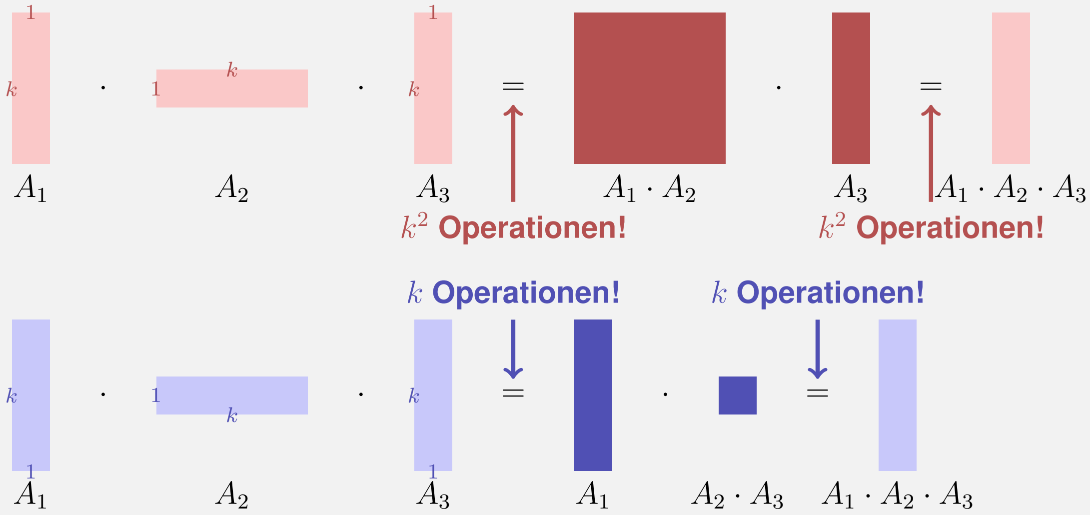
Macht das einen Unterschied?



Macht das einen Unterschied?



Macht das einen Unterschied?



Rekursion

- Annahme, dass die bestmögliche Berechnung von $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_i)$ und $(A_{i+1} \cdot A_{i+2} \cdots A_n)$ für jedes i bereits bekannt ist.
- Bestimme bestes i, fertig.

$n \times n$-Tabelle M. Eintrag $M[p,q]$ enthält Kosten der besten Klammerung von $(A_p \cdot A_{p+1} \cdots A_q)$.

$$M[p,q] \leftarrow \min_{p \leq i < q} \left(M[p,i] + M[i+1,q] + \text{Kosten letzte Multiplikation}\right)$$

Berechnung der DP-Tabelle

- Randfälle: $M[p,p] \leftarrow 0$ für alle $1 \leq p \leq n$.
- Berechnung von $M[p,q]$ hängt ab von $M[i,j]$ mit $p \leq i \leq j \leq q$, $(i,j) \neq (p,q)$.
  Insbesondere hängt $M[p,q]$ höchstens ab von Einträgen $M[i,j]$ mit $i - j < q - p$.
  Folgerung: Fülle die Tabelle von der Diagonale ausgehend.

Analyse

DP-Tabelle hat n^2 Einträge. Berechung eines Eintrages bedingt Betrachten von bis zu $n - 1$ anderen Einträgen.

Gesamtlaufzeit $\mathcal{O}(n^3)$.

Auslesen der Reihenfolge aus M: Übung!

Exkurs: Matrixmultiplikation

Betrachten Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen.

Seien

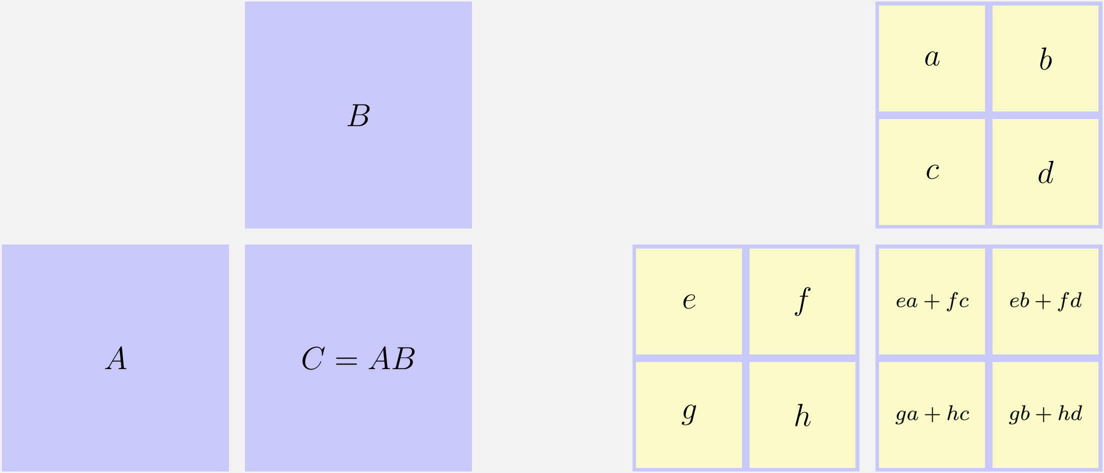
$$
\begin{aligned}
&A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, \\
&C = A \cdot B
\end{aligned}
$$

dann

$$
c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.
$$

Naiver Algorithmus benötigt $\Theta(n^3)$ elementare Multiplikationen.

Divide and Conquer



Divide and Conquer

- Annahme $n = 2^k$.
- Anzahl elementare Multiplikationen: $M(n) = 8M(n/2)$, $M(1) = 1$.
- Ergibt $M(n) = 8^{\log_2 n} = n^{\log_2 8} = n^3$. Kein Gewinn ☹

$$\begin{array}{cc|cc} & & a & b \\ & & c & d \\ \hline e & f & ea+fc & eb+fd \\ g & h & ga+hc & gb+hd \end{array}$$

Strassens Matrixmultiplikation

- Nichttriviale Beobachtung von Strassen (1969): Es genügt die Berechnung der sieben Produkte $A = (e + h) \cdot (a + d)$, $B = (g + h) \cdot a$, $C = e \cdot (b - d)$, $D = h \cdot (c - a)$, $E = (e + f) \cdot d$, $F = (g - e) \cdot (a + b)$, $G = (f - h) \cdot (c + d)$. Denn: $ea + fc = A + D - E + G$, $eb + fd = C + E$, $ga + hc = B + D$, $gb + hd = A - B + C + F$.
- Damit ergibt sich $M'(n) = 7M(n/2), M'(1) = 1.$ Also $M'(n) = 7^{\log_2 n} = n^{\log_2 7} \approx n^{2.807}$.
- Schnellster bekannter Algorithmus: $\mathcal{O}(n^{2.37})$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{bmatrix} \end{array}$$